
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06274630 4



Archiv

der

athematik und Physik

mit besonderer Rücksicht

auf die Bedürfnisse der Lehrer an höhern Unterrichtsanstalten.

Herausgegeben

von

Johann August Grunert,
Professor zu Greifswald.

Eilfter Theil.

Mit acht lithographirten Tafeln.

Greifswald.
C. A. Koch's Separat-Conto.

1848.

Inhaltsverzeichniss des eilften Theils.

Arithmetik.

Geometrie.

XII. Wann drücken die Gleichungen

$$(a_1{}^2-b_2b_3)x+(a_3b_3-a_1a_2)y+(a_2b_2-a_1a_3)z=0,$$
$$(a_3b_3-a_1a_2)x+(a_2{}^2-b_1b_3)y+(a_1b_1-a_2a_3)z=0,$$
$$(a_2b_2-a_1a_3)x+(a_1b_1-a_2a_3)y+(a_3{}^2-b_1b_2)z=0$$

Trigonometrie.

Geodäsie.

Mechanik.

Optik.

Astronomie.

Physik.

Uebungs-Aufgaben für Schüler.

Literarische Berichte*).

*) Ich bemerke hierbei, dass die Literarischen Berichte mit besonderen fortlaufenden Seitenzahlen versehen sind.

Aufforderung

des Herausgebers des Archivs der Mathematik und Physik.

Für Deutschland, welches alle, von denen die deutsche Sprache geredet wird, jetzt mehr als jemals bald in Wahrheit ein gemeinschaftliches Vaterland nennen zu dürfen die Hoffnung und das wohl erworbene, in mehreren Ländern theuer genug erkaufte Recht haben, ist ein gemeinschaftliches Maass-, Münz- und Gewichts-System eines der wichtigsten Bedürfnisse, wichtiger als Mancher wohl glauben mag. Dies hier weiter aus einander zu setzen, ist unnöthig und auch jetzt gar nicht meine Absicht; von Neuem anführen will ich jedoch, was der grosse Laplace so schön und in kurzen Worten so bezeichnend über den für jedes Land so hochwichtigen Gegenstand allgemein eingeführter Maasse, Münzen und Gewichte schon vor langer Zeit gesagt hat:

„On ne peut voir le nombre prodigieux de mesures en usage, non seulement chez les différens peuples, mais dans la même nation; leurs divisions bizarres et incommodes pour les calculs; la difficulté de les connaître et de les comparer; enfin l'embarras et les fraudes qui en resultent dans le commerce, sans regarder comme l'un des plus grands services, que les gouvernements puissent rendre à la société, l'adoption d'un système de mesures dont les divisions uniformes se prêtent le plus facilement au calcul, et qui dérivent de la manière la moins arbitraire d'une mesure fondamentale indiquée par la nature elle-même. Un peuple, qui se donnerait un semblable système, réunirait à l'avantage d'en recueillir les premiers fruits celui de voir son exemple suivi par les autres peuples dont il deviendrait ainsi le bienfaiteur; car l'empire lent mais irrésistible de

la raison l'emporte, à la longue, sur les jalousies nationales, et surmonte tous les obstacles qui s'opposent au bien généralement senti.“

Dass dieser Gegenstand in Deutschland bald eifrig in Angriff genommen werden wird oder vielleicht schon genommen worden ist, kann nicht bezweifelt werden; wer aber die grossen Schwierigkeiten desselben kennt und mit klarem Blick zu übersehen gehörig befähigt und im Stande ist, muss wünschen, dass man sich dabei weniger als bei irgend einem anderen von dem gemeinsamen Interesse Deutschlands gleich lebhaft in Anspruch genommenen Gegenstande übereile, damit man nicht Gefahr laufe, am Ende doch eine Einrichtung getroffen zu haben, welche sich, wenn erst der scharfe Prüfstein des täglichen Verkehrs und des Handels und Wandels überhaupt an dieselbe gelegt wird, als unzweckmässig und unpraktisch erweist. Insbesondere ist aber auch sehr zu wünschen, über diesen Gegenstand möglichst zeitig die verschiedenartigsten Stimmen aus den verschiedensten Ländern zu vernehmen, damit derselbe nicht allein und ohne alle Vorberathung von anderen Seiten her der Entscheidung der in Zeiten wie die jetzigen so beliebten Committées, Commissionen oder Deputationen anheim gestellt bleibe. Deshalb hat der unterzeichnete Herausgeber des „Archivs der Mathematik und Physik“, welcher der für das gemeinsame deutsche Vaterland so wichtigen Uebereinstimmung der Maasse, Münzen und Gewichte schon seit langer Zeit besondere Aufmerksamkeit gewidmet hat, und an den Bestrebungen der Gegenwart, ohne für den Umsturz alles Bestehenden ohne Unterschied zu sein, den lebhaftesten Antheil nimmt, sich entschlossen, mit dem Anfange des bald erscheinenden 1sten Hefts des 12ten Theils seiner weit verbreiteten Zeitschrift in derselben der Einführung eines wahrhaft zweckmässigen, für Handel und Wandel wirklichen Nutzen und wesentliche Erleichterung versprechenden gemeinschaftlichen Maass-, Münz- und Gewichts-Systems in Deutschland eine besondere Rubrik unter der Ueberschrift: „Deutsche Maasse, Münzen und Gewichte“ zu widmen, und hofft in Uebereinstimmung mit der Verlagshandlung die Einrichtung so zu treffen, dass die diese Rubrik enthaltenden Bogen auch

abgesondert von der eigentlichen Zeitschrift zu einem ganz geringen Preise verkäuflich sind, deshalb auch mit besondern fortlaufenden Seitenzahlen versehen werden sollen und künftighin zu einem besonderen Werkchen, dem dann auch ein entsprechender eigener Titel beigegeben werden wird, mit einander vereinigt werden können. In diese Rubrik wird der Herausgeber Alles, was über die Einführung eines gemeinschaftlichen Maass-, Münz- und Gewichts-Systems in Deutschland irgend zu seiner Kenntniss gelangt, aufnehmen; weil aber hiebei nur gemeinschaftliche Kräfte mit gehöriger Nachhaltigkeit wirken können. so lässt derselbe nicht bloss an die Mathematiker und die Leser seiner Zeitschrift, sondern an alle und jede, welche für den besprochenen höchst wichtigen Gegenstand sich in irgend einer Beziehung interessiren, ferner auch an die politischen Klubs aller Arten und Farben, in allen Ländern hiermit die Aufforderung ergehen:

> ihm, die Einführung eines gemeinschaftlichen Maass-, Münz- u. Gewichts-Systems in allen Ländern deutscher Zunge betreffende ausführlichere Aufsätze, oder auch bloss dahin zielende einzelne Vorschläge baldigst und in reichlichstem Maasse zum Abdruck in der genannten Rubrik einzusenden.

Für den schleunigsten Abdruck aller irgend zur Aufnahme geeignet scheinenden Mittheilungen wird gewissenhaft Sorge getragen werden. Die Bedingungen der Aufnahme sind die für das Archiv überhaupt geltenden und können als allgemein bekannt angesehen werden; übrigens ertheilt die dem ersten Theile beigegebene ausführliche Ankündigung darüber weiteren Aufschluss, und wird nur bemerkt, dass für keine der mehrere Hunderte übersteigenden trefflichen Abhandlungen, die in den bereits erschienenen eilf Theilen des Archivs enthalten sind, irgend ein Honorar bezahlt worden ist, und nach den stets festzuhaltenden Gesetzen des Instituts auch nicht bezahlt werden darf und kann.

Der Herausgeber hofft auf dem vorher näher bezeichneten Wege in dem späterhin aus den einzelnen Bogen des

Archivs zu bildenden besonderen Werkchen eine mit der Zeit selbst fortgeschrittene, und mit der successiven Ausbildung eines gemeinschaftlichen Maass-, Münz- und Gewichtssystems in Deutschland stets gleichmässig Schritt haltende und mit derselben zugleich entstandene Sammlung wahrer Actenstücke zu bilden, welche eben deshalb für alle Zeiten einen wahren historischen Werth haben und nothwendig eine weit grössere Auctorität und Authenticität besitzen wird, als die nach der ersten französischen Revolution in gleichem Falle bekanntlich in sehr grosser Mannigfaltigkeit in Frankreich erschienenen Schriften grösstentheils besitzen.

Dass Aufsätze der bezeichneten Art, deren Zusendung wie gewöhnlich auf dem Wege des Buchhandels über Leipzig mit der Aufschrift: „Für das Archiv der Mathematik und Physik (Koch's Separat-Konto)" erbeten wird, reichlich eingehen mögen, wünsche ich sehr, und bitte zugleich die Herausgeber anderer Journale oder auch blosser Localblätter, welchen die vorliegende Aufforderung zufällig zu Gesicht kommen sollte, zur möglichst weiten Verbreitung derselben durch deren Aufnahme in ihre Zeitschriften im Interesse des gemeinschaftlichen deutschen Vaterlandes das Ihrige kräftigst beizutragen.

Greifswald im Mai 1848.

Der Herausgeber
des Archivs der Mathematik und Physik.

J. A. Grunert.

I.

Theoremata quaedam de Lemniscata Bernouillana.

Auctore

D. Bierens de Haan,

Math. Mag. et Phil. Nat. Doct.
Amstelodamensi.

1. Lemniscatae Bernouillanae aequatio, si curvae centrum et axin pro origine coordinatarum rectangularium et axi abscissarum sumamus, est

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (a)$$

ubi a est curvae semi-axis.

Si curvae centrum et axin pro polo et axi coordinatarum polarium sumamus, ejus aequatio est

$$r^2=a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (b)$$

Lineae e centro ductae, cum alterutra axis parte angulum 45^0 includentes, curvam in centro tangunt, quod ex aequatione (b) (ob $r^2=0$) patet, unde Tangentes Centrales nuncupantur.

2. *Theorema I.* Lemniscatae semi-axis media proportionalis est radium vectorem inter et normalem polarem cujusvis curvae puncti; quando systemate (b) utamur.

Ex aequatione (b) enim sequitur:

$$\frac{\partial r}{\partial \varphi}=-\frac{a^2 \operatorname{Sin} 2\varphi}{r}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

unde normalis polaris invenitur

$$=\sqrt{\left\{r^2+\left(r\cdot\frac{\partial r}{r\partial\varphi}\right)^2\right\}}=\sqrt{\left\{\left(\frac{a^2\operatorname{Cos}2\varphi}{r}\right)^2+\left(\frac{a^2\operatorname{Sin}2\varphi}{r}\right)^2\right\}}=\frac{a^2}{r}. (2)$$

3. *Corollarium.* **Hinc sequitur methodus normalem ducendi.**
In radii vectoris productione inde a centro partem sumas semiaxi aequalem, ex cujus fine ad axem rectam ducas rectae parallelam, e vertice ad punctum datum ductae; cum recta, ita in axi inde a centro praecisa, e puncto dato circuli arcum ducas, qui perpendiculum e centro in radium vectorem erectum in duobus punctis secabit, quorum unum cum puncto dato conjungendum est, ut normalem habeas. Quae selectio in figura nullius erit difficultatis. Caeteroquin patet, alteram intersectionem valere pro altera radii vectoris producti extremitate.

4. *Theorema II.* Circulus osculatorius cujusvis Lemniscatae puncti (r_1, φ_1) in eodem puncto curvam intersecat, nec non in puncto, cujus radius vector est

$$r_2 = \frac{r_1^2}{\sqrt{(4a^2 - 3r_1^2)}}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Cujus circuli aequatio polaris in systemate (b) est

$$r^2 - 2(\xi \operatorname{Cos} \varphi + \eta \operatorname{Sin} \varphi) r + \xi^2 + \eta^2 = \varrho^2, \quad . \quad . \quad (4)$$

ubi ξ et η sunt coordinatae centri osculationis et ϱ radius curvaturae. Horum valores inveniuntur esse

$$\xi = \frac{2a^2 \operatorname{Cos}^3 \varphi_1}{3r_1}, \quad \eta = \frac{-2a^2 \operatorname{Sin}^3 \varphi_1}{3r_1}, \quad \varrho = \frac{a^2}{3r_1};$$

quibus in aequationem (4) substitutis, fit

$$r^2 - \frac{4a^2}{3r_1}(\operatorname{Cos}^3 \varphi_1 . \operatorname{Cos} \varphi - \operatorname{Sin}^3 \varphi_1 . \operatorname{Sin} \varphi) r + \frac{r_1^2}{3} = 0. \quad . \quad . \quad (5)$$

Pro puncto intersectionis, si adsit, sint coordinatae polares r_2, φ_2; simul esse debet

$$r_2^2 - \frac{4a^2}{3r_1}(\operatorname{Cos}^3 \varphi_1 . \operatorname{Cos} \varphi_2 - \operatorname{Sin}^3 \varphi_1 . \operatorname{Sin} \varphi_2) r_2 + \frac{r_1^2}{3} = 0,$$

$$r_2^2 = a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi_2;$$

unde, eliminando r_2,

$$(3a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi_2 + a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi_1)^2 a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi_1$$
$$= 16a^4 (\operatorname{Cos}^3 \varphi_1 \operatorname{Cos} \varphi_2 - \operatorname{Sin}^3 \varphi_1 . \operatorname{Sin} \varphi_2)^2 a^2 \operatorname{Cos} 2\varphi_2,$$

vel

$$2 \operatorname{Sin}^3 2\varphi_1 . \operatorname{Sin} 2\varphi_2 . \operatorname{Cos} 2\varphi_2$$
$$= - \operatorname{Cos}^2 2\varphi_2 . \operatorname{Cos} 2\varphi_1 (1 + 2 \operatorname{Sin}^2 2\varphi_1) + 2 \operatorname{Cos} 2\varphi_2 - \operatorname{Cos}^3 2\varphi_1;$$

unde quadrando et reducendo

$$\mathrm{Cos}^4 2\varphi_2 (4-3\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1) - 4\mathrm{Cos}^3 2\varphi_2 . \mathrm{Cos}\, 2\varphi_1 (3-2\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1)$$
$$+ 6\mathrm{Cos}^2 2\varphi_2 . \mathrm{Cos}^2 2\varphi_1 (2-\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1) - 4\mathrm{Cos}\, 2\varphi_2 . \mathrm{Cos}^3 2\varphi_1$$
$$+ \mathrm{Cos}^6 2\varphi_1 = 0;$$

vel, si ponas

$$\frac{\mathrm{Cos}\, 2\varphi_2}{\mathrm{Cos}\, 2\varphi_1} \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 = p,$$

erit

$$0 = 4p(p^3 - 3p^2 + 3p - 1) - \mathrm{Cos}^2 2\varphi_1 (3p^4 - 8p^3 + 6p^2 - 1)$$
$$= (p-1)^3 \{4p - (3p+1)\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1\}.$$

Tres factores $p-1=0$, vel $p=1$, indicant contactum secundi ordinis, sive osculationem una cum intersectione obtinere in puncto (r_1, φ_1). Quartam vero intersectionem, si exstet rationalis, petere debemus e quarto factore, unde

$$p = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1}{4 - 3\mathrm{Cos}^2 2\varphi_1} = \frac{r_1^2}{4a^2 - 3r_1^2},$$

et

$$r_2 = \frac{r_1^2}{\sqrt{(4a^2 - 3r_1^2)}}.$$

Corollarium. Inde sequitur pro vertice, ubi $r_1 = a$, etiam $r_2 = a$ esse, unde hoc puncto contactus tertii ordinis obtinet.

5. *Theorema III.* Lemniscatae tangentes, Tangentibus Centralibus parallelae, cum hisce quadratum efficiunt.

Si enim Tangentes Centrales pro axibus coordinatarum rectangularium (x', y') assumamus, facile Lemniscatae aequationem (ob $x\sqrt{2} = x' + y'$ et $y\sqrt{2} = x' - y'$) invenimus esse

$$(x'^2 + y'^2)^2 = 2a^2 x' y'; \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(c)}$$

unde

$$\frac{\partial x'}{\partial y'} = -\frac{3x'^2 - y'^2}{3y'^2 - x'^2} \cdot \frac{y'}{x'};$$

ergo

$$\left.\begin{array}{l} \text{pro } y' \text{ maximo, } y_1'^2 = 3x_1'^2, \text{ et ex (c) } x_1' = \tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_1' = \tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{27}{4}}; \\ \text{pro } x' \text{ maximo, } x_1'^2 = 3y_1'^2, \text{ et ex (c) } x_1' = \tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{27}{4}}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad y_1' = \tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}. \end{array}\right\} \quad (6)$$

Quia vero elucet, pro y' et x' maximis respective x_1' et y_1' cum directioni tangentis alteri Tangenti Centrali parallelae coincidere, sequitur illas cum hisce quadratum efficere, cujus latera $\frac{1}{2}a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}$ aequalia sunt.

6. Caeterum ex valoribus x_1' et y_1' (6) habemus pro valori radii vectoris correspondentis, e centro divergentis,

$$r_1=\sqrt{(x_1'^2+y_1'^2)}=\sqrt{\{\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{\tfrac{27}{4}}+\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{\tfrac{3}{4}}\}}=a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}.$$

Hinc deducitur

$$\text{Cos}\,2\varphi_1=\frac{r_1^2}{a^2}=\sqrt{\tfrac{3}{4}},\ 2\varphi_1=30^0,\ \varphi_1=15^0.$$

Unde ex nota proprietate sequitur

Corollarium 1. Radius vector, qui contactum curvam inter et hocce quadratum centro jungit, Lemniscatae Quadrantis aream bisecat.

7. Quia hoc radio vectore in quadrato triangulus rectangulus determinatur, cujus area est

$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{27}{64}}\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt[4]{\tfrac{3}{4}}=\tfrac{3}{16}\,a^2=\tfrac{3}{4}Q,$$

ubi Q est Lemniscatae Quadrantis area, nobis est

Corollarium 2. Figura mixtalinea, quae in quadrato memorato a Lemniscatae arcu determinatur, inde a $\varphi=45^0$ usque ad $\varphi=15^0$, Quadrantis quartae parti aequalis est.

Est enim figurae hujus mixtaelineae area

$$=\tfrac{3}{4}Q-\tfrac{1}{2}Q=\tfrac{1}{4}Q.$$

8. *Theorema IV.* Area pro quovis Lemniscatae puncto radium vectorem e centro divergentem inter et axin contenta, areae trianguli aequalis est, qui latera habet eundem radium vectorem, normalem polarem in systemate (b), et lineam, e curvae centro ad mediam illam normalem ductam.

Area sic definita exprimitur integrali

$$q_{\varphi_0}^{\varphi_1}=\tfrac{1}{2}\int_0^{\varphi_1}r^2\partial\varphi=\tfrac{1}{4}a^2\int_0^{\varphi_1}\partial\,.\,\text{Sin}\,2\varphi=\tfrac{1}{4}a^2\,\text{Sin}\,2\varphi_1$$

$$=\frac{\sqrt{(a^4-r_1^4)}}{4}\quad.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\quad(7)$$

Trianguli memorati area dimidio areae aequalis est trianguli, cujus latera sint idem radius vector, subnormalis et normalis polais in systemate (b); ex formula (2) vero sequitur valor subnormalis

$$=\sqrt{\left(\frac{a^4}{r_1^2}-r_1^2\right)}=\sqrt{\frac{a^4-r_1^4}{r_1^2}}.\quad.\ .\ .\quad(8)$$

Hinc eruimus pro prioris trianguli area

$$\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}r_1.\sqrt{\frac{a^4-r_1^4}{r_1^2}}=\frac{\sqrt{(a^4-r_1^4)}}{4}=q_{\varphi_0}^{\varphi_1}.$$

9. Ut aream exprimamus, inter cujusvis Lemniscatae puncti ordinatam, curvae arcum et axin contentam, in formulam notam

$$q'=\int y\partial x$$

valorem y ex aequatione (a) deductum, nempe

$$y=\sqrt{\frac{-a^2-2x^2+a\sqrt{(a^2+8x^2)}}{2}},$$

substituamus, ac ponamus

$$2x^2=v,$$

fit

$$q'=\tfrac{1}{4}\int\partial v.\sqrt{\frac{-a^2-v+a\sqrt{(a^2+4v)}}{v}}; \quad . \; . \; . \; (9)$$

quod integrale ut rationale reddamus, ponamus

$$\frac{-a^2-v+a\sqrt{(a^2+4v)}}{v}=w^2,$$

unde, quia v generaliter τῷ 0 non est aequale, sequitur

$$v=\frac{1-w^2}{(1+w^2)^2}.2a^2, \text{ et } \partial v=\frac{3-w^2}{(1+w^2)^3}.4a^2w\partial w.$$

Ergo integrale ipsum fit

$$q'=a^2\int\frac{3w^2-w^4}{(1+w^2)^3}\partial w=\frac{a^2w^3}{(1+w^2)^2}; \quad . \; . \; . \; (10)$$

dum limites fiunt

$$\left.\begin{array}{l}\text{pro } x=x_1,\; v=2x_1^2,\; w=\frac{y_1}{x_1}=\text{tang}\,\varphi_1;\\ \text{pro } x=a,\; v=2a^2,\; w=0.\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; (11)$$

10. Hinc

Theorema V. Pro quocunque Lemniscatae puncto (x, y) construas A quartam proportionalem ad r, x et y, B et C tertias proportionales ad r et a, et ad r et y respective; D quartam proportionalem ad r, B et A; rectangulus, C inter et D constructus, areae aequalis

Archivs zu bildenden besonderen Werkchen eine mit der Zeit selbst fortgeschrittene, und mit der successiven Ausbildung eines gemeinschaftlichen Maass-, Münz- und Gewichtssystems in Deutschland stets gleichmässig Schritt haltende und mit derselben zugleich entstandene Sammlung wahrer Actenstücke zu bilden, welche eben deshalb für alle Zeiten einen wahren historischen Werth haben und nothwendig eine weit grössere Auctorität und Authenticität besitzen wird, als die nach der ersten französischen Revolution in gleichem Falle bekanntlich in sehr grosser Mannigfaltigkeit in Frankreich erschienenen Schriften grösstentheils besitzen.

Dass Aufsätze der bezeichneten Art, deren Zusendung wie gewöhnlich auf dem Wege des Buchhandels über Leipzig mit der Aufschrift: „Für das Archiv der Mathematik und Physik (Koch's Separat-Konto)" erbeten wird, reichlich eingehen mögen, wünsche ich sehr, und bitte zugleich die Herausgeber anderer Journale oder auch blosser Localblätter, welchen die vorliegende Aufforderung zufällig zu Gesicht kommen sollte, zur möglichst weiten Verbreitung derselben durch deren Aufnahme in ihre Zeitschriften im Interesse des gemeinschaftlichen deutschen Vaterlandes das Ihrige kräftigst beizutragen.

Greifswald im Mai 1848.

Der Herausgeber
des Archivs der Mathematik und Physik.

J. A. Grunert.

Si focum et axin Lemniscatae pro polo et axi coordinatarum polarium (r, φ) assumamus, facile Lemniscatae aequatio prodit;

$$r^4 - 4er^3 \operatorname{Cos}\varphi + 4e^2r^2 = e^4; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

unde

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{r^4 + 4e^2r^2 - e^4}{4er^3}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = -\frac{r^2 - 3er\operatorname{Cos}\varphi + 2e^2}{er^2\operatorname{Cos}\varphi}; \quad .. \quad (14)$$

quorum ope eruimus aream memoratam esse

$$= \frac{1}{2}\int r^2 \partial\varphi$$

$$= -\frac{e^2}{4}\int \frac{(r^2 - e^2) \cdot \left(\frac{r^2}{e^2} - 3\right)}{\sqrt{(r^2 - e^2)^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{r^4}{e^4} + 6\frac{r^2}{e^2} - 1\right)}} \cdot \partial\left(\frac{r^2}{e^2}\right)$$

$$= \frac{e^2}{4}\sqrt{\left(-\frac{r^4}{e^4} + 6\frac{r^2}{e^2} - 1\right)} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-r^4 + 6e^2r^2 - e^4)} \quad . \quad . \quad (15)$$

Est area trianguli commemorati:

$$= \sqrt{\left(\frac{r + e + e\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r + e - e\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{r - e + e\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{-r + e + e\sqrt{2}}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{(r+e)^2 - 2e^2}{4} \cdot \frac{-(r-e)^2 + 2e^2}{4}\right)} = \sqrt{\left(\frac{r^2 + 2er - e^2}{4} \cdot \frac{-r^2 + 2er + e^2}{4}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{-(r^2 - e^2)^2 + 4e^2r^2}{16}} = \tfrac{1}{4}\sqrt{(-r^4 + 6e^2r^2 - e^4)},$$

Q. E. D.

13. *Theorema VIII.* Circulum describas in Lemniscatae totum axin, nec non duos circulos e focis cum radio excentricitati aequali; porro lineam ducas cum perpendiculo, e centro in axin erecto, eundem angulum efficientem, ac radius vector, segmentum quodvis Lemniscatae abscindens, cum axe includit: haecce linea a figura curvalinea, (quae in primo circulo restat post arearum ei cum duobus posterioribus circulis communium abstractionem) inde a perpendiculo memorato partem abscindit, quae illi Lemniscatae segmento aequalis est.

Sit (Tab. I. Fig. 1.) $\angle JOQ = \angle AOP = \varphi_1$. Si lineae OQ cum circulo OF intersectionem M cum foco jungas, erit

$$\angle OFM = 2\angle JOQ = 2\varphi_1.$$

Ergo

$$\text{Segmentum } OXMO = 2e^2\varphi_1 \cdot \frac{\pi}{360^0} - \tfrac{1}{2}e^2 \operatorname{Sin} 2\varphi_1$$

$$= a^2\varphi_1 \cdot \frac{\pi}{360^0} - \tfrac{1}{4}a^2 \operatorname{Sin} 2\varphi_1,$$

quod si a valore Sectoris $OJQO = a^2\varphi_1 \cdot \frac{\pi}{360^0}$ abscindas, manet figura mixtalinea $OJQMXO = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{Sin} 2\varphi_1$, idem valor ac (7).

Q. E. D.

14. *Theorema IX.* Aequationis

$$\sqrt{\{(\partial x)^2 + (\partial y)^2\}} = \frac{e\partial\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2\psi)}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

integralium amborum valores

$$\left.\begin{array}{l} x = a\operatorname{Cos}\psi \cdot \sqrt{\frac{1 + \operatorname{Cos}^2\psi}{2}},\ y = a\operatorname{Sin}\psi \cdot \operatorname{Cos}\psi \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \qquad\qquad \text{unde } r^2 = a^2\operatorname{Cos}^2\psi \end{array}\right\} ;..(17)$$

et

$$_1x = \frac{a\operatorname{Sin}\psi}{1 + \operatorname{Cos}^2\psi},\ _1y = \frac{a\operatorname{Sin}\psi \cdot \operatorname{Cos}\psi}{1 + \operatorname{Cos}^2\psi},\ \text{unde } _1r^2 = \frac{a^2\operatorname{Sin}^2\psi}{1 + \operatorname{Cos}^2\psi},\ (18)$$

ad Lemniscatae arcus complementares pertinent.

Primo ex aequationibus (17) sequitur

$$\sqrt{\{(\partial x)^2 + (\partial y)^2\}}$$

$$= a\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot \partial\psi\sqrt{\left\{\frac{\operatorname{Sin}^2\psi(1 + 2\operatorname{Cos}^2\psi)^2}{1 + \operatorname{Cos}^2\psi} + (2\operatorname{Cos}^2\psi - 1)^2\right\}} = \frac{e\partial\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2\psi)}};$$

$$(x^2 + y^2)^2 = (r^2)^2 = a^4\operatorname{Cos}^4\psi = a^2 \cdot a^2\operatorname{Cos}^2\psi(1 - \operatorname{Sin}^2\psi) = a^2(x^2 - y^2).$$

Porro ex aequationibus (18) sequitur

$$\sqrt{\{(\partial_1 x)^2 + (\partial_1 y)^2\}}$$

$$= \frac{a\partial\psi}{(1 + \operatorname{Cos}^2\psi)^2}\sqrt{\{(3 - \operatorname{Cos}^2\psi)^2\operatorname{Cos}^2\psi + (3\operatorname{Cos}^2\psi - 1)^2\}} = \frac{e\partial\psi}{\sqrt{(1 - \frac{1}{2}\operatorname{Sin}^2\psi)}};$$

$$(_1x^2 + {}_1y^2)^2 = (_1r^2)^2 = \frac{a^4\operatorname{Sin}^4\psi}{(1 + \operatorname{Cos}^2\psi)^2} = a^2 \cdot \frac{a^2\operatorname{Sin}^2\psi(1 - \operatorname{Cos}^2\psi)}{(1 + \operatorname{Cos}^2\psi)^2}$$
$$= a^2(_1x^2 - {}_1y^2);$$

ita ut revera et aequationi differentiali (16) satisfaciant et Lemniscatae coordinatas exprimant valores (17) ut et (18). Denique ex aequationibus iisdem eruimus:

$$_1r^2 = \frac{a^2 - a^2\operatorname{Cos}^2\psi}{a^2 + a^2\operatorname{Cos}^2\psi}\, a^2 = a^2\frac{a^2 - r^2}{a^2 + r^2}, \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

quae omnino est relatio inter arcuum complementarium radios vectores.

15. *Theorema X.* Lemniscatae arcus directi (id est, qui a centro initium ducit) duorum arcuum directorum (quibus respondeant radii vectores r_1 et r_2) summae vel differentiae aequalis, radius vector r valorem habet

$$r = a^2 \frac{r_1 \sqrt{(a^4 - r_2^4)} \pm r_2 \sqrt{(a^4 - r_1^4)}}{a^4 + r_1^2 r_2^2}. \quad . \quad . \quad (20)$$

Ex formula (20) enim sequitur, post reductionem,

$$\partial r = a^2 \frac{\left\{ \begin{array}{c} \{\partial r_1 . \sqrt{(a^4 - r_2^4)} \pm \partial r_2 . \sqrt{(a^4 - r_1^4)}\} \\ \times \{(a^4 - r_1^2 r_2^2) \sqrt{(a^4 - r_1^4)(a^4 - r_2^4)} \mp 2a^4 r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2)\} \end{array} \right\}}{(a^4 + r_1^2 r_2^2)^2 \sqrt{(a^4 - r_1^4)(a^4 - r_2^4)}},$$

$$\sqrt{(a^4 - r^4)} = a^2 \frac{(a^4 - r_1^2 r_2^2) \sqrt{(a^4 - r_1^4)(a^4 - r_2^4)} \mp 2a^4 r_1 r_2 (r_1^2 + r_2^2)}{(a^4 + r_1^2 r_2)^2}; \quad (21)$$

ergo

$$\frac{\partial r}{\sqrt{(a^4 - r^4)}} = \frac{\partial r_1 . \sqrt{(a^4 - r_2^4)} \pm \partial r_2 \sqrt{(a^4 - r_1^4)}}{\sqrt{(a^4 - r_1^4)(a^4 - r_2^4)}}$$
$$= \frac{\partial r_1}{\sqrt{(a^4 - r_1^4)}} \pm \frac{\partial r_2}{\sqrt{(a^4 - r_2^4)}};$$

et integrando

$$\text{Arc. dir.}(r) = \text{Arc. dir.}(r_1) \pm \text{Arc. dir.}(r_2), \quad . \quad . \quad (22)$$

Q. E. D.

16. Hyperbolae Aequilaterae, quae axin majorem, centrum et vertices cum Lemniscata Bernouillana communes habet, (cujusque Grenzpunktencurve ergo est Lemniscata) aequatio polaris in systemate (b) est

$$R^2 \operatorname{Cos} 2\varphi = a^2; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (e)$$

ergo

$$R^2 r^2 = a^4 \text{ et } Rr = a^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Hinc sequitur

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi} = R \operatorname{Tang} 2\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

unde

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Subtangens Hyp.} & = R \operatorname{Cot} 2\varphi, \\ \text{Tangens Hyp.} & = R \operatorname{Cosec} 2\varphi, \\ \text{Subnormalis Hyp.} & = R \operatorname{Tang} 2\varphi; \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

dum eaedem lineae pro Lemniscata sunt

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Subtangens Lemn.} & = r\,\text{Cot}\,2\varphi,\\ \text{Tangens Lemn.} & = r\,\text{Cosec}\,2\varphi,\\ \text{Subnormalis Lemn.} & = r\,\text{Tang}\,2\varphi.\end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (26)$$

Habemus igitur, quod ad Lemniscatam Bernouillanam et Hyperbolam Aequilateram correspondentes, in hoc systemate (b) sive (e)

Theorema XI. Cujusvis Lemniscatae puncti normalis Hyperbolae puncti correspondentis (id est eodem angulo polari gaudentis) radio vectore aequalis est.

Ex form. (2) enim sequitur valor normalis hujusce

$$= \frac{a^2}{r} = \frac{Rr}{r} = R.$$

Theorema XII. Alterius curvae Subnormalem inter et alterius Subtangentem rectangulus quadrato in semi-axin constructo aequalis est.

Ex form. (25) et (26) sequitur:

$$\text{Subn. Hyp.} \times \text{Subt. Lemn.} = \text{Subn. Lemn.} \times \text{Subt. Hyp.}$$
$$= R\,\text{Tang}\,2\varphi \,.\, r\,\text{Cot}\,2\varphi = Rr = a^2.$$

Theorema XIII. Alterius curvae Tangentem inter et alterius Subnormalem rectangulus quadrato in Hyperbolae radium vectorem constructo aequalis est.

Nam est ex form. (25) et (26)

$$\text{Tang. Hyp.} \times \text{Subn. Lemn.} = \text{Tang. Lemn.} \times \text{Subn. Hyp.}$$
$$= R\,\text{Cosec}\,2\varphi \times r\,\text{Tang}\,2\varphi = Rr\,\text{Sec}\,2\varphi = a^2\,\text{Sec}\,2\varphi = R^2.$$

17. *Theorema XIV.* Circuli, qui per Lemniscatae duos focos atque punctum quodvis (x_1, y_1) transit, radius tertia proportionalis est ad puncti illius ordinatam et semi-axis dimidium.

Circuli commemorati centri, quod in perpendiculo, e curvae centro in axin erecto, jacere debet, abscissa sit p; tunc aequatio circuli in systemate (a)

$$x^2 + (y-p)^2 = r^2 \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

pro alteri focorum et punctum curvae fit

$$x_1 + (y_1 - p)^2 = r^2, \; \tfrac{1}{2}a^2 + p^2 = r^2; \quad \ldots \quad (28)$$

quarum differentia dat

$$x_1{}^2 - \tfrac{1}{2}a^2 + y_1{}^2 - 2py_1 = 0,$$

unde

$$p = \frac{x_1^2 + y_1^2 - \frac{1}{2}a^2}{2y_1},$$

quo valore in aequationum (28) ultimam substituto, eruimus

$$r^2 = \tfrac{1}{2}a^2 + \frac{(x_1^2+y_1^2)^2 - a^2(x_1^2+y_1^2) + \frac{1}{4}a^2}{4y_1^2}$$

$$= \frac{2a^2y_1^2 + a^2(x_1^2 - y_1^2) - a^2(x_1^2+y_1^2) + \frac{1}{4}a^2}{4y_1^2} = \frac{\frac{1}{4}a^2}{4y_1^2},$$

et

$$r = \frac{a^2}{4y_1} = \frac{e^2}{2y_1} = \frac{(\frac{1}{2}a)^2}{y_1}. \quad \ldots \ldots \quad (92)$$

18. *Corollarium.* Hinc deducitur Lemniscatae constructio satis apta, puto:

Circulos describas, quorum centra in perpendiculo, e curvae centro in axin erecto, sita sint, per focos transientes; radium ad focum ducas, in quem ex curvae centro perpendiculum demittas, quod in illo radio inde a foco partem determinat $2y_1$ aequalem: cujus igitur dimidio in perpendiculo priori ab utraque nodi parte collocato, ex extremitatibus axi parallelas ducas, quarum cum circulo intersectiones Lemniscatae puncta dabunt.

19. *Theorema XV.* Involucrum (Enveloppe) circulorum, qui ex Hyperbolae Aequilaterae medio radio vectore, e centro curvae divergente, cum hocce dimidio radio vectore ducuntur, est Lemniscata Bernouillana.

Circuli memorati necesse per centrum curvae transeunt. In coordinatarum rectangularium systemate (a) habemus igitur aequationes circuli et Hyperbolae Aequilaterae pro puncto quovis (α, β)

$$x^2 + y^2 = 2(\tfrac{1}{2}\alpha x + \tfrac{1}{2}\beta y) = \alpha x + \beta y, \quad \ldots \quad (30)$$

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (31)$$

Differentiando hasce aequationes, quod ad variabilia parametra α et β, nobis est

$$0 = x\partial\alpha + y\partial\beta, \text{ et } 2\alpha\partial\alpha - 2\beta\partial\beta = 0;$$

unde

$$\beta x = -\alpha y; \quad \ldots \ldots \ldots \quad (32)$$

ergo ex aequatione (31)

$$\alpha = \frac{ax}{\sqrt{(x^2 - y^2)}}, \quad \beta = \frac{-ay}{\sqrt{(x^2 - y^2)}};$$

quibus in aequationem (30) substitutis, eruimus

$$x^2+y^2=\frac{ax^2}{\sqrt{(x^2-y^2)}}-\frac{ay^2}{\sqrt{(x^2-y^2)}}=a\sqrt{(x^2-y^2)},$$

vel

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \text{(a)}$$

aequationem Lemniscatae Bernouillanae.

20. *Corollarium* 1. Circulus memoratus, pro aliquo Hyperbolae radio vectore constructus, Lemniscatam tangit in puncto, cujus radius vector ab altera axis parte eundem cum eo efficit angulum, ac ille primus radius vector.

Est enim ex form. (32)

$$\frac{\alpha}{\beta}=-\frac{x}{y},$$

quae quotientes repraesentant tangentes goniometricas angulorum radios vectores illos inter et axin contentorum.

21. *Corollarium* 2. Sequitur exinde methodus normalem ducendi, nempe:

E medio cujusvis Lemniscatae puncti radio vectore in eum perpendiculum erigas, cujus cum linea, ab altera axis parte cum eo eundem angulum efficiente ac ille radius vector, intersectionem puncto jungas: normalem construxeris.

Quia Lemniscata Bernouillana locus geometricus est projectionis centri Hyperbolae Aequilaterae in tangentes (Fusspunktencurve), sequitur, si ex radii vectoris extremitate in eum perpendiculum erigamus, hujus cum linea memorata intersectionem punctum esse Hyperbolae Aequilaterae, lineàm igitur ipsam radium vectorem esse Hyperbolae. Idem deduci potest ex aequationibus (b) et (e), unde

$$r^2=a^2\,\mathrm{Cos}\,2\varphi=R^2\,\mathrm{Cos}\,2\varphi\,.\,\mathrm{Cos}\,2\varphi,$$

vel

$$r=R\,\mathrm{Cos}\,2\varphi.$$

Elucet ergo, medium hujusce radii vectoris determinari constructione in hoc Corollario praescripta. Quod denique linea, quae hoc punctum cum Lemniscatae puncto jungit, normalis sit, ex Theoremate XV. necessario sequitur, nam est radius respectivi circulorum memoratorum.

II.

Note sur une manière particulière de déterminer les équations des lignes courbes, en faisant usage de la décomposition et de la composition de vitesses, suivant les règles de la Dynamique.

Par

Monsieur G. J. Verdam,

Professeur de Mathématiques à la Faculté des Sciences de l'Université à Leide.

Dans la Dynamique, quand on est parvenu à déterminer les coordonnées d'un mobile en fonction du temps, on obtient les équations de la trajectoire décrite, en éliminant la variable t, par la quelle on dénote le temps, écoulé depuis le commencement du mouvement jusqu'à un instant quelconque. Si l'on n'a pas besoin de connaître les circonstances du mouvement, mais que l'on se propose seulement de trouver les équations de la trajectoire, ils n'est pas nécessaire de descendre aux valeurs des coordonées rectilignes ou angulaires, car on pourrait s'arrêter aux expressions des vitesses, décomposées dans les directions des coordonnées, puis éliminer l'élément ∂t du temps, et intégrer les équations, qui en resulteront. Dans ce cas même, il peut arriver souvent, que tous les termes, dans les expressions des vitesses, ont pour facteurs des quotients différentiels de même ordre et tous rélatifs à la même variable t, et alors le problème se simplifie encore, vu qu'une élimination proprement dite de ∂t ne devra pas être effectuée absolument. Ceci aura lieu toujours, si l'on peut distinguer et exprimer exactement les mouvements partiels, dont se compose le mouvement réel du mobile. Car, puisque les vitesses se composent et se décomposent comme des forces, si l'on décompose la vitesse de chaque mouvement partiel, en d'autres, suivant les directions des coordonnées, et que l'on fasse la somme des vi-

tesses, décomposées suivant chaque direction, on aura une somme ou des sommes de vitesses, c'est à dire une somme de termes, chacun multiplié par un coefficient différentiel rélatif à la variable t.

Quoique cette manière de déterminer les équations d'une trajectoire, appartient tout à fait à la mécanique, on en peut néanmoins faire usage dans la géométrie, puisque toute courbe peut être considerée comme la trajectoire d'un point, mu suivant une certaine loi, simple ou moins simple ou même très compliquée. Et bien que la marche ordinaire, en se servant seulement, ou autant qu'il peut, de considérations géométriques, est la plus courte dans nombre de cas; cependant il pourroit que l'emploi des considérations dynamiques mentionnées offrit des avantages réels, sous le rapport de la simplicité. Mais cette manière mérite l'attention sous un autre point de vue; c'est qu'elle offre, dans l'enseignement des élémens de la Dynamique, des exemples très instructifs pour apprendre à distinguer les mouvements partiels ou élémentaires, dont se compose un mouvement compliqué donné, à former les expressions analytiques de ces mouvements, ou même à parvenir aux équations déterminées d'un mouvement proposé.

Cette observation se présentait naturellement, en réfléchissant sur le problème, proposé par Mr. le Docteur Dienger, dans le tome IX. page 114. de ce journal, et mon but est d'éclaircir et de développer sommairement, dans cette note, ce que je viens de remarquer en général. Pour cela je me borne aussi à quelques exemples, traités sans détails, mais de manière que, par l'indication succincte de la voie à suivre, et en rapportant les resultats du calcul, ils pourront servir d'exercices. Enfin, comme j'ai fixé mon attention sur ce point spécial par la lecture de l'énoncé du problème cité, j'emprunte les exemples du même sujet, auquel ce problème se rapporte, et je me propose, en consequence, de montrer, comment, par les règles simples de la décomposition et de la composition des mouvements, on parvient à déterminer les équations de quelques courbes cycloïdales planes, quoique la même méthode est appliquable également, s'il s'agit de tout autre genre de courbes, planes ou non planes, dont la génération est assimilée au mouvement déterminé d'un point.

I.

Qu'il soit proposé, en premier lieu, de déterminer l'équation de la cycloïde. Soient AX, AY (Taf. I. Fig. 2) les axes des coordonnées rectangulaires x et y; AX la base de la cycloïde; A l'origine ou l'une des extrémités de la courbe; M le centre du cercle générateur dans une position quelconque, et P le lieu correspondant du point générateur. Soient encore r le rayon du cercle, B le point de contact avec la base, et φ l'arc de cercle, dont le rayon est l'unité, et mésurant l'angle PMB, décrit depuis l'origine du mouvement, on aura $AB = \text{arc}\, PB = r\varphi$.

Le point P a deux mouvements, car en même temps qu'il avance avec le cercle, roulant le long de AX, il suit la circonférence, en tournant autour du centre M. Le mouvement progressif est exactement égal à celui du centre M, et si, dans le temps ∂t, le rayon MB décrit l'arc élémentaire $\partial\varphi$, on pourra exprimer

la vitesse angulaire par $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$; par conséquant la vitesse du centre M, transporté parallèlement à la base AX, sera $=r.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, puisque, à cause de $AB=MD=\text{arc}\,PB$, le point M parcourt toujours un chemin, de longueur égale à celle de l'arc, qui aura été en contact avec la base AB. Ainsi le point P aura, en premier lieu, une vitesse, parallèle à l'axe x, $=r.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

En tournant avec le cercle, le point P, dans le temps ∂t, parcourt l'arc $r\partial\varphi$; la vitesse sera donc $r.\frac{\partial\varphi}{\partial t}$; et comme le mouvement, dans cet instant différentiel, doit être censé avoir lieu dans la direction de la tangente CPE, de P vers E, il faut la décomposer en deux autres, parallèlement aux axes coordonnées. Or l'angle PCX est mesuré par un arc $=180^\circ-\varphi$; donc les vitesses décomposées seront:

1° parallèlement à l'axe des x, $=-r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\varphi$;

2° parallèlement à l'axe des y, $=+r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\varphi$.

Ainsi, dénotant les vitesses totales du point P, parallèles aux axes des x et des y, par $\frac{\partial x}{\partial t}$ et par $\frac{\partial y}{\partial t}$, on aura finalement

$$\frac{\partial x}{\partial t}=r\frac{\partial\varphi}{\partial t}-r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial t}=r\frac{\partial\varphi}{\partial t}\sin\varphi.$$

D'abord on voit aisément que, pour traiter ces équations, il sera permis d'écrire:

$$\partial x=r\partial\varphi-r\partial\varphi\cos\varphi,$$
$$\partial y=r\partial\varphi\sin\varphi;$$

et comme les mêmes formes d'équations se présenteront dans tous les autres exemples, dont le traitement fait le sujet de cette note, je laisserai, pour brièveté, d'écrire dans la suite le numerateur ∂t dans les expressions des vitesses. Des équations précédentes les intégrales seront

$$x=r\varphi-r\sin\varphi+c,$$
$$y=-r\cos\varphi+c'.$$

A l'origine du mouvement on a $x=0$, $y=0$, $\varphi=0$; par conséquent $c=0$, $c'=r$, et par suite

$$\left.\begin{array}{l} x = r\varphi - r\sin\varphi \\ y = r - r\cos\varphi \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

et c'est le système connu d'équations, qui donnent l'équation de la cycloïde par l'élimination de φ.

Si, en conservant ce système d'équations, on veut introduire le temps, on supposera le mouvement de rotation du cercle générateur uniforme, et en nommant la vitesse angulaire ω, il est clair, qu'on aura $\varphi = \omega . t$; donc

$$\left.\begin{array}{l} x = r\omega t - r\sin\omega t \\ y = r - r\cos\omega t. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

On pourra aussi remplacer ω par $\frac{a}{r}$, quand on signifie par a la vitesse du mouvement progressif uniforme du centre M.

De la même manière on trouve les équations de la cycloïde allongée et de la cycloïde raccourcie. Alors le point générateur se trouve sur le rayon ou sur le prolongement d'un rayon du cercle générateur. Soit la distance de ce point au centre $= a$; son mouvement progressif aura pour mesure, comme précédemment, $r\partial\varphi$; mais autour du centre le chemin parcourru, et par conséquent la vitesse à décomposer, sera à présent $a\partial\varphi$; de sorte qu'on parvient aux équations différentielles

$$\partial x = r\partial\varphi - a\partial\varphi\cos\varphi,$$
$$\partial y = a\partial\varphi\sin\varphi;$$

et, en observant qu'au commencement du mouvement, on a $x = 0$, $y = -(a - r)$, a pouvant être $> r$ ou $< r$, et $\varphi = 0$, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{l} x = r\varphi - a\sin\varphi, \\ y = r - a\cos\varphi. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Ordinairement on prend pour axe des x la base de la cycloïde allongée ou raccourcie, c'est à dire la tangente, passant par les points les plus bas. Donc il faudra employer une nouvelle ordonnée y', liée avec la primitive par la rélation $y' = y + a - r$, et le système d'équations (3) se transformera en celui ci

$$\left.\begin{array}{l} x = r\varphi - a\sin\varphi, \\ y' = a - a\cos\varphi; \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

duquel se deduisent, par l'élimination de φ, et suivant que a est $> r$ où $< r$, les équations ordinaires des cycloides raccourcies ou allongées.

Dans le traitement de cet exemple simple je suis entré dans quelques détails, afin d'éclaircir complètement mes idées, exprimées d'une manière générale à la tête de cette note, et afin de ne laisser aucun doute sur les points essentiels de la méthode en question; mais par l'uniformité de la marche je pourrai me dispenser, de donner des développemens aussi amples dans les exemples suivants.

II.

Pour l'épicycloïde (Tab. I. Fig. 3.) si la base circulaire a un rayon $OB=a$, le cercle générateur un rayon $BC=b$, que le mouvement est commencé en A, et que l'arc, mesurant l'angle AOB, est de retour φ, l'arc AB sera $= a\varphi$, et prenant l'arc $BP=AB$, P sera le lieu correspondant du point, qui decrit la courbe. Donc, puisque $BP=a\varphi$, l'arc, mesurant l'angle BCP équivaudra $\frac{a}{b}\varphi$. En même temps que le point B aura parcouru l'arc AB, le point C sera porté par un arc ou chemin $=(a+b)\varphi$. Dans l'élément ∂t du temps ce chemin devra être représenté par $(a+b)\,\partial\varphi$, et la direction de ce mouvement élémentaire sera parallèle à la tangente BD. Donc, parceque ce mouvement de C a lieu indépendamment de la rotation, soit du roulement, du cercle CB, le point P participera à ce mouvement translatif le long de la tangente, et bien égalément, comme cela a lieu pour le mouvement progressif dans le cas de la cycloïde. Par conséquent il faut décomposer ce mouvement en deux autres, parallèles aux axes OX, OY, et comme l'angle BDO entre l'axe OX et la tangente BD a pour mesure un arc $\frac{1}{2}\pi-\varphi$, et que la vitesse décomposée parallèlement à OX appartient à un mouvement de X vers O, dans le sens négatif, les mouvements décomposés seront:

1°. parallèlement à l'axe $OX = -(a+b)\,\partial\varphi.\sin\varphi$,

2°. parallèlement à l'axe $OY = +(a+b)\,\partial\varphi.\cos\varphi$.

A ces mouvements il faut joindre à présent ceux, qui résulteront de la décomposition du mouvement de rotation du cercle CB. Or, en menant CE parallèle à OX, il est évident que, si le cercle CB n'aurait pas roulé le long du cercle OB, mais qu'on l'aurait poussé, parallèlement à lui même, le long de AB, le rayon, qui était, au commencement du mouvement, dirigé suivant XO, aurait après le temps t, c'est à dire à l'instant ou l'on considère la position du point P, la direction CE, parallèle à OX. Par conséquent, comme le cercle roule, et que le point, qui, à l'origine du mouvement, se trouvait en A, se trouve actuellement en P et non en E, ou il aurait été sans le roulement du cercle générateur, le point E sera mu par un angle $ECB+BCP$, ayant pour mesure un arc $\varphi+\frac{a}{b}\varphi=\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi$. Ainsi la longueur totale de l'arc EBP étant $=b.\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi$, le mouvement différentiel de P suivant la circonférence du cercle générateur, ou plutôt suivant la direction de la tangente FPG, sera exprimé par $b\left(\frac{a+b}{b}\right)\partial\varphi$. Donc, puisqu'on voit aisément que l'angle, entre OX et la tangente GF, a pour mesure $\frac{a+b}{b}\varphi-\frac{1}{2}\pi$, les mouvements décomposées deviendront:

1°. parallèlement à l'axe $OX = + \frac{a+b}{b} . b\partial\varphi . \sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi$,

2°. parallèlement à l'axe $OY = - \frac{a+b}{b} . b\partial\varphi . \cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi$.

Prenant enfin la somme des vitesses ou des mouvements de même direction, intégrant, et observant, qu'à l'origine du mouvement on a $x=a$, $y=0$, il en résultera:

$$\left.\begin{array}{l} x=(a+b)\cos\varphi - b.\cos\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi \\ y=(a+b)\sin\varphi - b.\sin\left(\frac{a+b}{b}\right)\varphi \end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

et ces valeurs de x et y font ensemble le système connu d'équations, dans lequel est comprise l'équation des épicycloïdes ordinaires. Et il suffira de remarquer, que les équations des hypocycloïdes, de même que celles des épicycloïdes et hypocloïdes allongées et raccourcies, soient obtenues par des raisonnements analogues.

III.

Les courbes, que l'on nomme épicycloïdes et hypocycloïdes, ne sont que des espèces d'un genre de courbes, décrites par un point P (Tab. I. Fig. 4.) d'un cercle CD tournant uniformément autour de son centre, pendant que ce centre circule uniformément dans la circonférence AC du cercle MA. En effet, si le cercle générateur est mu dans la direction de A vers C, on peut distinguer deux cas, suivant que la rotation de ce cercle a lieu dans le même sens, indiqué par la flèche α, ou dans le sens opposé, qu'indique la flèche β. Dans le premier cas on aura seulement une épicycloïde, si la vitesse du point P est telle, que la longueur de l'arc DP est exactement et constamment égale à l'arc DB du cercle intérieur, qui touche le cercle générateur dans toutes ses positions. Dans le second cas, et en faisant alors attention au cercle extérieur, qui touche le cercle générateur dans toutes ses positions, il n'y aura de même qu'un seul rapport des vitesses de P et de C, pour lequel la courbe engendrée sera une hypocycloïde, et si ce rapport est l'unité, la trajectoire sera un cercle d'un rayon égal au rayon AM de l'orbite AC, parcequ'alors, autant le cercle AB tourne en vertu du mouvement circulaire de son centre A, autant il est tourné en sens contraire, en vertu de son mouvement de rotation opposé.

A présent pour déterminer l'équation de la courbe, dont l'épicycloïde quelconque n'est qu'une espèce particulière, il faut supposer que le cercle AB tourne dans le sens de la flèche α, en suivant son orbite AC, et assigner ensuite la quantité des deux vitesses, communiquées au point P par ce double mouvement. Soient $AM=a$, $AB=CD=b$, le rapport des vitesses angulai-

res de C et de $P = p:q$, et φ l'arc, mesure de l'angle AMC; ainsi pendant que le centre A passe de A en C, le point B décrit un arc $= DP$, de sorte que $AMC : DCP = p:q$, et $DCP = \frac{q}{p} . AMC$. Le mouvement différentiel du centre C dans l'orbite AC étant $a\partial\varphi$, le point P participera à ce mouvement, et la direction de ce mouvement sera parallèle à celle de la tangente, passant par le point C. Les mouvements décomposés, parallèlement aux axes des x et des y, seront donc

$$-a\partial\varphi . \sin\varphi \text{ et } a\partial\varphi . \cos\varphi.$$

Pendant que le cercle générateur passe de A en C, le point B parviendra en P et aura un mouvement angulaire total $= \varphi + \frac{q}{p}\varphi$. Par conséquent le mouvement élémentaire, dans la direction de la tangente du point P sera $b\left(\frac{p+q}{p}\right)\partial\varphi$. Cette tangente fera avec l'axe des x un angle, mesuré par un arc $= \frac{3}{2}\pi - \left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi$, et les décomposées de ce second mouvement seront

$$+b\left(\frac{p+q}{p}\right)\partial\varphi . \sin\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi \text{ et } -b\left(\frac{p+q}{p}\right)\partial\varphi . \cos\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi.$$

On aura donc

$$\partial x = -a\partial\varphi . \sin\varphi + b\left(\frac{p+q}{p}\right)\partial\varphi . \sin\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi,$$

$$\partial y = +a\partial\varphi . \cos\varphi - b\left(\frac{p+q}{p}\right)\partial\varphi . \cos\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi.$$

Au commencement du mouvement $x = a - b$, $y = 0$, et, en tenant compte de cette condition, on trouve le système, comprenant l'équation de la courbe:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - b\cos\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi \\ y &= a\sin\varphi - b\sin\left(\frac{p+q}{p}\right)\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Si $q = 0$, la vitesse angulaire du cercle générateur est précisement égale à la vitesse du centre dans l'orbite AC; le point B décrit le cercle MB, et se trouve constamment sur le rayon des deux centres M et C. On peut comparer à ce mouvement celui d'un point de la surface de la lune, tournant autour de l'axe lunaire dans le même temps, que la lune fait une révolution autour de la terre. Et dans le cas général, si p et q ont un rapport, approchant celui des mouvements moyens de la terre et de la lune, la courbe décrite sera une représentation approchée de la courbe que décrit, dans l'espace, le centre de la lune pendant une révolution de la terre autour du soleil.

Si le cercle AB ne tourne pas dans le même sens que son centre A autour de M, mais en sens opposé, on parviendra, par une marche analogue, au système d'équations de la courbe:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\varphi - b\cos\left(\frac{q-p}{p}\right)\varphi \\ y &= a\sin\varphi - b\sin\left(\frac{q-p}{p}\right)\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

IV.

On pourrait traiter les problèmes précédents sous un point de vue plus général, en considérant mobiles la droite et les cercles, qu'on a supposé fixes, de manière qu'ils touchent constamment une courbe donnée, et il n'est pas difficile d'assigner la route à suivre dans la solution. Mais je me borne de retour à un cas special, dans lequel tombe celui du problème de Mr. Dienger, cité plus haut.

Qu'on se propose donc de trouver les équations de la courbe épicycloïdale plane, décrite par un point de la circonférence d'un cercle, roulant uniformement autour d'un autre cercle, qui lui même roule uniformement le long d'une droite. Soit AU (Tab. I. Fig. 5.) cette droite, MB le cercle, de rayon R, qui roule le long de cette droite, et NA un cercle, de rayon r, qui roule en même temps autour du prémier cercle, et dont un point de la circonférence décrira la trajectoire epicycloïdale demandée.

Que l'on suppose, pour plus de simplicité, la position du cercle générateur AN, au commencement du mouvement, telle, qu'il soit touché par la base rectiligne AU du cercle MB, et que le point générateur coincide alors avec le point de contact A. Si DE est la tangente au point de contact D des deux cercles, on aura $AE = DE = BE$, et puisque $DE = \sqrt{Rr}$, AB sera $= 2\sqrt{Rr}$. De plus, nommant α l'angle NMB, on a dans le triangle rectangle NMC, NC étant parallèle à AB,

$$NC = 2\sqrt{Rr} = (R+r)\sin\alpha,\ \ MC = R - r = (R+r)\cos\alpha.$$

On cònservera la notation α de l'angle NMB, et on ne fera usage des valeurs de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$, tirées de ces deux égalités, que pour les substituer dans l'équation finale.

Si le cercle MB est arrivé dans la position OF, le point de contact B se trouvera en I de sorte que la longueur de l'arc FI égale le chemin BF parcouru, et prenant l'arc $ID' = BD$, le cercle touchant $N'D'$, ayant un rayon r, serait la position du cercle générateur, s'il n'avait pas de mouvement propre autour du cercle OD', de même que, l'arc $D'A'$ étant égal à l'arc DA, A' serait le lieu correspondant du point générateur. Donc, si le mouvement angulaire FOI du cercle MB est φ ou ωt (ω étant la vitesse angulaire et t le temps), on aura:

l'angle $D'OF = \varphi + \alpha$, l'arc $FID' = R(\varphi + \alpha)$;
l'angle $A'N'D' = 180^\circ - \alpha$, l'arc $A'D' = r(\pi - \alpha)$.

Mais le cercle ND ayant un mouvement propre autour de DM, il aura une position, différente de $A'N'$, quand le cercle M sera parvenu en O; que, par exemple, ND soit parvenu en QH et le point générateur A en P; alors si les mouvements angulaires uniformes des deux cercles MB et NA sont entre eux comme p et q on voit facilement, que l'arc $D'H$, parcouru par les points du cercle $D'N'$, sera égal à $r.\frac{q}{p}.\varphi$, et l'angle $D'OH'$ aura pour mesure un arc $= \frac{r}{R}.\frac{q}{p}.\varphi$, appartenant à un cercle, dont le rayon vaut l'unité; donc aussi l'angle FOH aura pour mesure un arc

$$= 2\pi - \varphi - \alpha - \frac{r}{R}.\frac{q}{p}.\varphi$$
$$= 2\pi - \alpha - \left(\frac{pR + qr}{pR}\right)\varphi.$$

De même l'arc HSP étant $= HS + SP = H'D' + D'A' = r.\frac{q}{p}.\varphi + r(\pi - \alpha)$; l'angle HQP aura pour mesure un arc

$$= 2\pi - \frac{q}{p}\varphi - (\pi - \alpha)$$
$$= \pi + \alpha - \frac{q}{p}\varphi.$$

Enfin, QR étant perpendiculaire à la base AU, l'angle $PQR = PQH - RQH = PQH - (180^\circ - FOH)$, et on trouvera que cet angle a pour mesure un arc

$$= 2\pi - \left\{\frac{(p+q)R + qr}{pR}\right\}\varphi;$$

et ce sera aussi la mesure de l'angle PVU, entre l'axe des abscisses AU et la tangente PV au point P, parceque les côtés PV, VU de l'angle PVU sont perpendiculaires aux côtés PQ et RQ de l'angle PQR.

Par la détermination des valeurs de tous ces angles, il serait très aisé de parvenir presque immediatement à l'équation de la trajectoire, en ne faisant usage que de considérations géométriques, car AT et PT étant les coordonnées du point P, on tirera facilement les valeurs de ces coordonnées des valeurs des parties AB, BF etc., dont elles se composent; mais je passerai ce calcul, pour montrer comment on parvient au résultat, en ne faisant attention qu'aux mouvements divers, qu'on peut attribuer au point P.

1°. D'abord le point P a un mouvement rectiligne, parallèle à l'axe des x, d'égale étendue que celui du centre O, et la différentielle de ce mouvement s'exprime par

$$R\partial\varphi.$$

2°. En second lieu, si le cercle Q ne roulait pas autour du cercle O, mais qu'il fut fixé à ce cercle O, le point P tournerait avec le cercle O. Son mouvement élémentaire serait la différentielle d'un arc de cercle, ayant le rayon OP, et la direction de ce mouvement serait la droite PU, perpendiculaire à OP. Ainsi le mouvement élémentaire $OP.\partial\varphi$, dirigé suivant PU, doit être décomposé parallèlement aux axes des x et des y, et on aura pour les mouvements décomposés:

$$+OP.\partial\varphi.\cos PUF, \text{ et } -OP.\partial\varphi.\sin PUF.$$

Mais PUF est supplément de POF, c'est à dire $=GOP$, et comme $OP.\cos GOP=OG$, $OP.\sin GOP=PG=FT$, les mouvements décomposés seront exprimés par

$$+OG.\partial\varphi \text{ et } -GP.\partial\varphi.$$

Maintenant OG et GP se tirent facilement des triangles rectangles de la figure, au moyen des angles, dont les valeurs sont déterminées précédemment, et les calculs donneront pour valeurs analytiques des mouvements parallèles

$$\text{à l'axe des } x\ldots\ldots=-(R+r)\,\partial\varphi.\cos\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\}$$
$$-r\partial\varphi.\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi,$$

$$\text{et à l'axe des } y\ldots\ldots=+(R+r)\,\partial\varphi.\sin\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\}$$
$$+r\partial\varphi.\sin\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi.$$

3°. Troisièmement il faut considérer le mouvement du point P, occasionné par le déplacement du cercle QH le long de la circonférence du cercle OH, et sans que l'on fasse attention au mouvement de rotation de ce cercle QH autour de son centre. Ce déplacement élémentaire est égal à celui du centre Q, et il a lieu dans une direction, parallèle à la tangente commune HK des deux cercles. Or il a été remarqué plus haut, que le cercle générateur parcourt l'arc $D'H$ correspondant au mouvement angulaire φ du cercle OF, et que pour le rayon *un* cet arc serait $=\frac{r}{R}.\frac{q}{p}.\varphi$; donc l'arc, décrit en même temps par le centre Q serait $OQ.\frac{rq}{pR}.\varphi$, et l'arc élémentaire, c'est à dire la petite ligne, parcourue par le centre Q, et de même par le point P, parallèlement à la tangente HK, aura pour expression

$$(R+r)\frac{qr}{pR}\partial\varphi.$$

C'est donc ce mouvement du point P qu'il faut décomposer, et puisque l'angle HKF entre l'axe des x et la tangente HK est supplément de l'angle FOH, dont la mesure a été assignée plus haut, on obtiendra pour valeurs des mouvements décomposés:

parallèle à l'axe des x.....

$$=-(R+r)\frac{qr}{pR}\partial\varphi.\cos\{\alpha+\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi\},$$

et parallèle à l'axe des y....

$$=+(R+r)\frac{qr}{pR}\partial\varphi.\sin\{\alpha+\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi\}.$$

4°. Enfin le point P a encore un quatrième mouvement dans la direction de la tangente PV, et dû à la rotation du cercle Q autour de son centre. Le cercle N' étant transporté de N' en Q, aura par cela un mouvement angulaire $=\frac{qr}{pR}\varphi$, et le mouvement angulaire, occasionné par la rotation proprement dite, équivaut à $\frac{q}{p}\varphi$; par conséquent le mouvement angulaire total sera

$$\frac{qr}{pR}+\frac{q}{p}\varphi=\frac{q(R+r)}{pR}\varphi.$$

Par suite, le mouvement angulaire élémentaire d'un point P du cercle Q, qui a le rayon r, aura pour valeur dans la direction de la tangente PV:

$$r.\frac{q(R+r)}{pR}\partial\varphi.$$

C'est le mouvement à décomposer dans les directions, parallèles aux axes des x et y, et vu que la valeur de la mesure de l'angle PVU, entre x et la direction PV, a été donnée précédemment, cette décomposition se fera sans difficulté, et on obtiendra pour valeur de l'étendue du mouvement élémentaire:

parallèle à l'axe des x...$=-r\frac{q(R+r)}{pR}\partial\varphi.\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr)}{pR}\right\}\varphi,$

et parallèle à l'axe des y...$=+r\frac{q(R+r)}{pR}\partial\varphi.\sin\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi.$

Faisant à présent la somme de tous ces mouvements partiels élémentaires, on aura pour les mouvements totaux:

$$\partial x = R\partial\varphi - (R+r)\,\partial\varphi\,.\cos\left\{\alpha + \frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\} - r\partial\varphi.\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}$$

$$-(R+r)\frac{qr}{pR}\partial\varphi\,.\cos\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\}$$

$$-r\frac{q(R+r)}{pR}\partial\varphi.\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi$$

$$= R\partial\varphi - (R+r)\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\partial\varphi\,.\cos\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\}$$

$$-r\left(\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right)\partial\varphi\,.\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi,$$

$$\partial y = (R+r)\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\partial\varphi\,.\sin\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\}$$

$$+r\left(\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right)\partial\varphi.\sin\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi.$$

Et, intégrant,

$$x = C + R\varphi - (R+r)\sin\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\} - r\sin\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}$$

$$y = C' - (R+r)\cos\left\{\alpha+\frac{(pR+qr)}{pR}\varphi\right\} - r\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr}{pR}\right\}\varphi$$

φ étant zéro, on aura en même temps $x=0$ et $y=0$; d' $C=(R+r)\sin\alpha=2\sqrt{Rr}$, et $C'=R$. Substituant ces valeurs d constantes, dévéloppant les sinus et cosinus ou α entre, mettant à la place de $\sin\alpha$ et $\cos\alpha$ les valeurs, dont il a question au commencement de la solution du présent problèı on trouvera finalement le système d'équations de la trajectoire mandée:

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sqrt{Rr} + R\varphi - 2(\sqrt{Rr})\cos\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi \\ &\quad -(R-r)\sin\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi - r\sin\left\{\frac{(p+q)R+qr)}{pR}\right\}\varphi, \\ y &= R - (R-r)\cos\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi \\ &\quad +2(\sqrt{Rr})\sin\left(\frac{pR+qr}{pR}\right)\varphi - r\cos\left\{\frac{(p+q)R+qr)}{pR}\right\}\varphi. \end{aligned}\right\}\ldots$$

D'après les rélations particulières il pourra devenir possible parvenir à une équation unique entre x et y par l'élimination φ, mais dans les cas les plus simples cette élimination prése des difficultés essentielles, ce dont on pourra se persuader, posant, par exemple, $R=r$ et $p=q$. Cette difficulté tient pı cipalement à la présence du terme $R\varphi$ dans la valeur de x; c' aussi à cause de ce terme, que l'équation de la courbe ne s jamais algébrique, mais toujours transcendante, comme celle

la cycloïde. Si l'on ôtait ce terme de la valeur de x, le système des équations (8) se rapporterait à la courbe, engendrée par le point A dans la supposition que le centre M du cercle MB serait fixe; alors ce cercle aurait seulement un mouvement de rotation sans mouvement de translation le long de la droite AU. Et il n'est pas difficile d'entrevoir, quelle réduction dans les termes du même système devrait avoir lieu, pour que la trajectoire fût celle dans le cas d'un cercle MB, poussé uniformement sans rotation le long de la droite AU.

Du reste, je m'abstiens de plusieurs autres remarques spéciales, auxquelles la considération des équations du système (8) peut donner lieu. Ce qui precède suffit aussi pour montrer, comment il faudrait procéder dans des cas moins simples, par exemple, si le mouvement du cercle MB devrait avoir lieu le long d'une base circulaire, et même s'il ne s'agirait pas d'une courbe plane, mais d'une courbe gauche ou non plane, telle qu'une courbe sphérique. Enfin, on pourrait étendre ces récherches, soit à l'hypothèse d'autres courbes données que des cercles, soit à celle d'un mouvement variable; dans cette seconde hypothèse on serait conduit aux mêmes résultats, s'il s'agit d'un seul cercle mobile, tandis que la base rectiligne ou circulaire est fixe, mais dans la supposition contraire, et même dans celle du problème III., le problème se compliquerait.

III.

Ueber die Brennlinie der geraden Linie.

Von

dem Herausgeber.

Die gegebene gerade Linie, deren Brennlinie gesucht wird, wollen wir als die Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy, und den Einfallspunkt als den Anfang dieses Coordinatensystems annehmen. Den einfallenden und den abgelenkten Strahl denken wir uns als zwei von dem Einfallspunkte oder dem Anfange der xy ausgehende gerade Linien, und bezeichnen unter dieser Voraussetzung die von diesen beiden Strahlen mit dem positiven Theile der Axe der x eingeschlossenen Winkel, indem wir diese Winkel von dem positiven Theile der Axe der x an nach der Seite der positiven y hin oder durch

den rechten Winkel (xy) hindurch von 0 bis 360° zählen, respective durch φ und φ_1. Der Einfachheit wegen wollen wir jedoch, was der nothwendigen Allgemeinheit der folgenden Betrachtungen durchaus keinen Eintrag thun wird, immer annehmen, dass der einfallende Strahl auf der positiven Seite der Axe der x oder der gegebenen geraden Linie liege, und folglich stets

$$0 < \varphi < 180^0$$

sei. Der reciproke Ablenkungsexponent soll im Folgenden durch μ bezeichnet werden.

Wenn nun zuerst $0 < \varphi < 90^0$ ist, so erhellet aus Taf. I. Fig. 6. leicht, dass im Falle der Zurückwerfung

$$\sin(\varphi_1 - 90^0) = \mu \sin(90^0 - \varphi),$$

also

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi,$$

und

$$0 < \varphi_1 < 180^0$$

ist. Im Falle der Brechung ist dagegen, wie aus Taf. I. Fig. 7. leicht erhellet,

$$\sin(270^0 - \varphi_1) = \mu \sin(90^0 - \varphi),$$

also

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi,$$

und

$$180^0 < \varphi_1 < 360^0.$$

Wenn ferner $90^0 < \varphi < 180^0$ ist, so erhellet aus Taf. I. Fig. 8. leicht, dass im Falle der Zurückwerfung

$$\sin(90^0 - \varphi_1) = \mu \sin(\varphi - 90^0),$$

also

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi,$$

und

$$0 < \varphi_1 < 180^0$$

ist. Im Falle der Brechung ist dagegen, wie aus Taf. I. Fig. 9 leicht erhellet,

$$\sin(\varphi_1 - 270^0) = \mu \sin(\varphi - 90^0),$$

also

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi,$$

und

$$180^0 < \varphi_1 < 360^0.$$

Fasst man das Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich, dass in völliger Allgemeinheit

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi$$

ist; φ_1 aber im Falle der Zurückwerfung stets zwischen 0 und 180°, im Falle der Brechung stets zwischen 180° und 360° genommen werden muss.

Jetzt wollen wir wieder die gegebene gerade Linie als die Axe der x eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy, den Anfang dieses Coordinatensystems aber in der gegebenen geraden Linie ganz beliebig annehmen. Den einfallenden Strahl denken wir uns nun als von einem auf der positiven Seite der Axe der x oder der gegebenen geraden Linie liegenden strahlenden Punkte (pq), dessen Coordinaten in dem Systeme der xy also p, q sind, ausgehend, und bezeichnen unter dieser Voraussetzung den von demselben mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Punkt (pq) gelegten, dem Systeme der xy Parallelen Coordinatensystems eingeschlossenen, von dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems an durch den entsprechenden Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ. Den abgelenkten Strahl denken wir uns wie vorher als von dem Einfallspunkte ausgehend, und bezeichnen unter dieser Voraussetzung den von demselben mit dem positiven Theile der ersten Axe eines durch den Einfallspunkt gelegten, dem Systeme der xy parallelen Coordinatensystems eingeschlossenen, von dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems an durch den entsprechenden Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° gezählten Winkel durch φ_1. Dann muss man, wie aus Taf. I. Fig. 10. leicht erhellet, für φ, φ_1 in der vorher gefundenen Gleichung

$$\cos\varphi_1 = -\mu\cos\varphi$$

respective $\varphi - 180°$, φ_1 setzen, wodurch dieselbe nun die Gestalt

$$1) \quad \cos\varphi_1 = \mu\cos\varphi$$

erhält. Der Winkel φ liegt jetzt immer zwischen 180° und 360°, und der Winkel φ_1 ist wie vorher im Falle der Zurückwerfung stets zwischen 0 und 180°, im Falle der Brechung dagegen stets zwischen 180° und 360° zu nehmen, was man im Folgenden jederzeit wohl vor Augen zu behalten hat.

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der einfallende Strahl liegt, sei

$$y = Ax + B,$$

so ist, weil diese gerade Linie durch den Punkt (pq) geht,

$$q = Ap + B,$$

also

$$y - q = A(x - p).$$

Nach den bekannten Principien der analytischen Geometrie, wobei man nur die aus dem Vorhergehenden bekannte Bedeutung von φ festzuhalten hat, ist aber allgemein

$$A = \tan(\varphi - 180^0) = \tan\varphi,$$

und die Gleichung der geraden Linie, in welcher der einfallende Strahl liegt, ist folglich

$$2)\quad y - q = (x - p)\tan\varphi.$$

Bezeichnen wir nun die Coordinaten des Einfallspunkts durch p_1, q_1; so ist

$$-q = (p_1 - p)\tan\varphi,\ q_1 = 0;$$

also

$$3)\quad p_1 = p - q\cot\varphi,\quad q_1 = 0.$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt, sei

$$y = A_1 x + B_1,$$

so ist, weil diese gerade Linie durch den Punkt $(p_1 q_1)$ geht,

$$0 = A_1 p_1 + B_1,$$

also

$$y = A_1(x - p_1).$$

Nach den Principien der analytischen Geometrie ist aber im Falle der Zurückwerfung

$$A_1 = \tan\varphi_1,$$

und im Falle der Brechung

$$A_1 = \tan(\varphi_1 - 180^0) = \tan\varphi_1,$$

so dass also allgemein

$$A_1 = \tan\varphi_1,$$

und folglich

$$4)\quad y = (x - p_1)\tan\varphi_1,$$

oder nach 3)

$$5)\quad y = (x - p + q\cot\varphi)\tan\varphi_1$$

die allgemeine Gleichung der geraden Linie ist, in welcher der abgelenkte Strahl liegt. Bekanntlich liegt φ_1 im Falle der Zurückwerfung zwischen 0 und 180^0, im Falle der Brechung zwischen 180^0 und 360^0.

Weil nun nach 1) allgemein

$$\cos\varphi_1 = \mu\cos\varphi$$

ist, so ist

$$\sin\varphi_1{}^2 = 1 - \mu^2\cos\varphi^2,$$

und folglich

$$6)\quad \sin\varphi_1 = \pm\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2},$$

wo man im Falle der Zurückwerfung das obere, im Falle der Brechung das untere Zeichen zu nehmen hat. Also ist unter derselben Bedingung

$$7)\quad \tang\varphi_1 = \pm\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\mu\cos\varphi},$$

und folglich nach 5)

$$8)\quad y = \pm\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\mu\cos\varphi}(x-p+q\cot\varphi)$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt. Nimmt man aber μ, welches bisher stets positiv war, von jetzt an im Falle der Zurückwerfung positiv, im Falle der Brechung negativ, so ist in völliger Allgemeinheit

$$9)\quad y = \frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\mu\cos\varphi}(x-p+q\cot\varphi)$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt.

Für den veränderten Werth φ' von φ ist

$$10)\quad y = \frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi'^2}}{\mu\cos\varphi'}(x-p+q\cot\varphi')$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt, wobei natürlich p, q constant angenommen werden.

Bezeichnen wir nun durch x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden durch die Gleichungen 9) und 10) charakterisirten geraden Linien, so müssen x, y aus diesen beiden Gleichungen durch gewöhnliche algebraische Elimination bestimmt werden. Setzen wir aber der Kürze wegen

$$11)\quad \begin{cases} F(\varphi) = \dfrac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\sin\varphi}, \\[2ex] f(\varphi) = \dfrac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\cos\varphi}; \end{cases}$$

so erhalten wir auf diesem Wege ohne Schwierigkeit:

$$12)\quad \begin{cases} x-p=-\dfrac{F(\varphi')-F(\varphi)}{f(\varphi')-f(\varphi)}q, \\ y=\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{F(\varphi)f(\varphi')-f(\varphi)F(\varphi')}{f(\varphi')-f(\varphi)}q. \end{cases}$$

Setzen wir $\varphi'=\varphi+\Delta\varphi$, so ist

$$F(\varphi')=F(\varphi)+\Delta F(\varphi),\quad f(\varphi')=f(\varphi)+\Delta f(\varphi)$$

und folglich, wie man leicht findet:

$$x-p=-\frac{\Delta F(\varphi)}{\Delta f(\varphi)}q,\quad y=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{F(\varphi)\Delta f(\varphi)-f(\varphi)\Delta F(\varphi)}{\Delta f(\varphi)}q$$

oder

$$13)\quad \begin{cases} x-p=-\dfrac{\dfrac{\Delta F(\varphi)}{\Delta\varphi}}{\dfrac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi}}q, \\ y=\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{F(\varphi)\dfrac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi}-f(\varphi)\dfrac{\Delta F(\varphi)}{\Delta\varphi}}{\dfrac{\Delta f(\varphi)}{\Delta\varphi}}q. \end{cases}$$

Da nun die Coordinaten der Punkte der Brennlinie offenbar die Gränzen sind, denen die vorhergehenden Coordinaten x, y sich nähern, wenn man $\Delta\varphi$ sich der Null nähern lässt, so erhalten wir aus den beiden vorhergehenden Gleichungen, wenn wir diese Gränzen der Kürze wegen durch x, y selbst bezeichnen, für die Coordinaten der Punkte der Brennlinie unmittelbar die folgenden Ausdrücke:

$$14)\quad \begin{cases} x-p=-\dfrac{\dfrac{\partial F(\varphi)}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}}q, \\ y=\dfrac{1}{\mu}\cdot\dfrac{F(\varphi)\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}-f(\varphi)\dfrac{\partial F(\varphi)}{\partial\varphi}}{\dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}}q \end{cases}$$

Durch Differentiation findet man aber leicht nach 11):

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F(\varphi)}{\partial\varphi}=-\dfrac{(1-\mu^2)\cos\varphi}{\sin\varphi^2\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}, \\ \dfrac{\partial f(\varphi)}{\partial\varphi}=\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}; \end{cases}$$

folglich nach 14), wie man nach einigen Reductionen leicht findet:

$$16)\quad \begin{cases} x-p=(1-\mu^2)\cot\varphi^3.q, \\ y=\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\sin\varphi}\right)^3.\frac{q}{\mu}; \end{cases}$$

welches also die Gleichungen der Brennlinie der gegebenen als Axe der x angenommenen geraden Linie sind.

Für die gewöhnliche Zurückwerfung ist bekanntlich $\mu=1$, und folglich, wenn man nur berücksichtigt, dass nach dem Obigen φ immer zwischen 180° und 360° liegt, also $\sin\varphi$ stets negativ ist:

$$x=p,\ y=-q;$$

woraus sich ergiebt, dass in diesem Falle die Brennlinie der gegebenen geraden Linie sich auf den durch die Coordinaten p, $-q$ bestimmten Punkt reducirt, was bekanntlich ganz den Lehren der elementaren Katoptrik entspricht.

Um die Gleichung der Brennlinie der gegebenen als Axe der x angenommenen geraden Linie zwischen x und y zu finden, muss man aus den beiden Gleichungen 16) den Winkel φ eliminiren.

Zu dem Ende erhalten wir zuvörderst aus der zweiten der beiden Gleichungen 16):

$$\frac{\mu y}{q}=\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\sin\varphi}\right)^3,\ \frac{\mu^2 y^2}{q^2}=\left(\frac{1-\mu^2\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}\right)^3;$$

also

$$\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{q^2}}=\frac{1-\mu^2\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}=\operatorname{cosec}\varphi^2-\mu^2\cot\varphi^2,$$

d. i.

$$\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{q^2}}=1+(1-\mu^2)\cot\varphi^2.$$

Verbinden wir hiermit die erste der beiden Gleichungen 16), so erhalten wir:

$$17)\quad \begin{cases} \cot\varphi^3=\frac{x-p}{(1-\mu^2)q}, \\ \cot\varphi^2=-\frac{1-\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{q^2}}}{1-\mu^2}; \end{cases}$$

oder

$$18)\quad \begin{cases} \cot\varphi^3 = \dfrac{x-p}{(1-\mu^2)q}, \\[2ex] \cot\varphi^2 = -\dfrac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}. \end{cases}$$

Liegt nun φ, welches bekanntlich immer zwischen 180° und 360° liegt, zwischen 180° und 270°, so ist $\cot\varphi$ positiv, und folglich nach der zweiten der beiden vorhergehenden Gleichungen

$$\cot\varphi = \sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}},$$

also

$$\cot\varphi^3 = -\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}},$$

und folglich wegen der ersten der beiden Gleichungen 18):

$$19)\quad x = p-(q-\sqrt[3]{\mu^2 q y^2})\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}}.$$

Liegt φ zwischen 270° und 360°, so ist $\cot\varphi$ negativ, und folglich nach der zweiten der beiden Gleichungen 18)

$$\cot\varphi = -\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}},$$

also

$$\cot\varphi^3 = \frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}},$$

und folglich wegen der ersten der beiden Gleichungen 18)

$$20)\quad x = p+(q-\sqrt[3]{\mu^2 q y^2})\sqrt{\left\{-\frac{\sqrt[3]{q^2}-\sqrt[3]{\mu^2 y^2}}{(1-\mu^2)\sqrt[3]{q^2}}\right\}}.$$

Aus den Gleichungen 19) und 20) ist ersichtlich, dass man im Falle der Zurückwerfung und im Falle der Brechung als Brenn- [illegible] ganz dieselbe Curve erhält, weil diese Gleichungen sich nicht [illegible]n, man mag μ positiv oder negativ nehmen. Es können also gewisse Theile dieser Curve dem Falle der Zurückwerfung,

gewisse Theile derselben dem Falle der Brechung entsprechen. Da die Gleichungen 16) beide Fälle ganz streng und bestimmt von einander unterscheiden, so lasse ich mich auf weitere Untersuchungen hierüber jetzt nicht ein, da überhaupt diese Abhandlung vorzugsweise den Zweck hat, die allgemeine Methode der Entwickelung der Gleichungen der Brennlinien durch ein sehr bemerkenswerthes Beispiel zu erläutern, und möglichst zweckmässige und einfache Formeln zur Construction der Brennlinie der geraden Linie zu finden.

Aus den beiden Gleichungen 17) ergiebt sich auch unmittelbar die Gleichung

$$\left\{\frac{x-p}{(1-\mu^2)q}\right\}^2=-\left\{\frac{1-\sqrt[3]{\frac{\mu^2 y^2}{q^2}}}{1-\mu^2}\right\}^3,$$

also

$$(1-\mu^2)\left(\frac{x-p}{q}\right)^2=-\left\{1-\sqrt[3]{\mu^2\left(\frac{y}{q}\right)^2}\right\}^3,$$

folglich

$$(1-\mu^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=-\left\{1-\mu^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}}\right\},$$

oder

$$\mu^{\frac{2}{3}}\left(\frac{y}{q}\right)^{\frac{2}{3}}-(1-\mu^2)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{x-p}{q}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

oder

$$21)\quad \left(\frac{\frac{y}{q}}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\frac{x-p}{q}}{\sqrt{1-\mu^2}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

oder

$$22)\quad \left(\frac{\frac{y}{q}}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{\frac{x-p}{q}}{\sqrt{\mu^2-1}}\right)^{\frac{2}{3}}=1;$$

wo die erste oder die zweite Form in Anwendung zu bringen ist, jenachdem der absolute Werth von μ kleiner oder grösser als die Einheit ist.

Da es, ohne der Allgemeinheit zu schaden, offenbar verstattet ist, $p=0$ zu setzen, so ist auch

$$23)\quad \left(\frac{\frac{y}{q}}{\mu}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{\frac{x}{q}}{\sqrt{1-\mu^2}}\right)^{\frac{2}{3}}=1$$

oder

$$24)\quad \left(\frac{y}{\frac{q}{\mu}}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{x}{\frac{q}{\sqrt{\mu^2-1}}}\right)^{\frac{2}{3}}=1,$$

jenachdem der absolute Werth von μ kleiner oder grösser als Einheit ist.

Hieraus erkennt man auf der Stelle, dass die Brennlinie geraden Linie die Evolute eines Kegelschnitts ist.

Bezeichnen wir die Entfernung des beliebigen Punktes (a der Brennlinie von dem entsprechenden Einfallspunkte (p_1q_1) du R, so ist bekanntlich

$$R=\sqrt{(x-p_1)^2+y^2}.$$

Weil nun nach 3) und 16)

$$p_1=p-q\cot\varphi;$$

$$x=p+(1-\mu^2)\cot\varphi^3.q,\ y=\left(\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\sin\varphi}\right)^3.\frac{q}{\mu};$$

also

$$x-p_1=\{1+(1-\mu^2)\cot\varphi^2\}q\cot\varphi,$$

oder, wie man leicht findet,

$$x-p_1=\frac{1-\mu^2\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}q\cot\varphi$$

ist; so ist, wie sich mittelst leichter Rechnung ergiebt:

$$R^2=\left(\frac{1-\mu^2\cos\varphi^2}{\sin\varphi^2}\right)^2.\frac{q^2}{\mu^2\sin\varphi^2};$$

also nach 6)

$$R^2=\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^4.\frac{q^2}{\mu^2\sin\varphi^2}.$$

Bekanntlich ist q immer positiv, μ ist aber im Falle der Zurückwerfung positiv, im Falle der Brechung negativ; der Win φ liegt immer zwischen 180° und 360°, und $\sin\varphi$ ist daher st negativ; also ist

$$25)\quad R=\mp\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^2.\frac{q}{\mu\sin\varphi}=\mp\frac{q\sin\varphi_1^2}{\mu\sin\varphi^3},$$

nn man im Falle der Zurückwerfung das obere, im Falle chung das untere Zeichen nimmt. Bezeichnen wir aber d luten Werth von μ durch (μ), so ist in völliger Allgemeinh

$$26)\quad R = -\left(\frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi}\right)^2 \cdot \frac{q}{(\mu)\sin\varphi} = -\frac{q\sin\varphi_1{}^2}{(\mu)\sin\varphi^3}.$$

Die beiden Formeln

$$27)\quad \cos\varphi_1 = \mu\cos\varphi,\; R = -\frac{q\sin\varphi_1{}^2}{(\mu)\sin\varphi^3};$$

bei denen man sich zu erinnern hat, dass φ_1 im Falle der Zurückwerfung zwischen 0 und 180°, im Falle der Brechung zwischen 180° und 360° genommen werden muss, bieten ein vortreffliches Hülfsmittel zur Construction der Brennlinie der geraden Linie dar, was weiter zu erläutern hier nicht nöthig sein wird.

Wir wollen nun aber noch die Winkel aus den obigen Formeln ganz eliminiren, und bloss Linien in dieselben einführen, was besonders bei der Construction der Brennlinie wünschenswerth sein kann.

Weil nach 3)

$$\cot\varphi = \frac{p - p_1}{q}$$

ist, so ist

$$\sin\varphi = \frac{q^2}{(p-p_1)^2 + q^2},\quad \cos\varphi^2 = \frac{(p-p_1)^2}{(p-p_1)^2 + q^2}.$$

Bezeichnen wir nun aber die Entfernung des Einfallspunktes $(p_1 q_1)$ von dem strahlenden Punkte (pq) durch r, so ist bekanntlich

$$r = \sqrt{(p-p_1)^2 + q^2},$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\sin\varphi^2 = \left(\frac{q}{r}\right)^2,\quad \cos\varphi^2 = \left(\frac{p-p_1}{r}\right)^2.$$

Also ist nach 6)

$$\sin\varphi_1{}^2 = 1 - \mu^2\cos\varphi^2 = \frac{r^2 - \mu^2(p-p_1)^2}{r^2}.$$

Da $\sin\varphi$ immer negativ, q dagegen immer positiv ist, so ist

$$\sin\varphi = -\frac{q}{r},\quad \sin\varphi^3 = -\frac{q^3}{r^3};$$

und folglich nach 26)

$$28)\quad R = \frac{r}{(\mu)} \cdot \frac{r^2 - \mu^2(p-p_1)^2}{q^2}.$$

Setzt man, was offenbar verstattet ist, $p=0$, so wird

$$29)\quad R=\frac{r}{(\mu)}\cdot\frac{r^2-\mu^2 p_1{}^2}{q^2}$$

oder

$$30)\quad R=\frac{r(r-\mu p_1)(r+\mu p_1)}{(\mu)\,q^2}.$$

Auch ist

$$31)\quad \frac{R}{r}=\frac{1}{(\mu)}\left\{\left(\frac{r}{q}\right)^2-\mu^2\left(\frac{p_1}{q}\right)^2\right\}$$

oder

$$32)\quad \frac{R}{r}=\frac{1}{(\mu)}\left(\frac{r}{q}-\mu\frac{p_1}{q}\right)\left(\frac{r}{q}+\mu\frac{p_1}{q}\right),$$

oder

$$33)\quad R=\frac{r}{(\mu)}\left(\frac{r}{q}-\mu\frac{p_1}{q}\right)\left(\frac{r}{q}+\mu\frac{p_1}{q}\right).$$

Die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenl Strahl liegt, ist nach dem Obigen bekanntlich

$$y=\frac{\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}}{\mu\cos\varphi}(x-p_1).$$

Für $p=0$ ist nach dem Vorhergehenden

$$1-\mu^2\cos\varphi^2=\frac{r^2-\mu^2 p_1{}^2}{r^2},$$

also

$$\sqrt{1-\mu^2\cos\varphi^2}=\frac{1}{r}\sqrt{r^2-\mu^2 p_1{}^2};$$

und

$$\cos\varphi^2=\frac{p_1{}^2}{r^2}.$$

Nun erhellet aber mittelst einer einfachen geometrischen Betrac tung sogleich, dass unter der gemachten Voraussetzung, da $p=0$ sein soll, p_1 positiv oder negativ ist, jenachdem φ zwisch 270° und 360° oder zwischen 180° und 270° liegt, d. h. jenac dem $\cos\varphi$ positiv oder negativ ist, so dass also p_1 und $\cos\varphi$ derzeit gleiche Vorzeichen haben, folglich nach dem Obigen völliger Allgemeinheit

$$\cos\varphi = \frac{p_1}{r}$$

ist. Also ist

$$34)\quad y = \frac{\sqrt{r^2 - \mu^2 p_1^2}}{\mu p_1}(x - p_1)$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt. Diese Gleichung kann man auch auf folgende Art ausdrücken:

$$35)\quad y = -\frac{1}{\mu}\left(1 - \frac{x}{p_1}\right)\sqrt{(r - \mu p_1)(r + \mu p_1)},$$

oder auch auf folgende Art:

$$36)\quad y = \mp\left(1 - \frac{x}{p_1}\right)\sqrt{\left(\frac{1}{\mu}r - p_1\right)\left(\frac{1}{\mu}r + p_1\right)},$$

wenn man nur in dieser Gleichung jederzeit im Falle der Zurückwerfung das obere, im Falle der Brechung das untere Zeichen nimmt.

Weil nach 29)

$$r^2 - \mu^2 p_1^2 = (\mu) q^2 \frac{R}{r},$$

also

$$\sqrt{r^2 - \mu^2 p_1^2} = q\sqrt{(\mu)\frac{R}{r}}$$

ist, so ist nach 34) auch

$$y = \frac{q}{\mu p_1}\sqrt{\frac{(\mu)R}{r}}.(x - p_1),$$

oder, wie leicht erhellen wird,

$$37)\quad y = \mp q\left(1 - \frac{x}{p_1}\right)\sqrt{\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{R}{r}}$$

die Gleichung der geraden Linie, in welcher der abgelenkte Strahl liegt, wenn man nur in derselben im Falle der Zurückwerfung das obere, im Falle der Brechung das untere Zeichen nimmt.

Die beiden Gleichungen

$$38)\quad \begin{cases} R = \frac{r}{(\mu)}\left(\frac{r}{q} - \mu\frac{p_1}{q}\right)\left(\frac{r}{q} + \mu\frac{p_1}{q}\right), \\ y = \mp q\left(1 - \frac{x}{p_1}\right)\sqrt{\frac{1}{(\mu)}\cdot\frac{R}{r}}; \end{cases}$$

wo man im Falle der Zurückwerfung das obere, im Falle der Brechung das untere Zeichen zu nehmen hat, scheinen mir bei der Construction der Brennlinie der geraden Linie auch eine besonders zweckmässige Anwendung zu gestatten. Für jeden in der gegebenen geraden Linie angenommenen Einfallspunkt kann man mittelst dieser Gleichungen leicht die Lage des abgelenkten Strahls und die Entfernung des entsprechenden, in diesem abgelenkten Strahle liegenden Punktes der Brennlinie von dem angenommenen Einfallspunkte, auf diese Weise also beliebig viele Punkte der Brennlinie bestimmen, und diese Curve daher selbst construiren. Ich möchte selbst diese Gleichungen bei der Construction der Brennlinie noch den trigonometrischen Gleichungen 27) vorzuziehen geneigt sein, wenn diese letzteren Gleichungen auch allerdings eine leichtere numerische Rechnung gestatten.

IV.
Bemerkung zur Abhandlung VII. in Theil X.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Wie der Herr Vf. dieser Abhandlung bemerkt, hängt Alles von der Richtigkeit der Gleichung

$$D\Sigma f(x,n)=\Sigma Df(x,n)$$

(S. 77.) ab. Diese aber ist richtig, wenn die Reihen

$$f(x,1)+f(x,2)+\ldots \text{in inf. und } f'(x,1)+f'(x,2)+\ldots \text{in inf.}$$

beide konvergent sind, so dass unter dieser Voraussetzung die Differenziation unbedingt Statt findet.

Der Beweis dieses Satzes ergiebt sich unmittelbar aus Dirksen: „Organon der ges. tr. Analysis". I. §. 313. Lehrsatz 27., wenn man dort

$$Q_{m,n}=\frac{f(x+a_m,1)-f(x,1)}{a_m}+\ldots.+\frac{f(x+a_m,n)-f(x,n)}{a_m}$$

setzt, und annimmt, dass a_m mit wachsendem m sich der Null nähere. Denn dann ist, nach dem angeführten Lehrsatze, da

$$\overset{m=\infty}{\mathrm{Gr.}}\frac{f(x+a_m,r)-f(x,r)}{a_m}=f'(x,r)$$

ist:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Sigma f(x,n)=\Sigma\frac{\partial}{\partial x}f(x,n).$$

V.

Quid in Analysi Mathematica valeant signa illa x^y, $\text{Log}_b(x)$, Sin x, Cos x, Arcsin x, Arccos x, disquisitio.

Auctor Dr. E. G. Björling,
ad Acad. Upsal. Docens Math., ad Gymn. Aros. Lector Math. design.

(Ex Actis Acad. Scient. Stockh. anni 1845.) *)

Continuatio **).

CAPUT III^um.

Quid in Analysi valeant signa Sin x et Cos x, Arcsin x et Arccos x.

§. 1.

Quid valeant signa Sin x et Cos x, x-valore quolibet

Reali x quâlibet aequatio (31) in Cap. Imo suppeditat

$$(1) \quad \ldots \quad \begin{cases} \text{Cos}\,x + \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,x = e^{x\sqrt{-1}}, \\ \text{Cos}\,x - \sqrt{-1}\,\text{Sin}\,x = e^{-x\sqrt{-1}}; \end{cases}$$

unde

*) Conf. notulam heic proxime subsequentem.

**) Ea, quae praecedunt (vid. Th. IX. hujus Archivi pag. 383 seqq.), omnia, quae de signis x^y et Log $_b(x)$ in Actis Acad. Scient. Stockh. et

$$(2) \ldots\ldots \begin{cases} \text{Cos}\, x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}, \\ \text{Sin}\, x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}. \end{cases}$$

Imaginariâ autem x nullus his signis Sin x et Cos x in praecedentibus Analyseos partibus tributus fuit sensus. Licebit igitur abhinc, omni absque periculo harum partium laedendarum, aequationes illas (2) ratas haberi et universales signorum, de quibus quaeritur, definitiones, ideoque — loco ipsius x expositâ $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ nec non debitâ aequationis (31) in Cap. I^mo ratione habitâ — statui:

$$(2') \ldots \begin{cases} \text{Sin}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \dfrac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\text{Sin}\,\alpha + \dfrac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\text{Cos}\,\alpha.\sqrt{-1}, \\ \text{Cos}(\alpha+\beta\sqrt{-1}) = \dfrac{e^{\beta}+e^{-\beta}}{2}\text{Cos}\,\alpha - \dfrac{e^{\beta}-e^{-\beta}}{2}\text{Sin}\,\alpha.\sqrt{-1}. \end{cases}$$

---

quidem dissertationi tituli heic superscripti referenda curavimus, conficiunt. Quae loco cit. [Arch. Thl. IX.] deprehensa sunt menda aliquot graviora typographica sic decet corrigi:

Pag. 383. Lin. 8. loco Auctore leg. Auctor.
„ 386. „ penult. loco VIII. leg. VII.
„ 391. „ 17. insignienda est notulâ (6″).
„ 395. „ 3. loco edito leg. edicto.
„ 401. „ penult. loco Quadrati leg. Quadrat.
„ 403. „ 1 „ (23′) „ (23′),.
„ 404. „ 16 „ quaeque „ quaequae.
„ 409. „ ultima insignienda est notulâ (54).
„ 410. „ 5. loco (53) leg. (54).
„ 411. in aequ. (21) loco $x\mu\mu$ leg. $x\mu\mu_1$.
„ 412. Lin. 19. loco pronuntie „ pronuntia.
„ 413. „ 11. insignienda est notulâ (25).
„ 418. „ 5. loco $(xx_1 \ldots. x)$ leg. $(xx_1 \ldots. x_n)$.
„ „ „ 5. (ab imâ) loco quem leg. quam.
„ 420. „ 5. loco β leg. b.
„ „ „ 22. „ (3) „ (3′).
„ „ „ 26. „ valueris leg. volueris.
„ 421. „ 13. „ *tb* „ *lb*.
„ 423. „ 7. (ab imâ) loco $R+\pi$ leg. $T+\pi$.
„ 429. „ 10. „ „ $(2k+1)\pi$ leg. $(2k'+1)\pi$.
„ „ „ 4. „ „ utraque leg. uterque.
„ 431. „ 2. loco incommodo leg. incommoda.
„ „ „ 10. „ fueris „ feceris.

Haec fere de praecedentibus. De iis, quae sequuntur, admonere oportet contulisse nos heic in unum non modo ea, quae de hac re in Actis Acad. Stockholm. anni 1845, sed etiam quae in Notâ quadam (supplementi horum instar) Academiae eidem d. 2. Febr. anni hujusce 1847 referenda curavimus.

Harum ope aequationum (2) seu (2') facillimo usque negotio licebit (ubi erit opus) easdem, quas x reali servant Sin$x$ et Cos$x$, leges, etiamsi x imaginaria fuerit, ratas esse experiri. Sufficit hoc loco formulas illas

$$(3) \dots \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Sin}(x \pm y) = \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos} y \pm \operatorname{Cos} x \operatorname{Sin} y, \\ &\operatorname{Cos}(x \pm y) = \operatorname{Cos} x \operatorname{Cos} y \mp \operatorname{Sin} x \operatorname{Sin} y \end{aligned} \right.$$

exposuisse earumque, ut ex aequationibus (2) et (29) [Cap. I.] plane apparet, manere vim immutatam x- et y-valoribus quibuscumque admonuisse; quarum praeterea beneficio rectâ, dum erit opus, ceteras deduci licebit innummeras, ex. gr.

$$(4) \dots \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \operatorname{Cos} x, \\ &\operatorname{Sin}(\pi \mp x) = \pm \operatorname{Sin} x; \\ &\operatorname{Cos}\left(\frac{\pi}{2} \mp x\right) = \pm \operatorname{Sin} x, \\ &\operatorname{Cos}(\pi \mp x) = -\operatorname{Cos} x; \end{aligned} \right.$$

et sic porro.

Praeterea notatu est vere condignum, quoniam juxta aequ. (27') [Cap. I.] x-valore quolibet, reali aeque ac imaginario, habentur

$$\left\{ \begin{aligned} &e^{x\sqrt{-1}} = 1 + \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.}, \\ &e^{-x\sqrt{-1}} = 1 - \frac{x}{1}\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}\sqrt{-1} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

propterea sic quoque x-valore quolibet, juxta aequ. (2) [vi quidem theorematis illius 3i in pag. 289. operis „Anal. Algébr." citati], obtinere

$$(5) \dots \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2....5} - \text{etc.}, \\ &\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.} \; ^{*)} \end{aligned} \right.$$

*) Hae ipsae sunt aequationes (uti satis est notum), quae apud Cauchy Definitionum occupant locum, nostrae autem Definitiones [aequationes inquam (2)] Corollaria harum censentur. — Hac quidem in re nil sane interest, uter potissimum eligatur ordo rerum; sed tamen simplicitati melius esse consultum videtur, si, dum ita fieri potest, finitae formae formulas potius quam infinitae Definitionum in locum cooptaveris.

§. 2.

Quid valeat signum Arcsin x*), x-valore quolibet.

1. Omnium primo juvabit, quod proxime antecedentibus intimo conjunctum est nexu, hoc solvi

Problema.

Invenire quantitates eas z universas, quibus conditioni huic

$$(6) \quad \ldots\ldots \quad \mathrm{Sin}\, z = \alpha + \beta\sqrt{-1} = x$$

(α et β realibus quibuscumque)

fiat satis. Tali (si exsistat) quantitati unicuique forma cedat necesse est isthaec $u+v\sqrt{-1}$ (u et v realibus), ideoque loco aequationis novissimae hanc licet substitui novam:

$$\mathrm{Sin}\,(u+v\sqrt{-1}) = \alpha+\beta\sqrt{-1},$$

i. e. [juxta (2′) in §° praeced.]

$$(6') \ldots \frac{e^v+e^{-v}}{2}\mathrm{Sin}\, u + \frac{e^v-e^{-v}}{2}\mathrm{Cos}\, u.\sqrt{-1} = \alpha+\beta\sqrt{-1},$$

i. e.

$$(6'') \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{e^v+e^{-v}}{2}\mathrm{Sin}\, u = \alpha, \\ \dfrac{e^v-e^{-v}}{2}\mathrm{Cos}\, u = \beta. \end{cases}$$

1°)

Quoties nec α nec $\beta=0$ fuerint,

toties loco aequationum (6″) substitui licet hasce

$$(7) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{e^v+e^{-v}}{2} = \dfrac{\alpha}{\mathrm{Sin}\, u}, \\ \dfrac{e^v-e^{-v}}{2} = \dfrac{\beta}{\mathrm{Cos}\, u}, \end{cases}$$

---

*) Praecedentibus ex Analyseos partibus commonere hoc loco juvat, x reali ac numerice $\leqq 1$, signo illo Arcsin $((x))$ intelligi

$$\pm\left(\mathrm{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} \pm 2k\pi \text{ seu } \mathrm{Arcsin}\,((1)) \pm \left(\mathrm{Arcsin}\, x - \frac{\pi}{2}\right),$$

scilicet „Arcsin x“ hocce limitibus $\pm\frac{\pi}{2}$ haud excedente.

(quoniam fieri non potest in hoc casu ut $\operatorname{Sin} u$ nec $\operatorname{Cos} u=0$ sit); unde

$$(8) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} e^{v} &= \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} u} + \frac{\beta}{\operatorname{Cos} u}, \\ e^{-v} &= \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} u} - \frac{\beta}{\operatorname{Cos} u}; \end{aligned} \right.$$

ideoque (ad ipsam u inveniendam) habetur

$$(9) \quad \ldots\ldots \quad \frac{1}{\frac{\alpha}{\operatorname{Sin} u} + \frac{\beta}{\operatorname{Cos} u}} = \frac{\alpha}{\operatorname{Sin} u} - \frac{\beta}{\operatorname{Cos} u},$$

seu — [quoniam juxta (8) fieri non potest ut u (si exsistat) talis sit, ut $\frac{\alpha}{\operatorname{Sin} u}$ et $\frac{\beta}{\operatorname{Cos} u}$ eodem essent valore numerico] isthaec

$$\frac{\alpha^2}{\operatorname{Sin}^2 u} - \frac{\beta^2}{\operatorname{Cos}^2 u} = 1,$$

seu

$$\operatorname{Cos}^4 u - (1 - \alpha^2 - \beta^2) \operatorname{Cos}^2 u - \beta^2 = 0,$$

seu, quoniam fieri non omnino potest ut $\operatorname{Cos}^2 u$ negativa sit quantitas,

$$\operatorname{Cos}^2 u = -\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 - 1}{2}\right)^2 + \beta^2},$$

ideoque

$$\operatorname{Sin}^2 u = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} - \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2}$$

$$= \frac{\alpha^2}{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2}},$$

nec non (quoniam, secund. (7), $\operatorname{Sin} u$ eodem necesse sit signo ac α)

$$(10) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \operatorname{Sin} u = \frac{\alpha}{\gamma}, \text{ *)}$$

---

*) Quantitas haec $\frac{\alpha}{\gamma}$ reverâ numerice <1 est. Etenim si foret $\frac{\alpha}{\gamma}$ numerice $\geqq 1$, i. e.

$$\sqrt{\alpha^2} \geqq \sqrt{\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2} + \sqrt{\left(\frac{\alpha^2 + \beta^2 + 1}{2}\right)^2 - \alpha^2}},$$

tunc quoque obtineret

positâ scilicet, brevitatis ergo,

$$\gamma=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}},$$

seu, quod idem valet,

$$(11)\ \ldots\ u=\mathrm{Arcsin}\left(\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)\right)=\mathrm{Arcsin}\,((1))\pm(\mathrm{Arcsin}\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\pi}{2}).$$

Idcirco queniam, uti jam compertum habemus, fieri non potest quin ipsi u in $u+v\sqrt{-1}$ (siquidem exsistat) certe quispiam cedat valor ex iis, quos comprehendit posterius hoc membrum, ideoque

$$\mathrm{Cos}\,u=\pm\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2},\ \text{i. e.}$$

$$=\pm\sqrt{-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\right)^2+\beta^2}},$$

prout u superiori erit formâ (11) aut inferiori; propterea prior aequationum (8) abit in

$$e^v=\gamma\pm\frac{\beta}{\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^2}}=\gamma\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta,$$

positâ scilicet, brevitatis ergo,

$$\delta=\sqrt{\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\right)^2+\beta^2}},$$

seu, quod idem valet (quippe quod realium modo quantitatum v heic mentio est illata),

$$v=l(\gamma\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)\ ^{*})$$

$$(12)\ \ldots\ldots\ =\pm l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta),$$

vi aequationis illius (α) in notâ contextui heic subscriptâ.

$$0\geqq\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}-\alpha^2+\sqrt{\left(\frac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2},$$

seu

$$0\geqq\frac{1-\alpha^2+\beta^2}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-\alpha^2+\beta^2}{2}\right)^2+\alpha^2\beta^2};$$

id quod absurdum, quoties (ut heic) nec α nec $\beta=0$ fuerint.

*) Positivam reverâ esse harum utramque $\gamma\pm\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta$, id ex aequ. (9) patet, quippe quae indicat esse

Eosdem quoniam posterior insuper aequat. (8) suppeditat v-valores, jam probe est expertum fieri non posse quin, certe nec α nec $\beta=0$ exsistentibus, unaquaeque quantitatum z quaesitarum (siquidem exsistant) in posteriori comprehensa sit membro aequationis hujusce:

$$(13)\ldots z=\text{Arcsin}((1))\pm[\text{Arcsin}\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\,.\,l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)].$$

Et quidem reverâ jam omni absque negotio experiri licet earum, quas comprehendit hoc membrum posterius, quantitatum unâquâque fieri satis problemati seu aequationi (6) vel (6″).

2⁰)

Sin vero $\alpha=0$ sit

(itaque $x=\beta\sqrt{-1}$, β reali quâlibet);

aequationes illae (6″) in has abeunt

$$(7')\ \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{e^v+e^{-v}}{2}\text{Sin}\,u=0, \\[2ex] \dfrac{e^v-e^{-v}}{2}\text{Cos}\,u=\beta, \end{cases}$$

quarum prioris in loco, quippe cui aliter satisfieri nequeat realibus equidem u et v, substitui licet

$$\text{Sin}\,u=0.$$

Idcirco quoniam (ut ex hac patet aequatione) fieri non potest quin ipsi u in $u+v\sqrt{-1}$ (siquidem exsistat) certe quispiam cedat valor ex iis, quos comprehendit posterius aequationis hujusce membrum

$$(11')\ \ldots\ u=\text{Arcsin}((0))=\text{Arcsin}((1))\mp\frac{\pi}{2},$$

ideoque

$$\text{Cos}\,u=\pm1,$$

prout u superiori erit formâ (11′) aut inferiori; propterea loco aequationis (7′) habetur

$$e^v-e^{-v}=\pm2\beta,\ \text{seu}\ e^v=\pm\beta+\sqrt{\beta^2+1},$$

$$(\alpha)\ \ldots\ldots\ \frac{1}{\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta}=\gamma-\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta$$

ideoque ejusdem signi quantitates ambas, i. e. (quoniam γ positiva est) positivas, ut facile patet.

$$(12') \ldots\ldots v = l(\pm\beta + \sqrt{\beta^2+1}) = \pm l(\beta + \sqrt{\beta^2+1}).$$

Quibus jam probe est expertum fieri non posse quin in hoc casu unaquaeque quantitatum z quaesitarum (siquidem exsistant) in posteriori comprehensa sit membro aequationis

$$(13') \ldots\ldots z = \text{Arcsin}((1)) \pm [\sqrt{-1}\,.\,l(\beta + \sqrt{\beta^2+1}) - \frac{\pi}{2}).$$

Et quidem reverâ jam omni absque negotio experiri licet earum, quas comprehendit posterius hoc membrum, quantitatum unâquâque fieri satis problemati proposito. — Et quod aequatio haec (13') nonnisi ipsam (13), posito in eâ $\alpha = 0$ [unde $\gamma = \sqrt{\beta^2+1}$, $\delta = \sqrt{\beta^2}$], conficit; propterea jam nobis licitum est contendere ipsâ hac aequatione (13) solutum esse problema nostrum, certe nisi β sola $= 0$, i. e. nisi x realis $= \alpha$ [haud zéro], fuerit. Et quod ad specialem hunc casum attinet, scilicet

3°)

si β sola $= 0$ fuerit

(ideoque x realis $= \alpha$, haud zéro),

haec tandem adjicienda sunt verba. — Aequationes illae (6'') tunc abeunt in

$$(7'') \ldots\ldots \begin{cases} \dfrac{e^v + e^{-v}}{2}\,\text{Sin}\,u = \alpha, \\[2ex] \dfrac{e^v - e^{-v}}{2}\,\text{Cos}\,u = 0, \end{cases}$$

unde patet extemplo fieri non posse ut nunc $\text{Sin}\,u = 0$ sit.

Harum posteriori satisfieri aliter non potest nisi

1) per $\text{Cos}\,u = 0$, 2) per $e^v - e^{-v} = 0$.

„$\text{Cos}\,u = 0$" secum ferat necesse est $\text{Sin}\,u = \pm 1$, vi cujus prior (7'') abit in

$$e^v + e^{-v} = \pm 2\alpha, \text{ i. e. } e^v = \pm\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1};$$

cujus quoniam membri posterioris omnes imaginariae sunt quantitates, dum α numerice < 1 est, patet ad hunc casum minime pertinere relationem illam $\text{Cos}\,u = 0$. Quare tunc posteriori (7'') aliter satisfieri nequit nisi acceptâ relatione alterâ

$$e^v - e^{-v} = 0, \text{ i. e. } v = 0,$$

vi cujus prior (7'') abit in

$$\text{Sin}\,u = \alpha, \quad u = \text{Arcsin}\,((\alpha)),$$

atque habetur, quae ex elementis jam satis est nota, aequatio illa

$(13'') \ldots\ z = \text{Arcsin}((\alpha)) = \text{Arcsin}((1)) \pm (\text{Arcsin}\,\alpha - \frac{\pi}{2})$.

Hanc eandem ad aequationem, etiamsi α numerice $=1$ sit, perveniri plane apparet. — Et quod aequatio haec $(13'')$ nonnisi ipsam (13), positis in eâ $\beta=0$ atque α numerice $\leqq 1$ [unde $\gamma=1$, $\delta=0$], conficit; propterea jam nobis licitum est contendere in hoc etiam casu solutum esse problema aequatione hac (13).

Dum vero α numerice >1 est *); e contrario altera illa relatio $e^v - e^{-v} = 0$ (i. e. $v=0$) nihil ad rem habet momenti, — id quod ex priori $(7'')$ plane apparet —; quaré, in hoc demum casu, solum id restat ut accipiatur $\text{Cos}\,u=0$, ideoque

$$\text{Sin}\,u = \pm 1$$

quarum tamen ambarum — [ut ex priori $(7'')$ patet] — superior sola, dum α positiva est, inferior dum α negativa, erit admittenda. Ideoque:

priori in casu (α positivâ >1) aequationibus $(7'')$ satisfieri aliter nequit, nisi acceptis

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Sin}\,u=1,\ u=\text{Arcsin}((1)), \\ e^v + e^{-v} = 2\alpha, \\ \text{i. e.} \\ e^v = \alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1},\ v = \pm\, l(\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}); \end{array}\right.$$

posteriori autem (α negativâ numerice >1), nisi acceptis

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Sin}\,u=-1,\ u=\text{Arcsin}((-1)), \\ e^v + e^{-v} = -2\alpha, \\ \text{i. e.} \\ e^v = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2-1},\ v = \pm\, l(-\alpha + \sqrt{\alpha^2-1}); \end{array}\right.$$

quibus jam probe est expertum fieri non posse quin, dum $\beta=0$ atque α numerice >1 est, unaquaeque quantitatum z quaesitarum (siquidem exsistant) in posteriori comprehensa sit aequationis hujusce membro:

---

*) Admonere obiter juvat in hoc casu abire aequationem (13) in formam

$$(\beta) \ldots z = \text{Arcsin}((1)) \pm [\text{Arcsin}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}.\,l(\sqrt{\alpha^2} + \frac{0}{\sqrt{0^2}}.\sqrt{\alpha^2-1})],$$

quippe quoniam in hoc casu obtineat

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2},\quad \delta = \sqrt{\alpha^2-1}.$$

Quatenus ac quonam demum pacto liceat contendi aequatione hac (13) solutum esse in hoc quoque casu problema propositum, id insequens jam commonstrabit examen.

$$(13''')\ldots z = \text{Arcsin}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)\right) \pm \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}).$$

Et quidem reverâ jam omni absque negotio experiri licet earum, quas comprehendit posterius hoc membrum, quantitatum unâquâque fieri satis problemati scil. aequationibus illis (7''). — Et quod aequatio illa (13), positis in eâ $\beta=0$ atque $\alpha^2>1$ [unde $\gamma=\sqrt{\alpha^2}$, $\delta=\sqrt{\alpha^2-1}$], formam illam (β) *) induit: quae autem ipsa [sive, quod in eâ occurrit, symbolo $\frac{0}{\sqrt{0^2}}$ vim subjeceris $+1$ sive -1] nonnisi aequationem (13''') conficit **); propterea jam demum nobis licitum est contendere in omni casu solutum esse problema propositum aequatione illâ

$$(13)\ldots z = \text{Arcsin}((1)) \pm [\text{Arcsin}\,\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\,.\,l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)].$$

2. Jis convenienter, quae in doctrina jam quantitatum realium fuerunt accepta ***), universalis ea formula [posterius inquam

---

*) Vid. notam (sub contextu) proxime praecedentem.

**) Nam 1°) dum α positiva est, aequatio (13''') dat

$$z = \text{Arcsin}((1)) \pm \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

atque aequatio (β) tunc abit in

$$z = \text{Arcsin}((1)) \pm \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\frac{0}{\sqrt{0^2}}\,.\,\sqrt{\alpha^2-1});$$

quas equidem ambas idem prorsus valere, symbolo illi $\frac{0}{\sqrt{0^2}}$ sive $+1$ sive -1 subjeceris notionem, id omni absque explicatione patet.

Et quidem 2°) dum α negativa est, aequatio (13''') dat

$$z = \text{Arcsin}((-1)) \pm \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

atque aequatio (β) tunc abit in

$$z = \text{Arcsin}((1)) \pm [-\pi+\sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\frac{0}{\sqrt{0^2}}\,.\,\sqrt{\alpha^2-1})]:$$

quas item ambas idem prorsus valere, symbolo illi $\frac{0}{\sqrt{0^2}}$ sive $+1$ sive -1 subjeceris notionem, id absque negotio patet ex eo, quod tribus hisce

$$\text{Arcsin}((-1)),\quad \text{Arcsin}((1))+\pi,\quad \text{Arcsin}((1))-\pi$$

unus reverâ idemque inest sensus.

***) Etenim aequatio illa (I) subsequens, dum $\beta=0$ est atque simul numerice $\leqq 1$, identica evadit.

aequationis (13) membrum], quae in se cunctas continet quibus problemati vixdum soluto seu aequationi illi (6) satisfiat quantitates, signo illo $\operatorname{Arcsin}((\alpha+\beta\sqrt{-1}))$ seu $\operatorname{Arcsin}((x))$ erit intelligenda. Itaque, realibus α et β quibuscumque, habetur aequatio

$$(\mathrm{I})\ldots\ldots \operatorname{Arcsin}((\alpha+\beta\sqrt{-1}))=\operatorname{Arcsin}((1))$$
$$\pm[\operatorname{Arcsin}\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}\,.\,l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)],$$

scilicet

$$(14)\ldots\ldots\ldots \begin{cases} \gamma=\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2+1}{2}\right)^2-\alpha^2}}, \\ \delta=\sqrt{\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\right)^2+\beta^2}}, \end{cases}$$

in qua praeterea signo $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}$, dum simul $\beta=0$ atque $\alpha^2>1$ sunt [dum α numerice $\leqq 1$ est atque $\beta=0$, ipsa δ in 0 abit], ex arbitrio $+1$ aut -1 intelligi licet. Quo igitur in casu speciali aequationem sic licet describi:

$$(\mathrm{I}')\ldots\ldots \operatorname{Arcsin}((\alpha))=\operatorname{Arcsin}((1))$$
$$\pm[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)-\frac{\pi}{2}+\sqrt{-1}.l(\sqrt{\alpha^2}\pm\sqrt{\alpha^2-1})]$$
$$=\operatorname{Arcsin}((1))\pm[\operatorname{Arcsin}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)-\frac{\pi}{2}]$$
$$\pm\sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1})$$
$$=\operatorname{Arcsin}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)\right)\pm\sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}).$$

Determinaturi nos deinceps, cuinam potissimum ex innumeris, quas in se continet posterius aequationis hujusce (I) membrum, quantitatibus signum illud $\operatorname{Arcsin} x$ seu $\operatorname{Arcsin}(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ nec non denominatio illa „Principalis ipsius $\operatorname{Arcsin}((x))$ valor“ reservetur, nullâ in hoc negotio aliâ ex praecedentibus Analyseos partibus nec adstricti sumus nec adjuti quidem lege, nisi ut identica evadat pro $\begin{Bmatrix}\beta=0\\ \alpha^2\leqq 1\end{Bmatrix}$ ea, quae definitionis locum occupatum demum erit, aequatio. Cui quum pacto aliter (ut facile patet) satisfieri nequeat nisi $\operatorname{Arcsin} x$ cooptatâ eâ, quae positioni $k=0$ in generali illâ

$$\operatorname{Arcsin}((1))=\frac{\pi}{2}\pm 2k\pi$$

signoque plus unciis [] in aequatione (I) praefixo debetur; propterea rata nobis et universalis ipsius Arcsin x definitio statuenda haec esse videtur:

$$(II)....\text{Arcsin}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\text{Arcsin}\frac{\alpha}{\gamma}+\sqrt{-1}.l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta).$$

Acceptâ universali hac definitione id certe comparatum est commodi, ut, quae antea realibus modo atque unitatem haud excedentibus x obtinuit locum, aequatio

$$(III) \;.....\; \text{Arcsin}((x))=\text{Arcsin}((1))\pm(\text{Arcsin}\,x-\frac{\pi}{2})$$

quibuscumque abhinc x-valoribus, imaginariis aeque ac realibus, rata sit permansura: — id quod collatis inter se aequationibus illis (I) et (II) plane apparet.

De cetero ex ipsa dictione aequationis hujusce (II) in oculos cadit: videri nobis in praesenti Analyseos statu nec injunctum esse officium nec veniam quidem datam aliud quodpiam de notione illa Arcsin α, dum α numerice >1 est, statuendi in genere nisi hoc solum: signum illud Arcsin α in Analysi nusquam pro $\alpha^2>1$ adhibetur, nisi quo limes umquam significetur ipse, in quem imaginaria ea, cujus tunc mentio sit, functio Arcsin $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ convergat β suâ indefinite in 0 tendente, verbo:

$$\left.\begin{aligned}(II')....\text{Arcsin}\,\alpha&=\text{Arcsin}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)+\sqrt{-1}.l(\sqrt{\alpha^2}\pm\sqrt{\alpha^2-1})\\ (\alpha \text{ numerice} >1)\quad&\\ &=\text{Arcsin}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)+\sqrt{-1}.l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1})\end{aligned}\right\}$$

prout ea, cujus sit mentio, α limitem conficit, in quem proposita quaedam $\alpha+B\sqrt{-1}$ aut $\alpha-B\sqrt{-1}$, decrescente Numero B in 0 indefinite, convergit *).

---

*) Optimo nobis jure licitum esse censere in praesenti nec injunctum esse officium nec datam quidem veniam notionis Arcsin hujus aliter definiendae, id rectâ consequitur ex eo, quod 1°) praecedentes Analyseos partes liberum omnino nobis permittunt arbitrium utrum potissimum placuerit ex ambabus, quas praesenti in casu suppeditat posterius aequationis (II) seu (II′) membrum, quantitatibus hoc signo distinguendi, nec 2°) sequentibus ex Analyseos partibus (quippe quibus ad hoc usque tempus nullus omnino fuerit usus signi hujusce) ne minima quidem data nobis fuit caussa, cur alteram ambarum quas modo diximus quantitatum alteri praeferremus quodammodo; quare, donec hujuscemodi forsitan data fuerit caussa seu ratio sufficiens, periculum est ne Analysin in cursu praevertat, qui temere ita nullâque re certâ adductus alteri potius alteri earum hoc signum addicere sit ausurus.

Praeterea quemadmodum eâ, cujus in praecedentibus [vid. notam sub contextu pag. 388. T. IX.] mentionem fecimus, definitione signi illius 0^0, sic quoque (uti nobis videtur) definitione illâ (II′) acceptâ desideriis Analy-

Nota. Ex aequationibus (I) et (II) in specie consequitur esse, β reali quâlibet,

$$(\mathrm{I}'')\ldots\mathrm{Arcsin}((\beta\sqrt{-1}))=\mathrm{Arcsin}((1))\pm[\tfrac{\pi}{2}-\sqrt{-1}.l(\beta+\sqrt{\beta^2+1})],$$

nec non

$$(\mathrm{II}'')\ \ldots\ \mathrm{Arcsin}(\beta\sqrt{-1})=\sqrt{-1}.l(\beta+\sqrt{\beta^2+1}).$$

§. 3.

Quid valeat signum Arccos x *), x-valore quolibet.

1. Problema hocce „Invenire quantitates eas z universas, quibus fiat satis conditioni huic

---

seos apprime est satisfactum. Scilicet signum hoc 0^y, quamquam nullum illi alium concedere licuit usum nisi quo limes, multiplex ille quidem, totidem functionum diversarum significetur, nemini tamen in mentem venit consilium ex Analysi plane tollendi. Pravum sane tale fuisset consilium; longe autem pessime, ut plane apparet, in hac re Analysi foret consultum, si ita definiretur hoc 0^y, ut unicae inde functioni ei, quae limitem conficiat singularis cujusdam speciei expressionum $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^y$, proprium id signum foret censendum.

(De hac re plurá in „Nota II." sub finem dissert.)

Quibus praeterea ex omnibus plane apparet non posse nos, quin et pristinum illud Illustrissimi Cauchy consilium signi Arcsin α (pro $\alpha^2>1$) ex Analysi prorsus tollendi repudiemus et novum, quod pag. 385. operis praeclari „Exerc. d'Anal. et de phys. mathém." nuper admodum promulgavit auctor inclytissimus, novum (inquam) signi hujusce alterutri soli, et quidem superiori, ambarum quae in posteriori aequationis nostrae (II') membro continentur quantitatum vindicandi conamen Analysi vere prodesse vehementer dubitemus.

Postscriptum.

Dissimulare hoc loco non fas est nosmet ipsos in ea, quam de hac re anno 1845 Academiae Scient. Stockholm. obtuleramus, dissertatione [quae-que in „Actis" anni ejusdem relata est] novam hanc ipsam definitionem Cauchyanam nostrâ quidem parte sponte proposuisse; postea autem re accuratius perpensâ et quidem ingenti ipsâ animi oblectatione ex eo, quod nostram hanc definitionem sic novae illi Cauchyanae omnibus omnino numeris congruentem esse cognoveramus, praetermissâ nos in Nota, quae de hac re in Acad. Scient. Stockholm. d. 2. Febr. anni hujusce 1847 supplementi instar praecedentium relata fuit, eam, quam heic supra in medium protulimus definitionem prioris in locum denique substituisse.

*) Praecedentibus ex Analyseos partibus commonere hoc loco juvat, x reali ac numerice $\leqq 1$, signo illo Arccos$((x))$ intelligi

$$\pm\mathrm{Arccos}\,x\pm 2k\pi \ \text{ seu } \ \mathrm{Arccos}((1))\pm\mathrm{Arccos}\,x,$$

scil. „Arccos x" hocce limitibus 0 et π haud excedente.

(15) ..... $\operatorname{Cos} z = \alpha + \beta\sqrt{-1} = x$ (α et β realibus)",

accurate, ut ex aequ. (4) patet, idem est ac problema „Invenire quantitates eas z universas, quibus conditioni

$$\operatorname{Sin}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \alpha + \beta\sqrt{-1} = x$$

fiat satis", ideoque solutum jam isthoc habemus aequatione illâ (I) in §° 2. praeced. i. e. aequatione

$$(16)..z = \frac{\pi}{2} - \{\operatorname{Arcsin}((1)) \pm [\operatorname{Arcsin}\frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\pi}{2} + \sqrt{-1}\,.\,l(\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)]\}$$

$$= \operatorname{Arccos}((1)) \pm [\operatorname{Arccos}\frac{\alpha}{\gamma} - \sqrt{-1}\,.\,l(\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)],$$

denotantibus heic γ et δ easdem, quae in §° praeced. expositae sunt, expressiones.

2. Iis convenienter, quae in doctrina jam quantitatum realium fuerunt accepta *), universalis ea formula [posterius inquam aequationis (16) membrum], quae in se cunctas continet quibus problemati huic seu aequationi (15) satisfiat quantitates, signo illo $\operatorname{Arccos}((\alpha + \beta\sqrt{-1}))$ seu $\operatorname{Arccos}((x))$ erit intelligenda. Itaque, realibus α et β quibuscumque, habetur aequatio

$$(\mathrm{I})....\operatorname{Arccos}((\alpha + \beta\sqrt{-1})) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}((\alpha + \beta\sqrt{-1}))$$

$$= \operatorname{Arccos}((1)) \pm [\operatorname{Arccos}\frac{\alpha}{\gamma} - \sqrt{-1}\,.\,l(\gamma + \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)],$$

in quâ praeterea (sicut in §°. praeced.) signo $\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}$, dum simul $\beta = 0$ atque $\alpha^2 > 1$ sunt [dum α numerice $\leqq 1$ est atque $\beta = 0$, ipsa δ in 0 abit], ex arbitrio $+1$ aut -1 intelligi licet. Quo igitur in casu speciali [γ tunc $= \sqrt{\alpha^2}$ est, $\delta = \sqrt{\alpha^2 - 1}$] aequationem sic licet describi:

$$(\mathrm{I'})\,...\operatorname{Arccos}((\alpha)) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arcsin}((\alpha))$$

$$= \operatorname{Arccos}((1)) \pm [\operatorname{Arccos}\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}} - \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2} \pm \sqrt{\alpha^2 - 1})]$$

$$= \operatorname{Arccos}\left(\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)\right) \pm \sqrt{-1}\,.\,l(\sqrt{\alpha^2} + \sqrt{\alpha^2 - 1}).$$

---

*) Etenim aequatio (I) subsequens, dum $\beta = 0$ est atque simul α numerice $\leqq 1$, identica evadit.

Determinaturi nos deinceps, cuinam potissimum ex innumeris, quas continet aequationis hujus (I) membrum, quantitatibus signum illud Arccos x seu Arccos$(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ nec non denominatio illa „Principalis ipsius Arccos$((x))$ valor“ reservetur, iisdem ac in §° praeced. rationibus permoti eam ipsam, quae positioni $k=0$ in generali illâ

$$\text{Arccos}((1))=\pm 2k\pi$$

signoque plus uncis [ ] in aequ. (I) praefixo debetur, hoc modo insigniendam esse censemus, ideoque ratam hanc et universalem ipsius Arccos x statuendam esse aequationem:

$$\text{(II)}\ldots\text{Arccos}(\alpha+\beta\sqrt{-1})=\text{Arccos}\frac{\alpha}{\gamma}-\sqrt{-1}.l(\gamma+\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2}}\delta)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\text{Arcsin}(\alpha+\beta\sqrt{-1}).$$

Ex quibus jam patet, 1°) eam, quae antea realibus modo atque unitatem numerice haud excedentibus x obtinuit locum, aequationem

$$\text{(III)}\ \ldots\ \text{Arccos}((x))=\text{Arccos}((1))\pm\text{Arccos}\,x$$

quibuscumque abhinc ipsius x valoribus, imaginariis aeque ac realibus, ratam permanere, atque 2°) nobis equidem de notione illa Arccos α, dum α numerice >1 est, nihil aliud statuendum esse videri nisi hoc solum: Signum illud Arccos α in Analysi nusquam pro α numerice >1 adhibetur, nisi quo limes umquam significetur ipse, in quem imaginaria ea, cujus tunc mentio sit, functio Arccos $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ convergat β suâ indefinite in 0 tendente, verbo:

$$\text{(II')}\ \ldots\ \underset{(\alpha \text{ numerice } >1)}{\text{Arccos}\,\alpha}=\text{Arccos}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2}}\right)\mp\sqrt{-1}.l(\sqrt{\alpha^2}+\sqrt{\alpha^2-1}),$$

prout ea, cujus sit mentio, α limitem conficit, in quem proposita quaedam $\alpha+B\sqrt{-1}$ aut $\alpha-B\sqrt{-1}$, descrescente Numero B in 0 indefinite, convergit;

$$=\frac{\pi}{2}-\text{Arcsin}\,\alpha.$$

Nota. Ex aequationibus (I) et (II) praecedentibus in specie consequitur esse, β reali quâlibet,

$$\text{(I'')}\ldots\text{Arccos}((\beta\sqrt{-1}))=\frac{\pi}{2}-\text{Arcsin}((\beta\sqrt{-1}))$$

$$=\text{Arccos}((1))\pm[\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}.l(\beta+\sqrt{\beta^2+1})],$$

$$(\mathrm{II}'')\ldots\ \mathrm{Arccos}(\beta\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}-\sqrt{-1}.\,l(\beta+\sqrt{\beta^2-1})$$
$$=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arcsin}(\beta\sqrt{-1}).$$

NOTAE.

Nota II.

(Vid. pag. 51.)

Quum supra alicubi [Cap. I°] in eo eramus, ut definiretur signum illud

$$(\beta\sqrt{-1})^\mu,\ \mu \text{ reali ac rationali},$$

ea tunc quoque proponebatur quaestio *), numne Analysi bene fuisset consultum tributâ huic signo definitione quâdam illi analogâ, quae signo illi 0^μ antea [vid. notam sub pag. 388. T. IX.] fuerat vindicata, ideoque acceptis his demum aequationibus

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=(\pm\varrho)^\mu\,(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau)$$
prout positiva est aut neg. α,

atque

$$(\beta\sqrt{-1})^\mu=\lim(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu \text{ tendente } \alpha \text{ suâ in 0 indefinite.}$$

[Reverâ (ut in pag. 394. cit. explicatum est) hic limes, dum β positiva est quantitas, unicus est ac perfecte determinatus, sive positivâ ex plagâ sive negativâ tendat α in zéro; at vero anceps, dum β negativa est, certe nisi μ ipsa numerice integra aut 0 fuerit] **).

Tali ex modo rei gerendae id (inter alia) commodi fuisset profectum, ut nullâ in sequentibus opus fuisset signi hujus $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ mentione speciali, quippe quoniam singulis demum calculis iis, ubi forsitan de hoc signo âgeretur, ea, quae de $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ positivâ α negativâque jam fuerant allata, suffectura essent.

---

*) Vid. „Observ.“ in pag. 393. T. IX. hujus Archivi.

**) Commonere juvat hoc loco definitionibus, quas in Cap. hoc I° statuimus, hisce

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu=(\pm\varrho)^\mu\,(\mathrm{Cos}\,\mu\tau+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\tau),$$

atque

$$(-\varrho)^\mu=\varrho^\mu(-1)^\mu=\varrho^\mu\,(\mathrm{Cos}\,\mu\pi+\sqrt{-1}\,\mathrm{Sin}\,\mu\pi)$$

id esse Analysi conciliatum commodi, ut

α^μ

Dissimulari non potest reverâ permultas, easdemque gravioris sane momenti, rationes ad huncce modum rei gerendae comprobandum adferri optime licere. Scilicet (ut paucis utamur) quemadmodum, dum de signo 0^y agitur, innumera Analysi contingunt emolumenta ex tali definitione, quâ nullus illi alius in antecessum tribuatur sensus nisi multiplex ille **limitis**, in quem proposita quaedam $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^y$, tendentibus demum α et β suis in 0 indefinite, convergat: at totidem certe e contrario consecutura essent incommoda, si ita definiretur hoc 0^y, ut singulari inde cuipiam horum limitum foret adfixum; sic fere de signo $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, cujus heic mentio est, jure liceat judicari. Nec sane irritum id videtur esse praesagium, fore ut tali olim definitionis genere gaudeat hoc quoque signum $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, scilicet confirmatâ demum probatâque omnibus eâ, quam a nobis equidem in Cap. I° praeced. allatam sancivit postea illustr. ipse **Cauchy** *), opinione de signo $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$, negativâ α aeque ac positivâ, Analyseos in usum vertendo. **Praesenti autem tempore**, quo residet usque plerisque mos ille, ab illustr. **Cauchy** acceptus, ut signum hoc $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ pro α negativâ [nisi forte μ integro fuerit valore numerico aut 0] ex Analysi plane rejectum esse censeant, inveteratâque insuper consuetudine signum illud $(\beta\sqrt{-1})^\mu$ numquam non limiti solius, quam Analysi superstitem reddiderant, $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ [pro α positivâ] reservatum esse judicandi, praesenti certe tempore (inquam) rem aliter, quam ut ex verbis in „**Observ.**" modo citatâ allatis constat, dirimendi nec copia erat nec apta satis occasio **).

Aliter, ut patet, longe sese res aliter de signo illo Arcsin α [α numerice > 1] habebat. Nullâ enim ex antecedentibus cujuspiam rationibus praesumpta erat de hac re opinio, quippe quod apud **Cauchy** solum illata fuerit signi hujusce mentio, eademque — certe si novissima, quae de hac re Dissertatione in „**Exercices**" suis anni proxime praeterlapsi edidit, verba exceperis — nonnisi ut ex Analysi hoc signum tollendi occasione uteretur. Re igitur ad hunc usque diem sic fere integrâ relictâ, a primo inde adgressu eam, quâ usi sumus quaeque sola Analysi vere salutaris esse videtur ***), definitionem statuendi occasionem amplexi sumus commodam satis atque idoneam.

---

semper limitem reverâ conficiat, unicum eum quidem ac perfecte determinatum, in quem $(\alpha+\beta\sqrt{-1})^\mu$ unaquaeque, convergente β suâ [positiva sit ista an negativa, nil refert] in 0 indefinite, tendit: verbo [A et B **Numeros** denotantibus] **semper** esse

$$\text{et } A^\mu = \lim_{(B=0)} (A\pm B\sqrt{-1})^\mu$$

$$\text{et } (-A)^\mu = \lim_{(B=0)} (-A\pm B\sqrt{-1})^\mu.$$

*) Vid. „**Postscriptum**" illud in pag. 432. T. IX. hujus **Archivi**.

**) Quae licet ita sit in genere admissa hucusque definitio signi $(\beta\sqrt{-1})^\mu$, nihil tamen impedit quominus, quicumque erit, cui forte potius placeat altera cujus supra mentionem fecimus signi hujus definitio, is singulis in calculis (ubi signi hujus erit opus), donec vulgo forsitan nova haec definitio olim fuerit usu recepta, expressis in antecessum indicet verbis eâ se iam tunc temporis esse usurum.

***) Conf. notam ipsam contextui in pag. 51. praeced. subterpositam.

VI.

Auflösung der beim rechtwinklichten sphärischen Dreieck vorkommenden Aufgaben, vermittelt durch das sphärische Fünfeck.

Von

Herrn Dr. M. A. F. Prestel

in Emden.

Vorbereitende Betrachtungen.

§. 1. Es sei *BNM* (Taf. II. Fig. 1) ein sphärisches Dreieck, welches bei *N* rechtwinklicht ist. *BMNK* sei die dem Dreieck entsprechende körperliche Ecke. Man denke sich aus *K* mit dem Halbmesser $KB = KM = KN$ die Kugel *FBNSQR* beschrieben. Es werde ferner die Seite *BN* über die Kugeloberfläche zu dem grössten Kreise *NBFJQS*, die Seite *NM* zu dem grössten Kreise *NMDLR* und die Seite *MB* zu dem grössten Kreise *BMGHT* erweitert. Ferner beschreibe man aus *B*, als Pol, den grössten Kreis *JEDGS*, und aus *M*, als Pol, den grössten Kreis *FELHQ*. (In Taf. II. Fig. 1. sind nur die auf der Vorderseite der Kugel liegenden Hälften der genannten grössten Kreise zu sehen. Taf. II. Fig. 2. stellt einen Theil der auf der Rückseite der Kugel liegenden Stücke der genannten grössten Kreise dar. Taf. II. Fig. 2. ist nämlich das Bild der Kugel Taf. II. Fig. 1, wenn man diese letztere sich um *FQ* als Achse von der Rechten zur Linken um 90° gedreht denkt.)

Nach Obigem ist in Taf. II. Fig. 1. und Fig. 2.

$$\text{Bog.}\,NBF = \text{Bog.}\,FJR = \text{Bog.}\,RTQ = \text{Bog.}\,QSN = 90^{\circ},$$
$$\text{„}\ BFJ = \text{„}\ BMG = \text{„}\ BNS = \ldots\ldots = 90^{\circ},$$
$$\text{„}\ MDL = \text{„}\ MGH = \text{„}\ MBO = \text{„}\ MNP = 90^{\circ}.$$

Da alle grössten Kreise, welche aus einem beliebigen Punkte des grössten Kreises *NBFRQS* beschrieben sind, den grössten Kreis *NMDLR*, dessen Ebene durch den Mittelpunkt gelegt ist

und auf der Ebene jenes grössten Kreises rechtwinklicht steht, in einem um 90^0 von dem grössten Kreise $NBFJRQ$ entfernten Punkte schneiden, so ist auch

$$\text{Bog.}\,NMD = \text{Bog.}\,DLR = \text{Bog.}\,DEJ = \text{Bog.}\,DGS = 90^0;$$

ferner sind die sphärischen Winkel:

$$\angle FLD = \angle DJF = \angle MOF = \angle BGD = \angle FNM = 90^0.$$

Von den auf der Kugeloberfläche durch die angegebene Konstruktion entstandenen sphärischen Drei-, Vier- und Fünfecken müssen nun, Behufs des Folgenden, einer genauen Betrachtung unterworfen werden:

1) das sphärische Fünfeck $MDEFB$ (Taf. II. Fig. 1.),

2) die sphärischen Dreiecke BMN, MGD, DLE, EJF (Taf. II. Fig. 1.) und BOF (Taf. II. Fig. 2.).

Der leichteren Uebersicht wegen soll im Folgenden die Seite MB durch a, die Seite MN durch b, die Seite NB durch c, der Winkel MBN durch B, und der Winkel BMN durch C bezeichnet werden.

Durch Betrachtung der Figuren ergibt sich:

a) Das Maass der Seiten des sphärischen Fünfecks $MDEFB$ ist den in dem ursprünglich gegebenen, rechtwinklichten sphärischen Dreieck NMB vorkommenden Seiten und Winkeln, oder deren Komplementen beziehungsweise gleich. Es ist nämlich

1) $MB = a$,

2) $MD = DN - MN = 90^0 - b$,

3) $BF = FN - BN = 90^0 - c$;

ferner $EG = DS$; zieht man hiervon
$DG = DG$ ab, so erhält man

4) $ED = GS = \angle B$;

endlich ist $FL = EH$
und $EL = EL$; dieses abgezogen

gibt 5) $EF = LH = \angle C$.

b) Die Dreiecke, welche über den Seiten des sphärischen Fünfecks liegen, sind sämmtlich rechtwinklicht und zwar:

ΔBNM bei N,
ΔMGD „ G,
ΔDLE „ L,
ΔEJF „ J,
ΔFOB „ O.

Ferner ist das Maass der Seiten dieser Dreiecke den Seiten und Winkeln, oder deren Komplementen, welche in dem ursprünglich gegebenen Dreieck BNM vorkommen, gleich. Von den Seiten, welche zugleich Seiten des sphärischen Fünfecks sind, ist dieses schon nachgewiesen; für die übrigen ergibt es sich aus Folgendem.

In dem Dreiecke BNM sind die drei Seiten a, b, c.

In dem Dreiecke MGD ist

$$DM = 90^0 - b \text{ (s. oben)},$$
$$MG = GB - MB = 90^0 - a,$$
$$DG = GE - ED = 90^0 - B.$$

In dem Dreiecke DLE ist

$$ED = B \text{ (s. oben)},$$
$$LD = LM - DM = 90^0 - (90^0 - b) = b,$$
$$LE = LF - EF = 90^0 - C.$$

In dem Dreieck EJF ist

$$EF = C \text{ (s. oben)},$$
$$EJ = DJ - DE = 90^0 - B,$$
$$JF = JB - FB = 90^0 - (90^0 - c) = c.$$

In dem Dreiecke FOB endlich ist

$$BF = 90^0 - c,$$
$$FO = EO - EF = 90^0 - C,$$
$$BO = OM - MB = 90^0 - a.$$

Zusammenhang unter den Seiten des rechtwinklichten Dreiecks, so wie unter je drei Seiten des sphärischen Fünfecks.

§. 2. *Lehrsatz.* In jedem rechtwinklichten sphärischen Dreiecke ist der Kosinus der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite gleich dem Produkte aus den Kosinus der beiden Seiten, welche den rechten Winkel einschliessen.

Beweis. Es sei BNM (Taf. II. Fig. 1.) ein bei N rechtwinklichtes sphärisches Dreieck und $BKNM$ die demselben zugehörige körperliche Ecke. Man fälle von B auf KN das Loth BA, und vom Fusspunkte dieses Lothes A auf KM das Loth CA und verbinde B und C durch eine gerade Linie. Hierdurch entstehen drei Dreiecke, von welchen BCK und KCA bei C und BAK bei A rechtwinklicht ist.

Es ist nun

$$\text{im } \triangle AKC: \frac{KC}{KA} = \cos MN, \text{ folglich } KC = KA . \cos MN; \quad (1)$$

$$\text{im } \triangle BAK: \frac{KA}{KB} = \cos BN, \quad \text{„} \quad KA = KB . \cos BN. \quad (2)$$

Substituirt man den Werth von KA aus (2) in (1), so erhält man:

$$KC = KB \cdot \cos MN \cdot \cos BN,$$

$$\frac{KC}{KB} = \cos MN \cdot \cos BN.$$

Da nun

$$\frac{KC}{KB} = \cos MB,$$

so ist auch

$$\cos MB = \cos MN \cdot \cos BN.$$

Ist nun über der Seite eines rechtwinklichten sphärischen Dreiecks, welche dem rechten Winkel gegenüber steht, auf die oben angegebene Weise ein sphärisches Fünfeck verzeichnet, so gelten von diesem folgende Lehrsätze.

§. 3. *Lehrsatz.* Der Kosinus jeder Seite des sphärischen Fünfecks ist gleich dem Produkte der Sinus der beiden mit ihr zusammenstossenden Seiten.

Beweis. Nach Voranstehendem ist im Dreiecke MNB (Taf. II. Fig. 1.)

$$\cos MB = \cos MN \cdot \cos BN;$$

ferner $BN = 90^\circ - FB$ und $MN = 90^\circ - DM$; durch Substitution dieser Werthe in die voranstehende Gleichung ergibt sich, dass auch

$$\cos MB = \cos(90^\circ - FB) \cdot \cos(90^\circ - DM).$$

Da nun $\cos(90^\circ - FB) = \sin FB$ und $\cos(90^\circ - DM) = \sin DM$, so ist auch

$$\cos MB = \sin DM \cdot \sin FB.$$

Eben so beweist man mittelst des Dreiecks DGM, dass $\cos DM = \sin MB \cdot \sin DE$, mittelst des Dreiecks DLE, dass $\cos ED = \sin DM \cdot \sin EF$, u. s. w.

§. 4. *Lehrsatz.* Der Kosinus jeder Seite des sphärischen Fünfecks ist gleich dem Produkte der Kotangenten der beiden Seiten, womit sie nicht zusammenstösst.

Beweis. Es ist nach §. 3.

$$\cos DE = \sin DM \cdot \sin EF,$$

$$\cos EF = \sin DE \cdot \sin FB,$$

$$\text{folglich } \cos DE \cdot \cos EF = \sin DM \cdot \sin EF \cdot \sin DE \cdot \sin FB.$$

Dividirt man diese Gleichung auf beiden Seiten durch $\sin EF \cdot \sin DE$, so erhält man

$$\frac{\cos DE \cdot \cos EF}{\sin DE \cdot \sin EF} = \sin DM \cdot \sin FB. \qquad \text{(a)}$$

Es ist aber

$$\frac{\cos DE}{\sin DE} = \operatorname{cotg} DE, \quad \frac{\cos EF}{\sin EF} = \operatorname{cotg} EF$$

und

$$\sin DM . \sin FB = \cos MB.$$

Durch Substitution dieser Werthe in (a) erhält man

$$\operatorname{cotg} DE . \operatorname{cotg} EF = \cos MB.$$

Diese Gleichung erhält man immer, wenn man zwei beliebige Seiten des sphärischen Fünfecks, welche in einem Punkte zusammentreffen, als Funktion der mit jeder von ihnen zusammenstossenden Seiten ausdrückt (§. 3.), die beiden Ausdrücke, welche man erhält, multiplicirt und die dann vorliegende Gleichung möglichst vereinfacht.

Auflösung der beim rechtwinklichten sphärischen Dreiecke vorkommenden Aufgaben, vermittelt durch das sphärische Fünfeck.

§. 5. Für das Folgende, wie für den praktischen Gebrauch überhaupt, ist es bequem, das Bild des sphärischen Fünfecks und der über seinen Seiten liegenden Dreiecke, abgesondert von der Kugel, vor Augen zu haben, wie es in Taf. II. Fig. 3. dargestellt ist.

Zu den Stücken, welche bei der Berechnung des rechtwinklichten sphärischen Dreiecks in Betracht kommen, gehören die Seiten a, b, c und die Winkel B und C. Diesen Grössen oder ihren Komplementen entsprechen die Seiten des beschriebenen sphärischen Fünfecks beziehungsweise. Soll aus je zwei von ihnen eine dritte berechnet werden, so suche man die ihnen oder ihren Komplementen entsprechenden Seiten in der Figur auf, drücke ihren Zusammenhang entsprechend einem der beiden Lehrsätze §. 3. und § 4. aus, und forme die Gleichung, welche man dadurch erhält, so um, dass die gesuchte Grösse auf einer Seite allein steht. Hierdurch ergibt sich die Formel, nach welcher die numerische Berechnung ausgeführt werden muss.

§. 6. *Aufgabe.* Gegeben die beiden Katheten b und c, gesucht:

a) Die Hypotenuse a.

Nach §. 2. ist

$$\cos a = \cos b . \cos c.$$

b) Der Winkel B.

Im Fünfeck (Taf. II. Fig. 3.) entspricht der Bogen DE als Maass dem Winkel B, ebenso ist $DM = 90^\circ - b$ und $FB = 90^\circ - c$. Nach §. 4. ist aber

$$\cos FB = \operatorname{cotg} DE . \operatorname{cotg} DM,$$

$$\cos(90^\circ - c) = \operatorname{cotg} B . \operatorname{cotg}(90^\circ - b).$$

Da nun $\cos(90-c)=\sin c$ und $\operatorname{cotg}(90-b)=\operatorname{tg} b$, so ist auch

$$\sin c=\operatorname{cotg} B \, . \operatorname{tg} b,$$

folglich

$$\operatorname{cotg} B=\frac{\sin c}{\operatorname{tg} b}.$$

Auf dieselbe Weise findet man

$$\operatorname{cotg} C=\frac{\sin b}{\operatorname{tg} c}.$$

§. 7. *Aufgabe.* Gegeben die eine Kathete b und die Hypotenuse a, gesucht:

a) Die Kathete c.

Aus $\cos a=\cos b . \cos c$ folgt, dass

$$\cos c=\frac{\cos a}{\cos b}.$$

b) Der von der Kathete b und Hypotenuse a eingeschlossene Neigungswinkel C.

Im Fünfeck entspricht der Bogen EF dem Winkel C, Bogen MB der Hypotenuse a und Bogen DM dem Komplemente 90^0-b von b. Nach §. 4. ist

$$\cos EF=\operatorname{cotg} MB \, . \operatorname{cotg} DM,$$

$$\cos C=\operatorname{cotg} a \, . \operatorname{cotg}(90^0-b),$$

$$\cos C=\operatorname{cotg} a \, . \operatorname{tg} b.$$

c) Der Winkel B, welcher der gegebenen Kathete gegenübersteht.

Da Bog. MB der Hypotenuse a, Bog. MD dem Komplemente 90^0-b von b und Bog. DE dem Winkel B entspricht, und nach §. 3.

$$\cos DM=\sin MB \, . \sin DE$$

ist, so ist

$$\cos(90-b)=\sin a \, . \sin B$$

oder $$\sin b=\sin a \, . \sin B,$$

$$\sin B=\frac{\sin b}{\sin a}.$$

§. 8. *Aufgabe.* Gegeben eine Kathete c und der ihr gegenüberstehende Neigungswinkel C, gesucht:

a) Die Kathete b.

Nach §. 6. b. ist $\sin b=\operatorname{cotg} C . \operatorname{tg} c$.

b) Die Hypotenuse a.

Nach §. 7. c. ist

$$\sin c = \sin a \,.\, \sin C,$$

woraus folgt, dass

$$\sin a = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

c) Der Neigungswinkel B.

Es entspricht dem Winkel B der Bog. DE, dem Winkel C der Bog. EF und dem Komplemente $90^0 - c$ von c der Bogen FB. Es ist

$$\cos EF = \sin ED \,.\, \sin FB,$$
$$\cos C = \sin B \,.\, \sin (90^0 - c),$$
$$\cos C = \sin B \,.\, \cos c,$$
$$\sin B = \frac{\cos C}{\cos c}.$$

§. 9. *Aufgabe.* Gegeben die beiden Neigungswinkel B und C, gesucht:

a) Die Kathete b.

Eben so wie §. 8. c. ergibt sich, dass

$$\cos B = \sin C \,.\, \cos b,$$

woraus folgt

$$\cos b = \frac{\cos B}{\sin C}.$$

b) Die Kathete c.

Nach §. 8. c. ist

$$\cos C = \sin B \,.\, \cos c,$$

folglich

$$\cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

c) Die Hypotenuse a.

Es ist

$$\cos MB = \operatorname{cotg} DE \,.\, \operatorname{cotg} EF,$$
$$\cos a = \operatorname{cotg} B \,.\, \operatorname{cotg} C.$$

VII.

Ueber die singulären Werthe bestimmter Integrale.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Sehr häufig kommen bestimmte Integrale von der Form

$$\int_a^b f(x,t)\,dt \qquad (1)$$

vor, worin x eine willkührliche Constante bedeutet und die Funktion $f(x,t)$ die Eigenschaft besitzt, für ein gewisses spezielles x sich zu annulliren, wie z. B. $l(1+xt)$ für $x=0$; in solchen Fällen meint man gewöhnlich, es müsse für diesen Werth von x auch der Werth des ganzen Integrales verschwinden, weil sich dasselbe auf $\int 0.dt$ reduzire. Diess ist indessen nichts weniger als allgemein richtig und es muss hier noch eine besondere Einschränkung hinzugefügt werden. Erinnert man sich nämlich, dass das in no. (1) aufgestellte Integral nichts Anderes als der Gränzwerth ist, welchem sich der Ausdruck

$$\delta[f(x,a)+f(x,a+\delta)+f(x,a+2\delta)+f(x,a+3\delta)+\ldots$$
$$\ldots+f(x,a+\overline{n-1}\,\delta)], \qquad (2)$$
$$\delta=\frac{b-a}{n},\ n \text{ ganz und positiv}$$

für unendlich wachsende n, also bis zur Null abnehmende δ, nähert, so erkennt man sogleich die Richtigkeit folgender Bemerkungen. In der Reihe (2) nimmt t successive die Werthe a, $a+\delta$, $a+2\delta,\ldots a+\overline{n-1}\,\delta=b-\delta$ an, d. h. es durchläuft stetig das Intervall $t=a$ bis $t=b$; ist nun $f(x,t)=0$ für jenen speziellen Werth,

der etwa x' heissen möge, gleichgültig, welchen von den Werthen a, $a+\delta$, $a+2\delta$ etc. man dem t geben möge, so verschwindet jedes Glied der Reihe (2) für sich, und folglich erhält man $\delta.0=0$ als Gränzwerth; oder mit anderen Worten: das Integral in (1) annullirt sich, sobald $f(x,t)=0$ ist für $x=x'$ und jedes t innerhalb des Intervalles a bis b. Anders aber wird die Sache, wenn es unter den Grössen a, $a+\delta$, $a+2\delta$, etc. eine, d. h. innerhalb des Intervalles a bis b einen Werth von t, etwa t' giebt, welcher die Eigenschaft besitzt, dass die Funktion $f(x,t)$ für $x=x'$ und $t=t'$ unbestimmt oder gar unendlich wird; in diesem Falle wird nämlich eines der Glieder in no. (2) selbst unbestimmt oder unendlich, und man kann jetzt nicht mehr behaupten, dass der fragliche Gränzwerth, nämlich das Integral in (1), für $x=x'$ verschwinde. So z. B. annullirt sich der Werth des Integrales

$$\int_0^h \frac{x}{x^2+t^2} dt$$

für $x=0$ nicht, obgleich diess im Allgemeinen mit der Funktion $\frac{x}{x^2+t^2}$ der Fall ist. Innerhalb des Intervalles $t=0$ bis $t=h$ kommt nämlich auch der Werth $t=0$ vor und für diesen wird $\frac{x}{x^2+t^2}$ unbestimmt $=\frac{0}{0}$, wenn zugleich $x=0$ ist. Der wahre Werth jenes Integrales findet sich dagegen leicht durch unmittelbare Integration, denn es ist

$$\int_0^h \frac{x dt}{x^2+t^2} = \operatorname{Arctan} \frac{h}{x},$$

folglich, wenn x bis zur Gränze Null abnimmt,

$$\operatorname{Lim} \int_0^h \frac{x dt}{x^2+t^2} = \operatorname{Arctan} \infty = \frac{\pi}{2}.$$

Zu demselben Resultate gelangt man durch Einführung einer neuen Variabeln, indem man $t=x\tau$ setzt, wobei die neuen für τ geltenden Integrationsgränzen durch die Gleichungen $0=x\tau$, also $\tau=0$, und $h=x\tau$, also $\tau=\frac{h}{x}$, bestimmt werden. Es ist dann

$$\int_0^h \frac{x dt}{x^2+t^2} = \int_0^{\frac{h}{x}} \frac{d\tau}{1+\tau^2},$$

$$\operatorname{Lim} \int_0^h \frac{x dt}{x^2+t^2} = \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Ganz ähnlich verhält es sich mit dem Integrale

$$\int_0^h \{e^{-\alpha xt}-e^{-\beta xt}\}\frac{dt}{t},$$

wenn man x ins Unendliche wachsen lässt. Es ist dann zwar im Allgemeinen

$$\operatorname{Lim}\{e^{-\alpha xt}-e^{-\beta xt}\}=0,$$

aber desswegen der Werth des Integrales nicht $=0$ für $x=\infty$. Denn innerhalb des Integrationsintervalles kommt auch der Werth $t=0$ vor und für diesen und $x=\infty$ stellt sich der Bestandtheil $e^{-\alpha xt}-e^{-\beta xt}$ unter die unbestimmte Form $e^{-\infty\cdot 0}-e^{-\infty\cdot 0}$. Setzt man dagegen $t=\frac{\tau}{x}$, so wird

$$\int_0^h \{e^{-\alpha xt}-e^{-\beta xt}\}\frac{dt}{t}=\int_0^{hx}\{e^{-\alpha\tau}-e^{-\beta\tau}\}\frac{d\tau}{\tau},$$

und hieraus findet sich für unendlich wachsende x

$$\operatorname{Lim}\int_0^h \{e^{-\alpha xt}-e^{-\beta xt}\}\frac{dt}{t}=\int_0^{\infty}\{e^{-\alpha\tau}-e^{-\beta\tau}\}\frac{d\tau}{\tau}$$
$$=l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

indem man eine bekannte Formel in Anwendung bringt.

Diese besonderen Werthe des Integrales (1), welche für ein paar bestimmte Spezialisirungen $x=x'$, $t=t'$ eintreten können, heissen bekanntlich singuläre Werthe des Integrales und dienen in vielen Fällen zur Auffindung der Werthe doppelter oder mehrfacher Integrale, wovon bereits Cauchy einige Beispiele gezeigt hat. Ich gebe hier noch ein paar andere, die sich besonders dadurch auszeichnen, dass in den fraglichen Integralen willkührliche Funktionen und willkührliche Constanten vorkommen, von denen die letzteren gleichgültig für den Werth des Integrales sind.

1. Ich betrachte zunächst das Doppelintegral

$$S=\int_\varepsilon^\infty du\int_0^h \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}f(t)\,dt, \tag{3}$$

worin ε und h positive von Null verschiedene Grössen bezeichnen und die Funktion $f(t)$ so beschaffen sein soll, dass ihr Differenzialquotient $f'(t)$ stetig und endlich bleibt von $t=0$ bis $t=h$. Da unter dieser Voraussetzung $f(t)$ selbst weder unstetig noch unendlich wird, wenn t von 0 bis h geht, und da ferner der Ausdruck

$$\frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}$$

von $u=\varepsilon$ bis $u=\infty$ und $t=0$ bis $t=h$ niemals unendlich oder unbestimmt wird, so folgt, dass die Funktion zweier Variabeln (u und t)

$$\frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}f(t),$$

worauf sich die beiden Integrationen beziehen, während der vorhergenannten Intervalle endlich und stetig bleibt, und mithin ist es erlaubt, in dem Doppelintegrale S die Reihenfolge der Integrationen umzukehren, also zunächst nach u zu integriren. Diess giebt

$$S=\int_0^h f(t)\,dt\int_\varepsilon^\infty \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}du. \qquad (4)$$

Bei unbestimmter Integration nach u ist nun

$$\int \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}du=-\frac{u}{u^2+t^2},$$

und folglich, wenn man für u die Gränzen $u=\infty$, $u=\varepsilon$ einführt,

$$\int_0^\infty \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}du=\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}.$$

Substituiren wir diess in die Gleichung (4), so wird

$$S=\int^h f(t)\,dt\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+t^2}.$$

Ferner ist nach einem bekannten Satze, wenn $f'(t)$ stetig und endlich ist von $t=0$ bis $t=t$,

$$f(t)=f(0)+tf'(\lambda t),\ 1\geqq\lambda\geqq 0$$

und folglich, weil wir $f'(t)$ als stetig und endlich während des Intervalles 0 bis h voraussetzen,

$$S=f(0)\int_0^h\frac{\varepsilon dt}{\varepsilon^2+t^2}+\int_0^h\frac{\varepsilon tf'(\lambda t)\,dt}{\varepsilon^2+t^2}$$

$$=f(0)\,\mathrm{Arctan}\,\frac{h}{\varepsilon}+\varepsilon\int_0^h\frac{tf'(\lambda t)\,dt}{\varepsilon^2+t^2}.$$

Lassen wir jetzt die Grösse ε bis zur Gränze Null abnehmen, ist vermöge des ersten und letzten Werthes von S

$$\int_0^\infty du \int_0^h \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2} f(t)\, dt$$
$$=\frac{\pi}{2} f(0) + \mathrm{Lim}\left[\varepsilon \int_0^h \frac{t f'(\lambda t)}{\varepsilon^2+t^2} dt\right]. \qquad (5)$$

er Gränzwerth des Integrales rechts ergiebt sich leicht aus fol-
ender Bemerkung. Da $f'(t)$ innerhalb des Intervalles 0 bis h
dlich bleibt, so ist diess um so mehr mit $f'(\lambda t)$, wo $\lambda t < t$, der
ll, und folglich sind das Maximum und Minimum, welches $f'(\lambda t)$
nerhalb des genannten Intervalles erreicht, endliche Grössen.
zeichnen wir sie mit M und N, so ist

$$\varepsilon \int_0^h \frac{t f'(\lambda t)\, dt}{\varepsilon^2+t^2}$$
$$< \varepsilon M \int_0^h \frac{t\,dt}{\varepsilon^2+t^2} \text{ und } > \varepsilon N \int_0^h \frac{t\,dt}{\varepsilon^2+t^2},$$

h.

$$< M\left[\frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2+h^2) - \frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2)\right],$$
$$> N\left[\frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2+h^2) - \frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2)\right].$$

a sich nun für unendlich abnehmende ε die Produkte

$$\frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2+h^2) \text{ und } \frac{\varepsilon}{2} l(\varepsilon^2)$$

r Gränze Null nähern, so folgt

$$\mathrm{Lim}\left[\varepsilon \int_0^h \frac{t f'(\lambda t)\, dt}{\varepsilon^2+t^2}\right] = 0,$$

d nach no. (5) ergiebt sich jetzt das bemerkenswerthe Theorem

$$\int_0^\infty du \int_0^h \frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2} f(t)\, dt = \frac{\pi}{2} f(0). \qquad (6)$$

II. Für ein zweites Beispiel gehen wir von dem Doppelin-
egrale

$$S = \int_0^\omega du \int_0^h (\beta e^{-\beta u t} - \alpha e^{-\alpha u t}) f(t)\, dt \qquad (7)$$

s, worin ω und h positive von Null verschiedene Constanten
deuten und der Funktion $f(t)$ die Eigenschaft zugeschrieben
rd, dass ihre Derivirte $f'(t)$ stetig und endlich bleibt von $t=0$
s $t=h$. Da unter diesen Voraussetzungen die Funktion

$$(\beta e^{-\beta ut} - \alpha e^{-\alpha ut})\, f(t)$$

weder unstetig noch unendlich oder unbestimmt wird innerhalb der Integrationsintervalle $u=0$ bis $u=\omega$, $t=0$ bis $t=h$, so darf man statt der Gleichung (7) durch Umkehrung der Integrationsordnung auch die folgende setzen:

$$S=\int_0^h f(t)\,dt\int_0^\omega (\beta e^{-\beta ut}-\alpha e^{-\alpha ut})\,du$$

$$=\int_0^h f(t)\,dt\,\frac{e^{-\alpha t\omega}-e^{-\beta t\omega}}{t}.$$

Vermöge der Gleichung $f(t)=f(0)+tf'(\lambda t)$ ist dann weiter

$$S=f(0)\int_0^h \frac{e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}}{t}\,dt$$

$$+\int_0^h f'(\lambda t)\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt.$$

Setzt man im ersten Integrale $\omega t=\tau$, so wird

$$S=f(0)\int_0^{h\omega}\left[e^{-\alpha\tau}-e^{-\beta\tau}\right]\frac{d\tau}{\tau}$$

$$+\int_0^h f'(\lambda t)\left[e^{-\alpha t\omega}-e^{-\beta t\omega}\right]dt.$$

Lassen wir nun ω ins Unendliche hinaus wachsen, so ergiebt sich vermöge des ersten und letzten Werthes von S:

$$\int_0^\infty du\int_0^h\left[\beta e^{-\beta ut}-\alpha e^{-\alpha ut}\right]f(t)\,dt$$

$$=f(0)\,l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+\text{Lim}\left[\int_0^h f'(\lambda t)\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt\right]. \quad (8)$$

Da $f'(\lambda t)$ von $t=0$ bis $t=h$ stetig und endlich bleibt, so sind sein Maximum M und Minimum N, welche es innerhalb dieses Intervalles erreicht, endliche Grössen und

$$\int_0^h f'(\lambda t)\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt$$

$$< M\int_0^h\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt \text{ und } > N\int_0^h\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt,$$

d. h.

$$< \frac{M}{\omega}\left[\frac{1-e^{-\alpha h}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\beta h}}{\beta}\right],$$

$$< \frac{N}{\omega}\left[\frac{1-e^{-\alpha h}}{\alpha} - \frac{1-e^{-\beta h}}{\beta}\right];$$

woraus sich sogleich ergiebt

$$\text{Lim}\left\{\int_0^h f'(\lambda t)\left[e^{-\alpha\omega t}-e^{-\beta\omega t}\right]dt\right\} = 0,$$

und folglich nach no. (8)

$$\int_0^\infty du\int_0^h\left[\beta e^{-\beta ut}-\alpha e^{-\alpha ut}\right]f(t)\,dt = f(0)\,l\left(\frac{\beta}{\alpha}\right). \quad (9)$$

Beide Theoreme (6) und (9) haben das Besondere, dass der Werth des in ihnen vorkommenden Doppelintegrales unabhängig von der Constanten h ist, vorausgesetzt, dass dieselbe positiv und >0 bleibt. Setzt man $h=\infty$ und wählt dann $f(t)$ so, dass $f'(t)$ stetig und endlich bleibt von $t=0$ bis $t=\infty$, so kann man leicht ein paar passende Beispiele finden, für welche sich die Integrationen ausführen lassen.

Setzt man endlich noch $f(t)=\varphi(x+t)$, wo nun $\varphi'(z)$ stetig und endlich bleiben muss von $z=x$ bis $z=x+h$, so gehen die beiden Theoreme (6) und (9) in die etwas allgemeineren über:

$$\int_0^\infty du\int_0^h\frac{u^2-t^2}{(u^2+t^2)^2}\varphi(x+t)\,dt = \frac{\pi}{2}\varphi(x),$$

$$\int_0^\infty du\int_0^h\left[be^{-but}-ae^{-aut}\right]\varphi(x+t)\,dt = l\left(\frac{b}{a}\right)\varphi(x);$$

wobei die Variabele x der Funktion φ als arbiträre Constante hinsichtlich der beiden nach t und u auszuführenden Integrationen figurirt.

VIII.

Entwickelung bestimmter Integrale.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Der Werth eines bestimmten Integrals lässt sich häufig dadurch finden, dass man für einen Factor der Function unter dem Integralzeichen ein bestimmtes Integral setzt, und dann in dem entstandenen Doppelintegrale die Integration umkehrt. Da die Anwendung dieser Methode mich nicht blos zu einer einfachen Herleitung bekannter Integralwerthe, sondern auch zur Entwickelung neuer, auf anderem Wege vielleicht nur umständlich zu ermittelnder Integrale geführt hat, so dürfte das Folgende nicht ohne Interesse sein.

I. Von dem Integral $\omega = \int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x^2}$.

Setzt man für den Factor $\frac{1}{1+x^2}$ das bestimmte Integral $\int_0^\infty e^{-zx}\sin z\partial z$, und kehrt die Integration um, so erhält man $\omega = \int_0^\infty \cos mx\partial x \int_0^\infty e^{-zx}\sin z\partial z = \int_0^\infty \sin z\partial z \int_0^\infty e^{-zx}\cos mx\partial x$. Bekanntlich ist nun $\int_0^\infty e^{-zx}\cos mx\partial x = \frac{z}{z^2+m^2}$, folglich $\omega = \int_0^\infty \frac{z\sin z\partial z}{z^2+m^2}$, also, $z = mx$ gesetzt, $\omega = \int_0^\infty \frac{x\sin mx\partial x}{1+x^2}$, wo m positiv sein muss. Da nun offenbar $\frac{\partial\omega}{\partial m} = -\int_0^\infty \frac{x\sin mx\partial x}{1+x^2}$, so erhält man die Differentialgleichung $\omega + \frac{\partial\omega}{\partial m} = 0$, deren Auflö-

sung sogleich $\omega = Ce^{-m}$ giebt, wo C eine von m unabhängige Constante ist. Um diese zu bestimmen, braucht man nur $m=0$ zu setzen, wobei ω in $\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ übergeht; es ist also $C = \frac{\pi}{2}$, und folglich

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-m} \, (m \geqq 0),$$

$$-\frac{\partial \omega}{\partial m} = \int_0^\infty \frac{x \sin mx \partial x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-m} (m > 0).$$

Wird $x = \frac{z}{a}$, und dann $m = ab$ gesetzt, so kommt

$$(1) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} e^{-ab}, \\ \int_0^\infty \frac{x \sin bx\partial x}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2} e^{-ab}; \end{cases}$$

wo a und b positive Grössen sind. Auch darf in der ersten Gleichung $b=0$, in der zweiten $a=0$ sein.

Lacroix erwähnt im Traité. Tom III. p. 492—93 nur beiläufig, dass ein Verfahren von Laplace, den Werth des obigen Integrals zu entwickeln, auf Doppelintegration zurückkomme (c'est par la considération des intégrales doubles, que M. Laplace a obtenu, entre les limites $x=0$ et $x=$ infini, la valeur de $\int \frac{\partial x \cos rx}{1+x^2}$, sind seine Worte). Mir ist diese Methode übrigens nicht gegenwärtig, doch scheint es die von Minding (Integralrechnung. Berlin. 1836. S. 240.) in Anwendung gebrachte zu sein, welche auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung führt.

Ganz ungenügend ist die Herleitung von Poisson, welche Lacroix a. a. O. aufgenommen hat. Poisson differenzirt nämlich die Gleichung $\omega = \int_0^\infty \frac{\cos mx\partial x}{1+x^2}$ zweimal nach m, und findet $\frac{\partial^2 \omega}{\partial m^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2 \cos mx\partial x}{1+x^2}$, und daraus $\omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial m^2} = \int_0^\infty \cos mx\partial x$. Er setzt den Werth dieses Integrals $=0$, wegen der bekannten Gleichung $\int_0^\infty e^{-ax} \cos mx\partial x = \frac{a}{a^2+m^2}$. Das Integral $\int_0^\infty \cos mx\partial x$ hat aber gar keinen bestimmten Werth, wie aus $\int \cos mx\partial x = \frac{\sin mx}{m} + \text{const.}$ erhellt, und somit würde der Werth von $\omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial m^2}$ vielmehr unbestimmt sein. Dies ist indessen wieder nicht der Fall, da aus der obigen strengen Herleitung der Gleichung $\omega = \frac{\pi}{2} e^{-m}$ in der That folgt $\omega - \frac{\partial^2 \omega}{\partial m^2} = 0$. Worin liegt nun dieser

Widerspruch? Darin, dass die Gleichung $\frac{\partial^2 \omega}{\partial m^2} = -\int_0^\infty \frac{x^2 \cos mx \partial x}{1+x^2}$ ganz unrichtig ist. Das Integral rechter Hand ist **unbestimmt**, indem $\int_0^\infty \frac{x^2 \cos mx \partial x}{1+x^2} = \int_0^\infty \frac{(1+x^2-1)\cos mx \partial x}{1+x^2} = \int_0^\infty \cos mx \partial x - \int_0^\infty \frac{\cos mx \partial x}{1+x^2}$ ist, wo nur der erste Theil unbestimmt, der andere bestimmt ist. Hieran knüpft sich eine wichtige Bemerkung.

Wenn in einem bestimmten Integral eine der Grenzen 0 oder ∞ ist, so darf man nicht immer nach einer Constante unter dem Integralzeichen differenziren, d. h. es ist nicht in allen Fällen $\frac{\partial}{\partial a}\int_m^n f(a,x)\partial x = \int_m^n \frac{\partial f(a,x)}{\partial a}\partial x$, sobald eine der Grenzen $m, n = 0$ oder ∞ ist. Man wird auf diesen Ausnahmefall geführt, wenn man den Beweis dieses Satzes aufmerksam durchgeht. Besondere Untersuchungen darüber behalte ich mir vor; hier mag ein Beispiel genügen. Es ist bekanntlich $\int_0^\infty \frac{\sin \beta x}{x}\partial x = \frac{1}{2}\pi$, wenn β positiv ist. Differenzirt man nach β auf gewöhnliche Art, so kommt $\int_0^\infty \cos \beta x \partial x = 0$, was nicht richtig ist.

Dieselbe Bemerkung findet ihre Anwendung bei den Formeln, welche man durch successive Differentiation der zweiten Gleichung (1) nach b gewöhnlich ableitet, nämlich

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k}\cos bx \partial x}{x^2+a^2} = (-1)^k \frac{\pi}{2} a^{2k-1} e^{-ab},$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{2k+1}\sin bx \partial x}{x^2+a^2} = (-1)^k \frac{\pi}{2} a^{2k} e^{-ab}.$$

Diese Formeln gelten nur für $k=0$, für $k=1, 2, 3$, etc. sind die Integrale linker Hand **unbestimmt**, wie man durch Zerlegung der unächten Function $\frac{x^{2k}}{x^2+a^2}$ oder $\frac{x^{2k+1}}{x^2+a^2}$ in eine ganze und eine ächt gebrochene sogleich findet.

II. Von dem Integral $\omega = \int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}\log(uz)$.

Für $\log(uz)$ setze ich hier $\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos uzx}{x}\partial x$. Die Identität beider Ausdrücke wird auf folgende Art nachgewiesen.

Es sei $\varrho = \int_p^\infty \frac{\cos x - \cos xz}{x}\partial x = \int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x - \int_p^\infty \frac{\cos xz}{x}\partial x$, wo $p > 0$ sein soll, damit beide Integrale bestimmte endliche Werthe haben. Setzt man nun im zweiten Theil $xz = y$, so kommt $\int_p^\infty \frac{\cos xz}{x}\partial x = \int_{pz}^\infty \frac{\cos y}{y}\partial y$, oder $= \int_{pz}^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x$. Daher ist

$\varrho = \int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x - \int_{pz}^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x = \int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x + \int_\infty^{pz} \frac{\cos x}{x}\partial x$ $= \int_p^{pz} \frac{\cos x}{x}\partial x$. Entwickelt man nun $\frac{\cos x}{x}$ in eine Reihe, und integrirt, so kommt

$$\varrho = \log(pz) - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(pz)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(pz)^4}{1.2....4} - \ldots$$
$$-\{\log p - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1....4} - \ldots\} = \log z - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{(pz)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(pz)^4}{1.2....4} - \ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2....4} + \ldots$$

Lässt man endlich p sich der Null nähern, so erhält man

$$(2)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x - \cos xz}{x}\partial x = lz,$$

und folglich $\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos uzx}{x}\partial x = \log(uz)$. Wird also dieser Werth von $\log(uz)$ in dem vorgelegten Integrale ω substituirt, und dann die Integration umgekehrt, so kommt

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos uzx}{x}\partial x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}(\cos x - \cos uxz).$$

Der erste Theil des zweiten Integrals, nämlich $\int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}\cos x$ ist $= \frac{\pi}{2b}e^{-ab}\cos x$ nach (1); ferner hat man $\int_0^\infty \frac{\cos az\cos uxz}{z^2+b^2}\partial z$ $= \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(a+ux)z + \cos(a-ux)z}{z^2+b^2}\partial z = \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\partial z$ $+ \tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\cos(a-ux)z}{z^2+b^2}\partial z$, wo der erste Theil $= \frac{\pi}{4b}e^{-b(a+ux)}$ ist (nach (1)). Was aber den zweiten Theil betrifft, so ist er $= \frac{\pi}{4b}e^{\mp(a-ux)b}$, das obere oder untere Zeichen genommen, jenachdem $a-ux$ positiv oder negativ ist, d. i. jenachdem x zwischen den Grenzen 0 und $\frac{a}{u}$, oder zwischen $\frac{a}{u}$ und ∞ liegt. Daher ist offenbar

$$(3)\quad \int_0^\infty \frac{\cos az\cos uxz}{z^2+b^2}\partial z = \frac{\pi}{4b}e^{-ab}(e^{bux}+e^{-bux}) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=\frac{a}{u},$$
$$= \frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})e^{-bux} \text{ von } x=\frac{a}{u} \text{ bis } x=\infty.$$

Hiernach ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}(\cos x-\cos uxz)=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\left(\cos x-\frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2}\right)$$

von $x=0$ bis $x=\frac{a}{u}$,

$$=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\cos x-\frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})e^{-bux}$$

von $x=\frac{a}{u}$ bis $x=\infty$.

Theilt man also das Integral ω von $x=0$ bis $x=\frac{a}{u}$ und von $x=\frac{a}{u}$ bis $x=\infty$, so kommt

$$\omega=\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\int_0^{\frac{a}{u}}\left(\cos x-\frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2}\right)\frac{\partial x}{x}+\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\int_{\frac{a}{u}}^\infty\frac{\cos x}{x}\partial x$$

$$-\frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})\int_{\frac{a}{u}}^\infty\frac{e^{-bux}}{x}\partial x.$$

Die Function $\int_{\frac{a}{u}}^\infty\frac{e^{-bux}}{x}\partial x=-\int_\infty^{ab}\frac{e^{-y}}{y}\partial y$ ist gleich $-li(e^{-ab})$, wo

$$li(e^{-ab})=C+\log(ab)-ab+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(ab)^2}{1.2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(ab)^3}{1.2.3}+\ldots,$$

$C=0{,}5772156\ldots$ die Constante des Integrallogarithmus.

Setzen wir aber, wie schon früher geschehen,

$$Ei(z)=C+\log z+z+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{1.2}+\tfrac{1}{3}\cdot\frac{z^3}{1.2.3}+\ldots\ ^{*}),$$

so wird $\int_{\frac{a}{u}}^\infty\frac{e^{-bux}}{x}\partial x=-Ei(-ab)$.

Die Function $\int_\infty^m\frac{\cos x}{x}\partial x$ ist in einer früheren Abhandlung (Theil X. Nr. XXII.) mit $Ci(m)$ bezeichnet, und dafür hat man die Reihe

$$Ci(m)=C+\log m-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{m^2}{1.2}+\tfrac{1}{4}\cdot\frac{m^4}{1.2\ldots4}-\ldots,$$

so dass also $\int_{\frac{a}{u}}^\infty\frac{\cos x}{x}\partial x=-Ci\left(\frac{a}{u}\right)$ ist.

---

*) Ist z negativ, oder $z=-y$, wo y positiv, so muss man $\log y$ statt $\log z$ nehmen. Diese Unterscheidung fällt weg, wenn man $\frac{1}{2}\log.(z)^2$ in der Formel schreibt.

Um endlich $\int_0^{\frac{a}{u}} (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2})\frac{\partial x}{x}$ weiter zu entwickeln, löse man den Cosinus und die Exponentialfunctionen in unendliche Reihen auf und integrire; man erhält dann

$$\int (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2})\frac{\partial x}{x} = -\tfrac{1}{2}.\frac{x^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}.\frac{x^4}{1.2....4} .....$$

$$-\tfrac{1}{2}.\frac{(bux)^2}{1.2} - \tfrac{1}{4}.\frac{(bux)^4}{1.2...4} - ...,$$

folglich

$$\int_0^{\frac{a}{u}} (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2})\frac{\partial x}{x} = -\tfrac{1}{2}.\frac{\left(\frac{a}{u}\right)^2}{1.2} + \tfrac{1}{4}.\frac{\left(\frac{a}{u}\right)^4}{1.2....4} - \tfrac{1}{6}.\frac{\left(\frac{a}{u}\right)^6}{1.2...6} + ...$$

$$-\tfrac{1}{2}.\frac{(ab)^2}{1.2} - \tfrac{1}{4}.\frac{(ab)^4}{1.2....4} - \tfrac{1}{6}.\frac{(ab)^6}{1.2...6} - ...$$

Der obere Theil rechter Hand ist gleich $Ci\left(\frac{a}{u}\right) - C - \log\left(\frac{a}{u}\right)$; der untere, wie man leicht findet, gleich $C + \log(ab) - \frac{1}{2}Ei(ab) - \frac{1}{2}Ei(-ab)$, also endlich

$$\int_0^{\frac{a}{u}} (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2})\frac{\partial x}{x} = \log(ub) + Ci\left(\frac{a}{u}\right)$$

$$-\tfrac{1}{2}Ei(ab) - \tfrac{1}{2}Ei(-ab).$$

Substituirt man nun alle die gefundenen Werthe in dem obigen Ausdruck von ω, so kommt

$$\omega = \frac{\pi}{2b}e^{-ab}\left[\log(ub) + ci\left(\frac{a}{u}\right) - \tfrac{1}{2}Ei(ab) - \tfrac{1}{2}Ei(-ab)\right]$$

$$-\frac{\pi}{2b}e^{-ab}\,Ci\left(\frac{a}{u}\right) + \frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})\,Ei(-ab),$$

oder durch Zusammenziehung

$$(4)\quad \int_0^\infty \frac{\cos az\partial z}{z^2+b^2}\log(uz)$$

$$= \frac{\pi}{4b}e^{-ab}\left[2\log(ub) - Ei(ab)\right] + \frac{\pi}{4b}e^{+ab}Ei(-ab).$$

Die Grössen a, b, u sind hier, wie auch im Folgenden, stets als **positiv** zu betrachten.

Auf eine ganz ähnliche Art kann man $\Theta = \int_0^\infty \frac{z\sin az\partial z}{z^2+b^2}\log(uz)$ entwickeln. Man erhält nämlich

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{z \sin az\,\partial z}{z^2+b^2} \int_0^\infty (\cos(x - \cos uzx)\frac{\partial x}{x}$$

$$= \int_0^\infty \frac{\partial x}{x} \int_0^\infty \frac{z \sin az\,\partial z}{z^2+b^2} (\cos x - \cos uxz).$$

Hier ist nun nach (1) $\int_0^\infty \frac{z \sin az\partial z}{z^2+b^2} \cos x = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \cos x$; ferner

$$\int_0^\infty \frac{z \sin az \cos uxz\partial z}{z^2+b^2} = \tfrac{1}{2} \int_0^\infty z\partial z.\frac{\sin(a+ux)z + \sin(a-ux)z}{z^2+b^2}$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{z \sin(a+ux)z\partial z}{z^2+b^2} + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{z \sin(a-ux)z\partial z}{z^2+b^2}$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-b(a+ux)} + \tfrac{1}{2} \int_0^\infty \frac{z \sin(a-ux)z}{z^2+b^2} \partial z.$$

Ist $a-ux$ positiv, oder x zwischen den Grenzen 0 und $\frac{a}{u}$, so wird das letzte Integral gleich $\frac{\pi}{2} e^{-b(a-ux)}$, wenn dagegen $a-ux$ negativ ist, oder x zwischen $\frac{a}{u}$ und ∞ liegt, so wird es gleich $-\frac{\pi}{2} e^{+b(a-ux)}$, wie leicht erhellt, folglich

$$(5 \quad \int_0^\infty \frac{z \sin az \cos uxz\partial z}{z^2+b^2} = \frac{\pi}{4} e^{-ab} (e^{bux} + e^{-bux}) \text{ von } x=0 \text{ bis } x = \frac{a}{u},$$

$$= \frac{\pi}{4} (e^{-ab} - e^{ab}) e^{-bux} \text{ von } x = \frac{a}{u} \text{ bis } x = \infty;$$

also

$$\int_0^\infty \frac{z \sin az\,\partial z}{z^2+b^2} (\cos x - \cos uxz)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-ab} (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2}) \text{ von } x=0 \text{ bis } x = \frac{a}{u},$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-ab} \cos x - \frac{\pi}{4} (e^{-ab} - e^{ab}) e^{-bux} \text{ von } x = \frac{a}{u} \text{ bis } x = \infty.$$

Nach dem Obigen ist also

$$\Theta = \frac{\pi}{2} e^{-ab} \int_0^{\frac{a}{u}} (\cos x - \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{2}) \frac{\partial x}{x} + \frac{\pi}{2} e^{-ab} \int_{\frac{a}{u}}^\infty \frac{\cos x}{x} \partial x$$

$$- \frac{\pi}{4} (e^{-ab} - e^{ab}) \int_{\frac{a}{u}}^\infty \frac{e^{-bux}}{x} \partial x,$$

daraus wie vorher

$$(6)\quad \int_0^\infty \frac{z\sin az\,\partial z}{z^2+b^2}\log(uz)=\frac{\pi}{4}e^{-ab}[2\log(ub)-Ei(ab)]$$
$$-\frac{\pi}{4}e^{+ab}Ei(-ab).$$

Die beiden Gleichungen (4) und (6) hat **Schlömilch** im **Archiv. Theil V. p. 211.** und 212. mit Hülfe des **Fourier'schen Theorems** gefunden, wobei nur zu bemerken, dass dort die Functionen $Ei(ab)$, $Ei(-ab)$ durch $li(e^{ab})$, $li(e^{-ab})$ bezeichnet sind.

III. Von dem Integral $\omega=\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\arctang(uz)$.

Ich setze hier $\arctang(uz)=\int_0^\infty \frac{\sin uzx}{x}e^{-x}\partial x$. Diese Formel erhält man nämlich auf folgende Art. Es ist $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\partial x=\frac{a}{a^2+b^2}$. Multiplicirt man diese Gleichung mit ∂b, integrirt von $b=\alpha$ bis $b=\beta$, und kehrt die Integration um, so entsteht

$$\int_\alpha^\beta \partial b\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\partial x=\int_0^\infty e^{-ax}\partial x\int_\alpha^\beta \cos xb\partial b=\int_\alpha^\beta \frac{a\partial b}{a^2+b^2},$$

folglich, wenn man die Integrationen ausführt,

$$(7)\quad \int_0^\infty \frac{\sin\beta x-\sin\alpha x}{x}e^{-ax}\partial x=\arctang\frac{\beta}{a}-\arctang\frac{\alpha}{a}.$$

Für $\alpha=0$, $a=1$ kommt

$$\int_0^\infty \frac{\sin\beta x}{x}e^{-x}\partial x=\arctang\beta,$$

also auch $\int_0^\infty \frac{\sin uzx}{x}e^{-x}\partial x=\arctang(uz)$. Wird also dieser Werth von $\arctang(uz)$ in den Ausdruck von ω gesetzt, so erhält man

$$\omega=\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\int_0^\infty \frac{\sin uzx}{x}e^{-x}\partial x$$
$$=\int_0^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x}\int_0^\infty \frac{\sin az\sin uxz}{z^2+b^2}\partial z$$
$$=\tfrac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}\partial x}{x}\int_0^\infty \frac{\cos(a-ux)z-\cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\partial z.$$

Führt man die letzte Integration wie in II. mit gehöriger Unterscheidung der Grenzen von x aus, so erhält man leicht

$$\omega=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{e^{-x}\partial x}{x}(e^{bux}-e^{-bux})+\frac{\pi}{4b}(e^{ab}-e^{-ab})\int_{\frac{a}{u}}^{\infty}\frac{e^{-x}\partial x}{x}e^{-bux},$$

oder $1-bu=m$, $1+bu=n$ gesetzt,

$$\omega=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{e^{-mx}-e^{-nx}}{x}\partial x+\frac{\pi}{4b}(e^{ab}-e^{-ab})\int_{\frac{a}{u}}^{\infty}\frac{e^{-nx}\partial x}{x}.$$

Nun hat man

$$\int_{\frac{a}{u}}^{\infty}\frac{e^{-nx}\partial x}{x}=-Ei(-\frac{na}{u})=-Ei(-\frac{a}{u}-ab),$$

und findet durch unbestimmte Integration leicht

$$\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{e^{-mx}-e^{-nx}}{x}\partial x=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+bu}{1-bu}\right)^2+Ei(-\frac{a}{u}+ab)-Ei(-\frac{a}{u}-ab),$$

folglich durch Substitution und Zusammenziehung

$$(8)\quad\int_0^{\infty}\frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}(uz)$$
$$=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}[\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+bu}{1-bu}\right)^2+Ei(-\frac{a}{u}+ab)]$$
$$-\frac{\pi}{4b}e^{+ab}Ei(-\frac{a}{u}-ab).$$

Für $1-bu=0$ gilt diese Formel nicht; man erhält vielmehr

$$8^*)\quad\int_0^{\infty}\frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}\left(\frac{z}{b}\right)=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}[C+\log(2ab)]$$
$$-\frac{\pi}{4b}e^{+ab}Ei(-2ab).$$

Das Integral $\Theta=\int_0^{\infty}\frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}(uz)$ lässt sich auf ähnliche Art entwickeln. Es wird genügen, das Resultat der Betrachtung hier anzuführen. Man erhält

$$(9)\quad\int_0^{\infty}\frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}(uz)$$
$$=-\frac{\pi}{4}e^{-ab}[\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+bu}{1-bu}\right)^2+Ei(-\frac{a}{u}+ab)]$$
$$-\frac{\pi}{4}e^{+ab}Ei(-\frac{a}{u}-ab),$$

dagegen für $u=\frac{1}{b}$:

$$9^*)\quad \int_0^\infty \frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}\left(\frac{z}{b}\right)=-\frac{\pi}{4}e^{-ab}[C+\log(2ab)]$$
$$-\frac{\pi}{4}e^{+ab}Ei(-2ab),$$

wo C immer die Constante des Integrallogarithmus bezeichnet.

IV.

Wenn in den im Vorhergehenden entwickelten Integralen eine oder einige Grössen verschwinden, so werden die Resultate einfacher und die Entwickelung selbst hat einen von der allgemeinen Fälle verschiedenen Character, weshalb jeder dieser besonderen Fälle eine besondere Betrachtung erfordert.

1. Es sei in II. $a=0$, oder $\omega=\int_0^\infty \frac{\log(uz)\partial z}{z^2+b^2}$ zu finden. Hier kommt

$$\omega=\int_0^\infty \frac{\partial z}{z^2+b^2}\int_0^\infty \frac{\cos x-\cos uzx}{x}\partial x$$
$$=\int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\int_0^\infty \frac{\cos x-\cos uzx}{z^2+b^2}\partial z.$$

Nun ist $\int_0^\infty \frac{\cos x}{z^2+b^2}\partial z=\frac{\pi}{2b}\cos x$, $\int_0^\infty \frac{\cos uxz}{z^2+b^2}\partial z=\frac{\pi}{2b}e^{-bux}$, also $\omega=\frac{\pi}{2b}\int_0^\infty \frac{\cos x-e^{-bux}}{x}\partial x$. Dies Integral kann auf zwei verschiedene Arten entwickelt werden.

a) Man setze $\varrho=\int_p^\infty \frac{\cos x-e^{-bux}}{x}\partial x$, wo $p>0$, theile das Integral in $\int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x-\int_p^\infty \frac{e^{-bux}}{x}\partial x$, und setze im zweiten Theil x statt bux; dann kommt $\varrho=-\int_\infty^p \frac{\cos x}{x}\partial x+\int_\infty^{bup}\frac{e^{-x}\partial x}{x}$, oder, für die Integrale die schon bekannten unendlichen Reihen gesetzt,

$$\varrho=-C-\log p+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4}+\ldots$$
$$+C+\log bup-bup+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(bup)^2}{1.2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(bup)^3}{1.2.3}+\ldots$$
$$=\log(bu)+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{p^2}{1.2}-\tfrac{1}{4}\cdot\frac{p^4}{1.2\ldots4}+\ldots$$
$$-bup+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{(bup)^2}{1.2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{(bup)^3}{1.2.3}+\ldots$$

Lässt man jetzt p sich der Null nähern, so erhält man

$$(10)\quad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-bux}}{x}\,\partial x = \log(bu).$$

b) Um den Werth des Integrals linker Hand zu finden, kann man für $\frac{1}{x}$ das Integral $\int_0^\infty e^{-zx}\,\partial z$ einführen; dann kommt

$$\omega = \int_0^\infty (\cos x - e^{-bux})\,\partial x \int_0^\infty e^{-zx}\,\partial z$$
$$= \int_0^\infty \partial z \int_0^\infty (\cos x - e^{-bux})\,e^{-zx}\,\partial x.$$

Nun ist $\int_0^\infty \cos x e^{-zx}\,\partial x = \frac{z}{1+z^2}$, $\int_0^\infty e^{-(z+bu)x}\,\partial x = \frac{1}{z+bu}$, also $\omega = \int_0^\infty \partial z\left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{z+bu}\right)$. Es ist ferner $\int \partial z\left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{z+bu}\right)$ $= \frac{1}{2}\log(1+z^2) - \frac{1}{2}\log.(z+bu)^2 = \frac{1}{2}\log.\frac{1+z^2}{z^2+2zbuz+b^2u^2}$, folglich offenbar $\int_0^\infty \partial z\left(\frac{z}{1+z^2} - \frac{1}{z+bu}\right) = \frac{1}{2}\log.(bu)^2$, oder auch $= \log(bu)$; da b, u positiv sind, mithin $\omega = \log(bu)$, wie vorher.

Durch Substitution erhält man nun

$$(11)\quad \int_0^\infty \frac{\log(uz)\,\partial z}{z^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}\log(bu).$$

Zerlegt man $\log(uz)$ in $\log u + \log z$, und beachtet, dass $\int_0^\infty \frac{\log u\,\partial z}{z^2+b^2}$ $= \frac{\pi}{2b}\log u$, so kommt auch $\int_0^\infty \frac{\log z\,\partial z}{z^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}\log b$.

2. Es sei in dem Integral $\int_0^\infty \frac{z\sin az\,\partial z}{z^2+b^2}\log(uz)$ die Grösse $b=0$, oder $\Theta = \int_0^\infty \frac{\sin az\,\partial z}{z}\log(uz)$ zu entwickeln. Es kommt

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{\sin az\,\partial z}{z}\int_0^\infty \frac{\cos x - \cos uzx}{x}\,\partial x$$
$$= \int_0^\infty \frac{\partial x}{x}\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\,\partial z(\cos x - \cos uxz).$$

Man hat ferner

$$\int_0^\infty \frac{\sin az\cos uxz}{z}\,\partial z = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin(a+ux)z + \sin(a-ux)z}{z}\,\partial z;$$

Beachtet man nun, dass bekanntlich $\int_0^\infty \frac{\sin(a+ux)z}{z}\,\partial z = \frac{\pi}{2}$, da-

gegen $\int_0^\infty \frac{\sin(a-ux)z}{z} = +\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, jenachdem $a-ux$ positiv oder negativ, d. i. x zwischen 0 und $\frac{a}{u}$ oder zwischen $\frac{a}{u}$ und ∞ liegt, so hat man

$$\int_0^\infty \frac{\sin az \cos uxz}{z}\partial z = \frac{\pi}{2} \text{ von } x=0 \text{ bis } x=\frac{a}{u},$$
$$=0 \text{ von } x=\frac{a}{u} \text{ bis } x=\infty;$$

folglich

$$\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\partial z(\cos x - \cos uxz) = \frac{\pi}{2}(\cos x - 1) \text{ von } x=0 \text{ bis } x=\frac{a}{u},$$
$$=\frac{\pi}{2}\cos x \text{ von } x=\frac{a}{u} \text{ bis } x=\infty;$$

also $\Theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{a}{u}} \frac{\cos x-1}{x}\partial x + \frac{\pi}{2}\int_{\frac{a}{u}}^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x$. Aber $\int_0^{\frac{a}{u}} \frac{\cos x-1}{x}\partial x$ $= Ci\left(\frac{a}{u}\right) - C - \log\frac{a}{u}$, $\int_{\frac{a}{u}}^\infty \frac{\cos x}{x}\partial x = -Ci\left(\frac{a}{u}\right)$; also endlich

$$(12) \quad \int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z}\log(uz) = -\frac{\pi}{2}\left(C + \log\frac{a}{u}\right).$$

Für $u=a$ erhält man $\int_0^\infty \frac{\sin az}{z}\log(az)\partial z = -\frac{\pi}{2}C$, wo es merkwürdig ist, dass der Integralwerth von a unabhängig ist.

3. Setzt man in den Formeln (8) und (9) $u=\infty$, und beachtet, dass arctang (uz) für diesen Werth von u in $\frac{\pi}{2}$ übergeht, so erhält man

$$(13) \quad \begin{cases} \int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2} = \frac{1}{2b}e^{-ab}Ei(ab) - \frac{1}{2b}e^{+ab}Ei(-ab), \\ \int_0^\infty \frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2} = -\frac{1}{2}e^{-ab}Ei(ab) - \frac{1}{2}e^{+ab}Ei(-ab). \end{cases}$$

Diese merkwürdigen Gleichungen findet Schlömilch in der schon citirten Abhandlung (Archiv. Thl. V. p. 211. Formel (27) und (28)) *) mit Hülfe des Fourier'schen Theorems.

*) In der Formel (28) ist ein Druckfehler, indem statt des + vor dem zweiten Theile rechter Hand ein − stehen muss.

Die vorhergehenden Formeln würden somit als specielle Fälle der Formeln (8) und (9) erscheinen. Ich weiss aber nicht, ob die hier in Anwendung gebrachte Schlussweise, dass z. B. das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}(uz)$, wenn u sich dem Unendlichen nähert, gegen die Grenze $\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}\operatorname{arctang}(\infty)$ convergire, ausser allem Zweifel sei, und möchte aus den Formeln (8) und (9) nichts weiter schliessen, als dass die Integrale linker Hand sich den Grössen in (13) rechter Hand beliebig nähern, wenn u ins Unendliche wächst. Man kann bei Schlüssen dieser Art nicht vorsichtig genug sein. Z. B. es ist $\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\partial x = \frac{a}{1+a^2}$, wenn $a>0$; daraus folgt, dass der Werth von $\int_0^\infty e^{-ax}\cos x\partial x$ der Null beliebig nahe gebracht werden kann, wenn a ins Unendliche abnimmt. Keineswegs darf man aber geradezu in dem Integral $a=0$ oder $\int_0^\infty \cos x\partial x=0$ setzen, denn dies Resultat ist nach dem Obigen unrichtig. Ein anderes Beispiel ist folgendes. Man weiss, dass $\int_0^\infty \frac{x\sin bx\partial x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-b}$, dass ferner $\int_0^\infty \frac{\cos bx\partial x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-b}$; also ist in Folge der Subtraction $\int_0^\infty \frac{\cos bx - x\sin bx}{1+x^2}\partial x=0$, und diese Gleichung ist stets richtig, wenn $b>0$ ist. Nähert sich b de[r] Null, so bleibt der Integralwerth immer Null; etwas ganz Ande-res ist es, $b=0$ zu setzen, denn die Function $\frac{\cos bx - x\sin b[x]}{1+x^2}$ wird $=\frac{1}{1+x^2}$ für $b=0$, und $\int_0^\infty \frac{\partial x}{1+x^2}$ ist keineswegs gleich Nu[ll,] sondern gleich $\frac{\pi}{2}$.

Mit andern Worten, man ist gar nicht berechtigt, einer Con-stante in einem bestimmten Integral einen solchen speciellen Werth beizulegen, für welchen die Entwickelung des allgemeinen Falls ihre Anwendbarkeit verliert. Dies ist bei den Integralen (8) un[d] (9) der Fall, indem die obige Herleitung ihrer Werthe darauf be-ruht, dass man für $\operatorname{arctang}(uz)$ ein bestimmtes Integral setzt, w[as] nicht mehr geschehen kann, sobald aus dieser Function ei[ne] Constante, nämlich $\operatorname{arctang}(\infty)=\frac{\pi}{2}$ wird.

Die Integrale (13) linker Hand sind hiernach besonders zu en[t-]wickeln, und es ist merkwürdig, dass die Werthe derselb[en] schwerer zu ermitteln sind, als die der zusammengesetzteren [In-]tegrale (8) und (9). Wir haben hier ein Beispiel, dass das Al[l-]meine mitunter leichter zu bestimmen ist als das Besondere.

V.

Bevor ich aber zum Beweise der Formeln (13) übergehe, [ist] es nöthig, folgende Integralwerthe

$$\omega = \int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2+b^2} Si(uz)\,\partial z,\quad \omega_1 = \int_0^\infty \frac{z\cos az}{z^2+b^2} Si(uz)\,\partial z;$$

$$\Theta = \int_0^\infty \frac{\cos az}{z^2+b^2} Ci(uz)\,\partial z,\quad \Theta_1 = \int_0^\infty \frac{z\sin az}{z^2+b^2} Ci(uz)\,\partial z$$

usuchen, wo bekanntlich

$$Si(uz) = \int_0^1 \frac{\sin uzx}{x}\,\partial x,$$

$$Ci(uz) = \int_\infty^1 \frac{\cos uzx}{x}\,\partial x.$$

α) Kehrt man die Integration um, so erhält man

$$\omega = \int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int_0^\infty \frac{\sin az \sin uxz}{z^2+b^2}\,\partial z$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\partial x}{x} \int_0^\infty \frac{\cos(a-ux)z - \cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\,\partial z.$$

hat nun $\int_0^\infty \frac{\cos(a-ux)z}{z^2+b^2}\,\partial z$ zwei verschiedene Werthe, je idem $a-ux$ positiv oder negativ ist, nämlich im ersten Falle den rth $\frac{\pi}{2b}e^{-b(a-ux)}$, im andern den Werth $\frac{\pi}{2b}e^{+b(a-ux)}$. Ist $\frac{a}{u}>1$, gilt immer der erste Werth, da nach x von 0 bis 1 integrirt den soll, und es kommt $\omega = \frac{\pi}{4b}e^{-ab}\int_0^1 \frac{e^{bux}-e^{-bux}}{x}\,\partial x$, oder, man leicht findet,

$$(14)\quad \int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2+b^2} Si(uz)\,\partial z = \frac{\pi}{4b} e^{-ab}[Ei(bu) - Ei(-bu)],$$

auch

$$Ei(bu) - Ei(-bu) = 2\left[bu + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{(bu)^3}{1.2.3} + \tfrac{1}{5}\cdot\frac{(bu)^5}{1.2\ldots5} + \ldots\right]$$

$$(a \overline{\gtrless} u).$$

nn dagegen $\frac{a}{u}<1$, so wird $\int_0^\infty \frac{\cos(a-ux)z}{z^2+b^2}\,\partial z$ bald den einen, l den andern der oben angegebenen Werthe erhalten, nämlich $x=0$ bis $x=\frac{a}{u}$ den ersten, von $x=\frac{a}{u}$ bis $x=1$ den zweiten, man muss also eine Theilung von ω vornehmen, nämlich

$$\omega=\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{\partial x}{x}\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-ux)z-\cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\partial z$$

$$+\tfrac{1}{2}\int_{\frac{a}{u}}^{1}\frac{\partial x}{x}\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-ux)z-\cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\partial z.$$

Demnächst kommt

$$\omega=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{e^{bux}-e^{-bux}}{x}\partial x+\frac{\pi}{4b}(e^{ab}-e^{-ab})\int_{\frac{a}{u}}^{1}\frac{e^{-bux}}{x}\partial x,$$

und überdies

$$\int_{\frac{a}{u}}^{1}\frac{e^{-bux}}{x}\partial x=\int_{\frac{a}{u}}^{\infty}\frac{e^{-bux}}{x}\partial x+\int_{\infty}^{1}\frac{e^{-bux}}{x}\partial x$$

$$=-\int_{\infty}^{ab}\frac{e^{-x}\partial x}{x}+\int_{\infty}^{ub}\frac{e^{-x}\partial x}{x}=Ei(-ub)-Ei(-ab),$$

$$\int_0^{\frac{a}{u}}\frac{e^{bux}-e^{-bux}}{x}\partial x=\int_0^{ab}\frac{e^{x}-e^{-x}}{x}\partial x=Ei(ab)-Ei(-ab).$$

Führt man diese Werthe ein, so entsteht

$$(15)\quad\int_0^{\infty}\frac{\sin az}{z^2+b^2}Si(uz)\partial z=\frac{\pi}{4b}e^{-ab}[Ei(ab-Ei(-ub)]$$

$$-\frac{\pi}{4b}e^{+ab}[Ei(-ab)-Ei(-ub)]$$

$$(a\overset{=}{<}u).$$

β) Kehrt man in dem Doppelintegral Θ die Integration um, so kommt

$$\Theta=\int_{\infty}^{1}\frac{\partial x}{x}\int_0^{\infty}\frac{\cos az\cos uxz}{z^2+b^2}\partial z$$

$$=\tfrac{1}{2}\int_{\infty}^{1}\frac{\partial x}{x}\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-ux)z+\cos(a+ux)z}{z^2+b^2}\partial z.$$

Ist nun zuerst $\frac{a}{u}\overset{=}{<}1$, so wird, da nach x von ∞ bis 1 integrirt werden soll, stets $a\overset{=}{<}ux$ sein, und es ist $\int_0^{\infty}\frac{\cos(a-ux)z}{z^2+b^2}$ $=\frac{\pi}{2b}e^{+b(a-ux)}$, also

$$\Theta=\frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})\int_{\infty}^{1}\frac{e^{-bux}}{x}\partial x,$$

oder

$$(16)\quad \int_0^\infty \frac{\cos az}{z^2+b^2}\, Ci(uz)\,\partial z = \frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab})\, Ei(-ub).$$

$$(a \overset{=}{<} u).$$

Ist dagegen $\frac{a}{u} \overset{=}{>} 1$, so setzt man

$$\Theta = \int_\infty^{\frac{a}{u}} \frac{\partial x}{x} \int_0^\infty \frac{\cos az \cos uxz}{z^2+b^2}\,\partial z + \int_{\frac{a}{u}}^{1} \frac{\partial x}{x} \int_0^\infty \frac{\cos az \cos uxz}{z^2+b^2}\,\partial z,$$

und erhält

$$\Theta = \frac{\pi}{4b} e^{-ab} \int_{\frac{a}{u}}^{1} \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{x}\,\partial x + \frac{\pi}{4b}(e^{ab}+e^{-ab}) \int_\infty^{\frac{a}{u}} \frac{e^{-bux}}{x}\,\partial x.$$

Nun ist

$$\int_{\frac{a}{u}}^{1} \frac{e^{bux}+e^{-bux}}{x}\,\partial x = \int_{ab}^{ub} \frac{e^x+e^{-x}}{x}\,\partial x,$$

$$\int \frac{e^x+e^{-x}}{\partial x}\,\partial x = Ei(x) + Ei(-x) - 2C,$$

$$\int_{ab}^{ub} \frac{e^x+e^{-x}}{x}\,\partial x = Ei(ub) + Ei(-ub) - Ei(ab) - Ei(-ab),$$

folglich

$$(17)\quad \int_0^\infty \frac{\cos az}{z^2+b^2}\, Ci(uz)\,\partial z$$

$$= \frac{\pi}{4b} e^{-ab}[Ei(ub) + Ei(-ub) - Ei(ab)] + \frac{\pi}{4b} e^{+ab} Ei(-ab)$$

$$(a \overset{=}{>} u).$$

γ) Was die Integrale ω_1 und Θ_1 betrifft, so mag es genügen, blos die Resultate der Entwickelung, deren Gang nun schon hinlänglich bekannt ist, anzugeben. Man erhält nämlich

$$(18)\quad \int_0^\infty \frac{z \cos az}{z^2+b^2}\, Si(uz)\,\partial z = -\frac{\pi}{4} e^{-ab}[Ei(bu) - Ei(-bu)] \quad (a \overset{=}{>} u),$$

$$(19)\quad \int_0^\infty \frac{z \cos az}{z^2+b^2}\, Si(uz)\,\partial z = -\frac{\pi}{4} e^{-ab}[Ei(ab) - Ei(-ub)]$$

$$-\frac{\pi}{4} e^{+ab}[Ei(-ab) - Ei(-ub)] \quad (a \overset{=}{<} u),$$

$$(20)\quad \int_0^\infty \frac{z\sin az}{z^2+b^2}\,Ci(uz)\,\partial z = -\frac{\pi}{4}\left[(e^{ab}-e^{-ab})(Ei(-ub)\right. \qquad (a \leqq u);$$

$$(21)\quad \int_0^\infty \frac{z\sin az}{z^2+b^2}\,Ci(uz)\,\partial z = +\frac{\pi}{4}e^{-ab}\left[Ei(ub)+Ei(-ub)-Ei(ab)\right]$$

$$-\frac{\pi}{4}e^{+ab}\,Ei(-ab) \qquad (a \geqq u).$$

VI.

Um nun die Formeln (13) herzuleiten, gehe man von folgenden, schon in einer andern Abhandlung (Theil X. Nr. XXV.) von mir entwickelten Integralen aus:

$$\begin{cases} a) & \varrho_1 = \int_0^{a-u} \dfrac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = e^{-ab}[Ei(ub)-Ei(ab)], \\ b) & \varrho_2 = \int_{a+u}^\infty \dfrac{e^{-bx}\partial x}{x-a} = -e^{-ab}Ei(-ub), \\ c) & \varrho = \int_0^\infty \dfrac{e^{-bx}\partial x}{x+a} = -e^{+ab}Ei(-ab). \end{cases}$$

Man multiplicire jede dieser Gleichungen mit $\frac{\pi}{2b}$, und setze für $\frac{\pi}{2b}e^{-bx}$ das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\cos xz\partial z}{z^2+b^2}$, und kehre die Integration um; dann kommt

$$\begin{cases} \alpha) & \dfrac{\pi}{2b}\varrho_1 = \int_0^{a-u}\dfrac{\partial x}{x-a}\int_0^\infty \dfrac{\cos xz\partial z}{z^2+b^2} = \int_0^\infty \dfrac{\partial z}{z^2+b^2}\int_0^{a-u}\dfrac{\cos xz\partial x}{x-a}, \\ \beta) & \dfrac{\pi}{2b}\varrho_2 = \int_{a+u}^\infty \dfrac{\partial x}{x-a}\int_0^\infty \dfrac{\cos xz\partial z}{z^2+b^2} = \int_0^\infty \dfrac{\partial z}{z^2+b^2}\int_{a+u}^\infty \dfrac{\cos xz\partial x}{x-a}, \\ \gamma) & \dfrac{\pi}{2b}\varrho = \int_0^\infty \dfrac{\partial x}{x+a}\int_0^\infty \dfrac{\cos xz\partial z}{z^2+b^2} = \int_0^\infty \dfrac{\partial z}{z^2+b^2}\int_0^\infty \dfrac{\cos xz\partial x}{x+a}. \end{cases}$$

Dabei ist aber nicht zu übersehen, dass die Formel

$$\int_0^\infty \frac{\cos xz\partial z}{z^2+b^2} = \frac{\pi}{2b}e^{-bx}$$

nur unter der Voraussetzung eines positiven x gilt; in den beiden letzten Gleichungen β), γ) sind die Grenzen von x positiv, sie gelten also unbedingt, in der ersten aber wird die Grenze $a-u$ nur positiv, wenn $a>u$, und nur unter dieser Bedingung ist sie gültig. Führen wir jetzt für die Integrale $\int_0^{a-u}\frac{\cos xz\partial x}{x-a}$, $\int_{a+u}^\infty \frac{\cos xz\partial x}{x-a}$ und $\int_0^\infty \frac{\cos xz\partial x}{x+a}$ ihre in einer vorhergehenden Abhandlung (Th. Nr. XXIII. XXIV.) gefundenen Werthe ein, so kommt

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha') & \frac{\pi}{2b}\varrho_1=\int_0^\infty \frac{\partial z}{z^2+b^2}[\cos az\{Ci(uz)-Ci(az)\}+\sin az\{Si(uz)-Si(az)\}] \\ & \qquad (a>u), \\ \beta') & \frac{\pi}{2b}\varrho_2=\int_0^\infty \frac{\partial z}{z^2+b^2}[-\cos az\,Ci(uz)-\sin az\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(uz)\}], \\ \gamma') & \frac{\pi}{2b}\varrho=\int_0^\infty \frac{\partial z}{z^2+b^2}[-\cos az\,Ci(az)+\sin az\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(az)\}]. \end{array}\right.$$

Da nun die Werthe von ϱ_1, ϱ_2, ϱ aus a), b), c) bekannt, und die Integrale $\int_0^\infty \frac{\cos az}{z^2+b^2}Ci(uz)\partial z$, $\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2+b^2}Si(uz)\partial z$ in V. entwickelt sind, so sieht man, dass mit Hülfe jeder der beiden Gleichungen β'), γ') das Integral $\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}$ gefunden werden kann. Am einfachsten ist es, entweder die Formel γ') anzuwenden, oder auf folgende Art zu verfahren. Man findet

$$\frac{\pi}{2b}(\varrho_1+\varrho_2-\varrho)=\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}[2Si(uz)-\pi]$$
$$=2\int_0^\infty \frac{\sin az}{z^2+b^2}Si(uz)\partial z-\pi\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2},$$

und folglich, wenn für den ersten Theil sein Werth aus 14) eingeführt wird *),

$$\int_0^\infty \frac{\sin az\partial z}{z^2+b^2}=\frac{1}{2b}e^{-ab}Ei(ab)-\frac{1}{2b}e^{+ab}Ei(-ab),$$

übereinstimmend mit 13).

Um endlich $\int_0^\infty \frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}$ zu bestimmen **), braucht man nur die Gleichungen a), b), c) mit $\frac{\pi}{2}$ zu multipliciren, und für $\frac{\pi}{2}e^{-bx}$ das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{z\sin xz\partial z}{z^2+b^2}$ einzuführen. Es kommt

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\pi}{2}\varrho_1=\int_0^\infty \frac{z\partial z}{z^2+b^2}[\sin az\{Ci(uz)-Ci(az)\}-\cos az\{Si(uz)-Si(az)\}] \\ \qquad (a>u), \\ \frac{\pi}{2}\varrho_2=\int_0^\infty \frac{z\partial z}{z^2+b^2}[-\sin az\,Ci(uz)+\cos az\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(uz)\}], \\ \frac{\pi}{2}\varrho=\int_0^\infty \frac{z\partial z}{z^2+b^2}[\sin az\,Ci(az)+\cos az\{\tfrac{1}{2}\pi-Si(az)\}]. \end{array}\right.$$

*) Man darf hier nicht die Gleichung 15) anwenden, da in α') $a>u$ sein muss.

**) Man könnte das Integral durch Differentiation der vorhergehenden Gleichung nach a entwickeln; es geschieht hier nicht, weil wegen der Grenzen 0, ∞ das Differenziren unter dem Integralzeichen nach dem Obigen misslich ist.

Hier kann man nun entweder in der letzten Gleichung für die Integrale $\int_0^\infty \frac{z\sin az}{z^2+b^2} Ci(az)\partial z$, $\int_0^\infty \frac{z\cos az}{z^2+b^2} Si(az)\partial z$ ihre obigen Werthe einführen, oder die Gleichung

$$\frac{\pi}{2}(\varrho_1+\varrho_2+\varrho)=\int_0^\infty \frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}[\pi-2Si(uz)]$$

bilden, und erhält durch Substitution

$$\int_0^\infty \frac{z\cos az\partial z}{z^2+b^2}=-\tfrac{1}{2}e^{-ab}Ei(ab)-\tfrac{1}{2}e^{+ab}Ei(-ab),$$

womit die Formel (13) wieder in Einklang ist.

IX.

Ueber den Fall eines Körpers längs einer Parabel.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Es stelle ADB (Taf. II. Fig. 4.) eine Parabel dar, deren Spitze D ist; DF sei ihre Hauptaxe. Ein Körper falle von B nach X auf dieser Parabel, und man frägt nun nach der Zeit, die er dazu gebraucht hat.

Sei der Bogen $DX=s$, $DF=h$, $DY=x$, t die verlangte Zeit, g die Beschleunigung der Schwere ($=9^m,808\ldots$), so ist (Poisson, Mechanik. I. §. 194.):

$$\sqrt{2g}\,.\,\partial t=-\frac{\partial s}{\sqrt{h-x}}. \qquad (1)$$

Sei nun $y^2=px$ die Gleichung der Parabel, so ist $y=\sqrt{px}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{x}}$, also $\frac{\partial s}{\partial x}=\sqrt{1+\frac{p}{4x}}=\frac{\sqrt{p+4x}}{2\sqrt{x}}$, und somit

$$2\sqrt{2g}\,.\,\partial t = -\frac{\sqrt{p+4x}\,.\,\partial x}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}} = -\frac{(p+4x)\,\partial x}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}\,.\,\sqrt{p+4x}},$$

$$2\sqrt{2g}\,.\,t = \int_x^h \frac{(p+4x)\,\partial x}{x\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}\,.\,\sqrt{p+4x}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_x^h \frac{(p+4x)\,\partial x}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}\,.\,\sqrt{x+\frac{p}{4}}}. \qquad (2)$$

Um also t zu erhalten, darf man nur das letzte Integral bestimmen. Dasselbe kommt aber auf elliptische Functionen zurück und zwar vermittelst folgender Umgestaltungen.

Man setze

$$L = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{p}}{2} + \sqrt{h+\frac{p}{4}}\right\},$$

$$N = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{p}}{2} + \sqrt{h+\frac{p}{4}}\right\};$$

bestimme ferner die Grösse z so, dass

$$\frac{k(1-z)}{1+z} = -\frac{x}{x-h}, \text{ wenn } k = \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{h+\frac{p}{4}}};$$

alsdann ist

$$x = \frac{1}{4}\,.\,\frac{h\sqrt{p}\,.\,(z-1)}{Nz-L},$$

$$\partial x = -\frac{h}{4}\sqrt{p\left(h+\frac{p}{4}\right)}\,.\,\frac{\partial z}{(Nz-L)^2},$$

$$\frac{\partial x}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}\,.\,\sqrt{x+\frac{p}{4}}} = \frac{-\partial z}{\sqrt{1-z^2}\,.\,\sqrt{L^2-N^2z^2}},$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{(p+4x)\,\partial x}{\sqrt{x}\,.\,\sqrt{h-x}\,.\,\sqrt{x+\frac{p}{4}}} = -\frac{1}{2}\int \frac{(pN+h\sqrt{p})z-(pL+h\sqrt{p})}{(Nz-L)\sqrt{L^2-N^2z^2}\sqrt{1-z^2}}\,\partial z.$$

Sei nun

$$A = pN + h\sqrt{p}, \quad B = pL + h\sqrt{p}.$$

Da ferner die h und x entsprechenden Gränzen von z sind: -1 und z, so ist:

$$4\sqrt{2g}\,.\,t = -\int_z^{-1} \frac{(Az-B)\,\partial z}{(Nz-L)\sqrt{L^2-N^2z^2}\sqrt{1-z^2}}.$$

Man setze $z = -v$, so ist

$$4\sqrt{2g}\,.\,t = \int_v^1 \frac{(Av+B)\partial v}{(L+Nv)\sqrt{L^2-N^2v^2}\sqrt{1-v^2}}.$$

Setzt man nun $v = \sin\varphi$, so wird:

$$4\sqrt{2g}\,.\,t = \frac{1}{L^2}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{(A\sin\varphi + B)\partial\varphi}{(1+\frac{N}{L}\sin\varphi)\sqrt{1-\frac{N^2}{L^2}\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{A}{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\frac{A}{L^2}\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\frac{B}{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\frac{B}{L^2}\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{(1+k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

wo $k = \frac{N}{L} = -\frac{\sqrt{h+\frac{p}{4}}-\sqrt{\frac{p}{4}}}{\sqrt{h+\frac{p}{4}}+\sqrt{\frac{p}{4}}} = -\frac{\left(\sqrt{h+\frac{p}{4}}-\sqrt{\frac{p}{4}}\right)^2}{h}.$

Setzte man demnach

$$k = \frac{\left(\sqrt{h+\frac{p}{4}}-\sqrt{\frac{p}{4}}\right)^2}{h},$$

so wäre:

$$\left.\begin{aligned}
4\sqrt{2g}\,.\,t = &\frac{A}{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
&-\frac{A}{L^2}\int_0^{\varphi} \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
&+\frac{B}{L^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\
&-\frac{B}{L^2}\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Nun handelt es sich um die Bestimmung der Integrale:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=M,$$

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=N.$$

Vor Allem ist klar, dass

$$N-kM=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=F(\varphi,k)$$

ist, woraus folgt

$$M=\frac{N}{k}-\frac{F(\varphi,k)}{k}. \tag{4}$$

Ferner ist

$$N=\int_0^\varphi \frac{(1+k\sin\varphi)\partial\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}+\int_0^\varphi \frac{k\sin\varphi\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}.$$

Das erste dieser Integrale ist:

$$\frac{E(\varphi,k)}{k^2}-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}},$$

das zweite wird auf folgende Weise gefunden.

Man setze $k\sin\varphi=\sin\psi$, was erlaubt ist, da $k<1$; also

$$\sin\varphi=\frac{\sin\psi}{k},\quad \cos\varphi\partial\varphi=\frac{\cos\psi\partial\psi}{k},\quad \partial\varphi=\frac{\cos\psi\partial\psi}{\sqrt{k^2-\sin^2\psi}};$$

$$\int_0^\varphi \frac{k\sin\varphi\partial\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin^2\varphi)^3}}=\int_0^\psi \frac{\sin\psi\partial\psi}{\cos^2\psi\sqrt{k^2-\sin^2\psi}}.$$

Setzt man nun $\cos\psi=x$, so ist dieses Integral

$$=\int_x^1 \frac{\partial x}{x^2\sqrt{x^2-k_1{}^2}},$$

wenn $k_1{}^2=1-k^2$,

$$=\frac{k}{1-k^2}-\frac{\sqrt{x^2-k_1{}^2}}{(1-k^2)x}=\frac{k}{1-k^2}-\frac{k\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}.$$

Demnach endlich:

$$N=\frac{E(\varphi,k)}{k^2}-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}+\frac{k}{1-k^2}$$

$$-\frac{k\cos\varphi}{(1-k^2)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\frac{E(\varphi,k)}{k^2}+\frac{k}{1-k^2}-\frac{k\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\left(\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\right)},$$

$$M=\frac{E(\varphi,k)}{k^2}+\frac{1}{1-k^2}-\frac{\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\left(\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\right)}-\frac{F(\varphi,k)}{k}.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^2}+\frac{1}{1-k^2}-\frac{F\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^2}+\frac{k}{1-k^2};$$

also endlich

$$\left.\begin{aligned}&4\sqrt{2g}.t=\\&\frac{A}{L^2}\left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)-E(\varphi,k)}{k^2}+\frac{F(\varphi,k)-F\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k}+\frac{\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}}\right]\\&\quad+\frac{B}{L^2}\left[\frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)-E(\varphi,k)}{k^2}+\frac{k\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}}\right].\end{aligned}\right\}(5)$$

Die Grösse φ ist so bestimmt, dass

$$-\frac{x}{x-h}=\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{h+\frac{p}{4}}}\cdot\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$$

oder

$$\sin\varphi=\frac{x+k'(x-h)}{x-k'(x-h)},\text{ wo } k'=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{4h+p}}.$$

Um die Zeit τ zu bestimmen, die der Körper braucht, bis er in D ist, hat man $x=0$, also $\varphi=\frac{\pi}{2}$ zu setzen. Daher ist

$$\left.\begin{aligned} 4\sqrt{2g}\,.\,\tau &= \frac{A}{L^2}\left[\frac{2E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^3} - \frac{2F\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k}\right] \\ &\quad + \frac{B}{L^2}\left[\frac{2E\left(\frac{\pi}{2},k\right)}{k^2}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Sei, um ein spezielles Beispiel anzuführen, $h=2p$, so ist

$$L=\sqrt{p},\ N=-\tfrac{1}{2}\sqrt{p},\ k=\tfrac{1}{2},\ k'=\tfrac{1}{3};$$

$$\sin\varphi=\frac{4x-2p}{2x+2p}=\frac{2x-p}{x+p};$$

$$A=\tfrac{3}{2}p\sqrt{p},\ B=3p\sqrt{p};\ \frac{A}{L^2}=\tfrac{3}{2}\sqrt{p},\ \frac{B}{L^2}=3\sqrt{p};$$

also

$$4\sqrt{2g}\,.\,\tau=\tfrac{3}{2}\sqrt{p}\left\{16E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)-4F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}+3\sqrt{p}\left\{8E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=6\sqrt{p}\left[-F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)+8E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)\right].$$

Nun ist

$$E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)=1{,}46746;$$

$$F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)=1{,}68575;$$

also

$$8E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)=10{,}05393;$$

$$6\left\{8E\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}=60{,}32358;$$

$$\tau=\frac{60{,}32358}{4\sqrt{2g}}\sqrt{p}=3{,}405\sqrt{p}.$$

Die Zeit, die ein Körper braucht, um frei durch die Höhe $h=2p$ zu fallen, ist:

$$\sqrt{\frac{2h}{g}}=\sqrt{\frac{4}{g}}\sqrt{p}=\frac{2}{\sqrt{g}}\sqrt{p}=0{,}6386\sqrt{p},$$

so dass die Fallzeit sehr vermehrt ist, ungefähr $5\tfrac{1}{3}$mal.

Zieht man eine gerade Linie durch die Endpunkte des betrachteten Bogens, so sind die Koordinaten des äussersten Punktes:

$2p$, $p\sqrt{2}$; demnach findet man die Fallzeit, wenn man statt g so eben setzt

$$g\cdot\frac{p\sqrt{2}}{\sqrt{4p^2+2p^2}}=g\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}=g\sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

also diese:

$$\frac{2\sqrt[4]{3}}{\sqrt{g}}\sqrt{p}=1{,}606.\sqrt{p}.$$

Die für den Fall durch die Parabel nöthige Zeit ist ungefähr das Doppelte.

X.

Zurückführung des Integrals $\int_0^\varphi\frac{\sin^n\varphi\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$ auf elliptische Funktionen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

---

§. 1.

Sei $k<1$, und man setze

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^n\varphi\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=N_n,$$

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^n\varphi\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=A_n;$$

so hat man offenbar:

$$\left.\begin{aligned} N_0 - kN_1 &= A_0, \\ N_1 - kN_2 &= A_1, \\ N_2 - kN_3 &= A_2, \\ &\vdots \\ N_n - kN_{n+1} &= A_n. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Da aber, nach der vorhergehenden Abhandlung:

$$N_0 = \frac{E(\varphi,k)}{k^2} + \frac{k}{1-k^2} - \frac{k\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\left(\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\right)}, \quad (2)$$

so ist, wenn man A_0, A_1,..... als bekannt voraussetzt, vermöge (1) auch N_1, N_2,.... gegeben. Es handelt sich also um die Bestimmung von A_0, A_1,.... Nun ist

$$\left.\begin{aligned} A_0 &= \int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi,k), \\ A_1 &= \int_0^\varphi \frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{k}\log\left[\sqrt{\frac{(1+k)(1-k\cos\varphi)}{(1-k)(1+k\cos\varphi)}}\right], \\ A_2 &= \int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{F(\varphi,k)-E(\varphi,k)}{k^2} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Diess vorausgesetzt, hat man folgende Reduktionsformel (Gudermann, Theorie der Modularfunctionen etc. §. 71.):

$$(n-1)k^2A_n = (n-2)(1+k^2)A_{n-2} - (n-3)A_{n-4} + \cos\varphi\sin^{n-3}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}. \quad (4)$$

Vermöge der Formel (4), in Verbindung mit (3), ist man im Stande, die Grössen A_3, A_4,.... durch elliptische oder logarithmische Funktionen auszudrücken, und zwar wird A_n durch elliptische Funktionen ausgedrückt, wenn n gerade ist; ist aber n ungerade, so enthält A_n keine elliptischen Funktionen. Da also A_0, A_1,.... als bekannt angenommen werden können, so sind auch N_1, N_2,.... bekannt, also die Aufgabe gelöst.

§. 2.

Man setze nun, $\varphi \begin{smallmatrix} < \frac{\pi}{2} \\ > 0 \end{smallmatrix}$ vorausgesetzt:

$$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sin^n\varphi\,(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = M_n$$

$$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sin^n\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = B_n;$$

so erhält man wieder

$$\left.\begin{aligned} M_1 - kM_0 &= B_1, \\ M_2 - kM_1 &= B_2, \\ &\vdots \\ M_n - kM_{n-1} &= B_n; \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

worin

$$\left.\begin{aligned} M_0 &= \int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{(1-k\sin\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} \\ &= \frac{E\left(\frac{\pi}{2},k\right)-E(\varphi,k)}{k^2} + \frac{k\cos\varphi}{1-k^2}\sqrt{\left(\frac{1+k\sin\varphi}{1-k\sin\varphi}\right)}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Zugleich ist, wie man leicht findet:

$$\frac{n-1}{\sin^n\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \frac{(n-2)(1+k^2)}{\sin^{n-2}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{(n-3)k^2}{\sin^{n-4}\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^{n-1}\varphi}\right),$$

also, wenn man integrirt:

$$\left.\begin{aligned} &(n-1)B_n = \\ &(n-2)(1+k^2)B_{n-2}-(n-3)k^2B_{n-4}+\frac{\cos\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}{\sin^{n-1}\varphi}. \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Da nun

$$B_1 = \log\left(\frac{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}+\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2}.\sin\varphi}\right),$$

$$B_2 = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + F\left(\frac{\pi}{2},k\right) - F(\varphi,k) - E\left(\frac{\pi}{2},k\right) + E(\varphi,k),$$

so sind die Grössen B durch (7) gegeben, somit auch die Grössen M durch (5) bekannt. Auch hier hängt B_n nur dann von elliptischen Funktionen ab, wenn n gerade ist.

XI.
Beitrag zur analytischen Geometrie.

Von dem
Herrn Professor Dr. H. Bruun
zu Odessa.

Zu den interessantesten Aufgaben aus der Lehre vom Grössten und Kleinsten gehören unstreitig die vier folgenden:

1. Die grösste Ellipse zu bestimmen, welche in ein gegebenes Dreieck beschrieben werden kann.
2. Die kleinste Ellipse zu bestimmen, welche um ein gegebenes Dreieck beschrieben werden kann.
3. Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt.
4. Bestimmung der kleinsten Ellipse, welche um ein gegebenes Viereck beschrieben werden kann.

Auch haben schon mehrere ausgezeichnete Geometer sich mit der Auflösung dieser Aufgaben beschäftigt, namentlich Gauss, Pfaff, Mollweide und Plücker die dritte zum Gegenstande ihrer Untersuchungen gemacht, sowie Euler die zweite und vierte.

(Man sehe: Monatliche Correspondenz, herausgegeben von Zach. B. XXII. S. 112., 223., 237. — Plücker, Analytisch-geometrische Entwickelungen B. II. S. 211. — Nova Acta Petrop. T. IX. S. 146., 132.)

Die Gründe, die mich bewogen haben, diese Aufgaben einer neuen Untersuchung zu unterwerfen, und die mich glauben lassen, dass dieselbe nicht ganz überflüssig sei, sind folgende:

a) Die mit Recht als Muster analytischer Behandlungsweise gepriesene, auf Gränzbetrachtungen basirte Gaussische Auflösung der dritten Aufgabe kann wegen ihrer eigenthümlichen Behandlungsweise nicht in den Lehrbüchern aufgenommen werden. — Noch mehr gilt dieses von der Plückerschen Auflösung durch seine Methode der Liniencoordinaten. — Die Mollweidesche ziemlich weitläuftige Auflösung bezieht sich auf entferntere Eigen-

schaften der Ellipse, und ist daher keine rein analytische (wi Mollweide es auch selbst zugesteht, in Klügel's Math. Wö terbuche. Band IV. S. 285.). — Pfaff hat nur das Resultat d Auflösung bekannt gemacht.

b) Die zweite Aufgabe, von Euler vermittelst zweier Hülf grössen gelöst, lässt sich auch ohne dieselben eben so einfac behandeln.

c) Die vierte Aufgabe hat ebenfalls Euler auf eine Gleichun vom dritten Grade zurück geführt, doch irrt er sich doppelt i den aus dieser Gleichung gezogenen Folgerungen.

d) Von der ersten Aufgabe ist mir keine analytische Auflö sung bekannt. — Sollte aber auch, woran ich nicht zweifle, ein solche vorhanden sein, so glaube ich dennoch die meinige hie aufnehmen zu dürfen, sowohl der Vollständigkeit wegen, als auch um diese Aufgabe mit der zweiten vergleichen zu können.

§. 1.

Bestimmung der grössten Ellipse, welche in ein gege benes Dreieck beschrieben werden kann.

Es seien: MNO das gegebene Dreieck, OM die Achse de x, ON die Achse der y, der Coordinatenwinkel $MON=\omega$...; $(0,0$ die Coordinaten des Punktes O, $(a,0)$ des Punktes M, $(0,b)$ de Punktes N; so erhalten wir für alle Ellipsen:

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0\,(\alpha<0)\,.\ \ldots\ (1$$

welche die Seiten des Dreiecks berühren, wenn $(m,0)$ und $(0,n$ die veränderlichen Berührungspunkte auf den Achsen x und y be zeichnen, folgende Bedingungsgleichungen:

$$D=-n,\ F=n^2,\ E^2=n^2C,\ -E=mC\ \ldots\ (2$$

und

$$\alpha a^2b^2+2\delta a^2b+\varphi a^2-2\beta ab^2-2\varepsilon ab+\gamma b^2=0\ ^{*)}\ \ldots\ (3$$

In Folge der Gleichungen (2) reducirt sich die Gleichung (3) auf

$$ab(Bn-E)-\frac{2an^3}{m}-2bn^2+2n^3=0\ \ldots\ (4$$

und hieraus

$$ab(Bn+E)+2b\frac{an^2}{m}-\frac{2an^3}{m}-2bn^2+2n^3=0.\ \ldots\ (5$$

Für das Quadrat Z des Flächeninhalts z der Ellipse erhalte wir (da $\gamma=0$) bekanntlich:

*) Der Kürze halber setze ich $B^2-C=\alpha$, $E-BD=\beta$, $D^2-F=\gamma$, $BE-CD=\delta$, $DE-BF=\varepsilon$, $E^2-CF=\varphi$.

$$Z = -\pi^2 \sin^2\omega \frac{\beta^4}{\alpha^3} = -\pi^2 \sin^2\omega \frac{n^6(Bn+E)}{(Bn-E)^3},$$

oder wegen (4) und (5):

$$Z = -\frac{\pi^2 \sin^2\omega}{4} a^2 b^2 m^2 n^2 \frac{(mn+ab-na-bm)}{(mn-an-bm)^3}.$$

Damit dieser Ausdruck ein Grösstes werde, muss sowohl $\frac{dZ}{dm}=0$, als auch $\frac{dZ}{dn}=0$ gesetzt werden, und dieses führt zu den Gleichungen

$$2mn-2an+bm=0,$$
$$2mn-2bm+an=0;$$

und daher

$$m=\frac{a}{2}, \quad n=\frac{b}{2}.$$

Auch überzeugt man sich leicht, dass für diese Werthe von m und n

$$\frac{d^2Z}{dn^2} = -\frac{2^3}{3^4}\pi^2 \sin^2\omega a^2, \quad \frac{d^2Z}{dm^2} = -\frac{2^3}{3^4}\pi^2 \sin^2\omega b^2,$$

$$\left(\frac{d^2Z}{dmdn}\right)^2 - \left(\frac{d^2Z}{dn^2}\right)\left(\frac{d^2Z}{dm^2}\right) = -\frac{2^4}{3^7}\pi^4 \sin^4\omega a^2 b^2;$$

diese Grössen also negativ sind.

Es berührt also die grösste Ellipse die Seiten des Dreiecks in ihrer Mitte.

Die Coordinaten des Mittelpunkts sind $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{a}{3}$, und $-\frac{\delta}{\alpha}=\frac{b}{3}$; also der Schwerpunkt des Dreiecks zugleich der Mittelpunkt der Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse:

$$y^2 + \frac{b}{a}xy + \frac{b^2}{a^2}x^2 - by - \frac{b^2}{a}x + \frac{b^2}{4} = 0. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Der Flächeninhalt der Ellipse

$$z = \frac{\pi . \sin\omega ab}{2\sqrt{27}} = \frac{\pi}{\sqrt{27}} \Delta MON. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

d. h. es verhält sich der Flächeninhalt der Ellipse zum Flächeninhalte des Dreiecks, so wie der Kreis zum umschriebenen gleichseitigen Dreiecke.

Folgerung. Bezeichnet S die Summe der Quadrate der Achsen der Ellipse, so ist bekanntlich für (1)

$$S=\frac{4\beta^2}{\alpha^2}(1+C-2B\cos\omega),$$

oder für (*b*)

$$S=\frac{2}{9}(2a^2+2b^2-2ab\cos\omega)$$

oder

$$S=\frac{2}{9}\Sigma. \dots\dots\dots\dots\dots \quad (8)$$

wo Σ die Summe der Quadrate der Seiten des gegebenen Dreiecks bezeichnet.

Es verhält sich also die Summe der Quadrate der Achsen der Ellipse zur Summe der Quadrate der Seiten des Dreiecks, wie das doppelte Quadrat des Durchmessers eines Kreises zum dreifachen Quadrate der Seite des umschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

§. 2.

Bestimmung der kleinsten Ellipse, welche um ein gegebenes Dreieck beschrieben werden kann.

Erste Auflösung.

Es seien wie früher: MNO das gegebene Dreieck, OM die Achse der x, ON die Achse der y, der Coordinatenwinkel $MON=\omega$....; $(0,0)$ die Coordinaten des Punktes O,.... $(a,0)$ des Punktes M,.... $(0,b)$ des Punktes N, so erhalten wir für alle Ellipsen:

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0\ (\alpha<0), \dots \quad (1)$$

welche durch die Scheitel des Dreiecks gehen, folgende Bedingungsgleichungen:

$$F=0,\ D=-\frac{b}{2},\ E=-\frac{Ca}{2}\dots\dots\dots \quad (2)$$

Für das Quadrat Z des Flächeninhalts z der Ellipse erhalten wir dann

$$Z=-\frac{\pi^2\sin^2\omega(\beta^2-\alpha\gamma)^2}{\alpha^3}=-\frac{\pi^2\sin^2\omega}{16}\cdot\frac{(C^2a^2-2CBab+Cb^2)^2}{(B^2-C)^3}. \quad (3)$$

Damit dieser Ausdruck ein Kleinstes werde, muss sowohl $\frac{dZ}{dC}=0$, als auch $\frac{dZ}{dB}=0$ gesetzt werden, und solches führt zu den Gleichungen:

$$4B^2ab-4CBa^2-2B^2b^2+2CBab+C^2a^2-Cb^2=0 \dots \quad (4)$$

und

$$4B^2ab-3CBa^2-3Bb^2+2Cab=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Multiplicirt man (5) mit B und zieht sie dann von (4) ab, so erhält man:

$$B^2b^2-CB^2a^2+C^2a^2-Cb^2=0$$

oder

$$(B^2-C)(b^2-Ca^2)=0,$$

also, da $B^2-C<0$, nothwendiger Weise $C=\frac{b^2}{a^2}$.

Substituirt man diesen Werth von C in (5), so erhält màn

$$B=\frac{3b}{4a}\pm\frac{b}{4a},$$

also, wieder weil $B^2-C<0$, $B=\frac{b}{2a}$.

Auch überzeugt man sich leicht, dass für diese Werthe von B und C

$$\frac{d^2Z}{dC^2}=\frac{4^2\pi^2\sin^2\omega a^6}{3^4.b^2},\quad \frac{d^2Z}{dB^2}=\frac{4^3}{3^4}\pi^2\sin^2\omega a^4,$$

also >0 sind, und

$$\left(\frac{d^2Z}{dC.dB}\right)^2-\left(\frac{d^2Z}{dC^2}\right)\left(\frac{d^2Z}{dB^2}\right)=-\frac{4^4}{3^7}\frac{\pi^4\sin^4\omega\, a^{10}}{b^4},$$

also <0 ist.

Zweite Auflösung.

Da

$$Z=-\pi^2\sin^2\omega\frac{(\beta^2-\alpha\gamma)^2}{\alpha^3},$$

so erhalten wir, α als Constante betrachtend, da wegen (2) auch γ constant und $-\alpha\gamma>0$ ist, für Z den kleinsten Werth, wenn

$$\beta=E-BD=-\frac{Ca}{2}+\frac{Bb}{2}=\frac{\alpha a}{2}-\frac{B^2a}{2}+\frac{Bb}{2}$$

ein Minimum ist, und hieraus

$$B=\frac{b}{2a}$$

und

$$Z=-\frac{\pi^2\sin^2\omega}{2^{12}}\cdot\frac{\left(16\alpha^2a^2-8\alpha b^2+\frac{b^4}{a^2}\right)^2}{\alpha^3}.$$

Betrachten wir jetzt wieder α als veränderlich und setzen $\frac{dZ}{d\alpha}=0$, so erhalten wir

$$\alpha=-\frac{b^2}{4a^2}\pm\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2},$$

also, da $\alpha<0$,

$$\alpha=-\frac{3b^2}{4a^2},\quad C=\frac{b^2}{a^2};$$

wie in der ersten Auflösung.

Die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse sind $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{a}{3}$ und $-\frac{\delta}{\alpha}=\frac{b}{3}$; also ist der Schwerpunkt des Dreiecks der Mittelpunkt der Ellipse.

Die Gleichung der Ellipse:

$$y^2+\frac{b}{a}xy+\frac{b^2}{a^2}x^2-by-\frac{b^2}{a}x=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Der Flächeninhalt der Ellipse:

$$z=\frac{2\pi\sin\omega ab}{\sqrt{27}}=\frac{4\pi}{\sqrt{27}}\Delta MON. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

d. h. es verhält sich der Flächeninhalt der Ellipse zum Flächeninhalte des gegebenen Dreiecks so wie der Kreis zum eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecke.

Folgerung 1. Bezeichnet S die Summe der Quadrate der Achsen der Ellipse, so ist für (1)

$$S=\frac{4(\beta^2-\alpha\gamma)}{\alpha^2}(1+C-2B\cos\omega),$$

also für (6):

$$S=\frac{8}{9}(2a^2+2b^2-2ab\cos\omega),$$

$$S=\frac{8}{9}\Sigma. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

wo Σ die Summe der Quadrate der Seiten des gegebenen Dreiecks bezeichnet. Es verhält sich also die Summe der Quadrate der Achsen der Ellipse zur Summe der Quadrate der Seiten des Dreiecks, wie das doppelte Quadrat des Durchmessers der Ellipse zum dreifachen Quadrate der Seite des eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks.

Folgerung 2. Für ein und dasselbe Dreieck sind die grösste Ellipse in demselben, und die kleinste um dasselbe, concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend [siehe (6) §. 1. und (6) §. 2.]. — Ihre Flächen sind in dem constanten Verhältnisse wie 1 : 4 [siehe (7) §. 1. und (7) §. 2.]. — Die Summe der Quadrate ihrer Achsen ist auch in dem constanten Verhältnisse wie 1:4 [siehe (8) §. 1. und (8) §. 2.].

Folgerung 3. Wenn die grösste Ellipse in ein Dreieck beschrieben ist und durch die Verbindungslinien der Berührungspunkte ein inneres Dreieck gebildet wird, so ist die grösste Ellipse in dem äussersten Dreiecke zugleich die kleinste, welche um das innere beschrieben werden kann: — denn beide Dreiecke haben denselben Schwerpunkt.

§. 3.

Bestimmung der grössten Ellipse, welche die vier Seiten eines gegebenen Vierecks berührt.

Nehmen wir zwei Seiten des Vierecks zu Coordinatenachsen, bezeichnen die Durchschnittspunkte der dritten auf den Achsen durch $(a,0)$, $(0,b)$.... der vierten durch $(a',0)$, $(0,b')$; so erhalten wir für alle Ellipsen:

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0\,(\alpha<0)\,.\;.\;.\;.\quad(1)$$

welche die Seiten des Vierecks berühren, wenn $(0,n)$ den veränderlichen Berührungspunkt auf der Achse der y bezeichnet, folgende Bedingungsgleichungen:

$$D=-n,\;F=n^2,\;\gamma=0,\;E^2=Cn^2,\;\varphi=0\;.\;.\;.\;.\;.\quad(2)$$

und

$$\left.\begin{aligned}\alpha a^2b^2+2\delta a^2b+\varphi a^2-2\beta ab^2-2\varepsilon ab+\gamma b^2=0,\\ \alpha a'^2b'^2+2\delta a'^2b'+\varphi a'^2-2\beta a'b'^2-2\varepsilon a'b'+\gamma b'^2=0.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\quad(3)$$

In Folge der Gleichungen (2) reduciren sich die Gleichungen (3) auf:

$$\left.\begin{aligned}ab(Bn-E)+2aEn-2bn^2+2n^3=0,\\ a'b'(Bn-E)+2a'En-2b'n^2+2n^3=0;\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\quad(4)$$

also

$$E=\frac{nbb'(a'-a)+n^2(ab-a'b')}{aa'(b'-b)};$$

$$\left.\begin{aligned}Bn-E&=\frac{2n^2[ab'-ba'+n(a'-a)]}{aa'(b'-b)},\\ Bn+E&=\frac{2n(a'-a)[bb'-n(b+b')+n^2]}{aa'(b'-b)}.\end{aligned}\right\}\;.\;.\;.\;.\;.\quad(5)$$

Für das Quadrat Z des Flächeninhalts z der Ellipse erhalten wir

$$Z=-\pi^2\sin^2\omega\frac{\beta^4}{\alpha^3}=-\pi^2\sin^2\omega n^6\frac{Bn+E}{(Bn-E)^3},$$

oder wegen (5):

$$Z=-\frac{\pi^2\sin^2\omega}{4}(a'-a)a^2a'^2(b'-b)^2n\frac{bb'-n(b+b')+n^2}{[ab'-ba'+n(a'-a)]^3}.$$

Der Flächeninhalt ist ein Maximum, wenn $\frac{dZ}{dn}=0$, und hieraus:

$$n^2(2ab'-2a'b-ab+a'b')-2n(ab'^2-b^2a')+(ab'-ba')bb'=0\ldots(6)$$

$$n=\frac{ab'^2-b^2a'}{2ab'-2a'b-ab+a'b'}\pm N,$$

wenn man der Kürze halber den zweiten Theil der Wurzel durch N bezeichnet.

Da aber $\frac{d^2Z}{dn^2}<0$ sein muss, so erhalten wir:

$$(2ab'-2a'b-ab+a'b')n-(ab'^2-b^2a')\gtrless 0,$$

je nachdem $a'\gtrless a$; also muss die eine oder die andere Wurzel genommen werden, je nachdem $a'\gtrless a$ ist.

Vertauschen wir a mit b, a' mit b', so erhalten wir aus (6) den Berührungspunkt auf der Achse der x. Sind aber vier Tangenten und zwei Berührungspunkte auf ihnen gegeben, so ergeben sich die übrigen Berührungspunkte und der Mittelpunkt leicht, und lassen sich auch einfach construiren.

Der Gleichung (6) kann man auch folgende Gestalt geben:

$$\left(\frac{n-b}{b'-n}\right)^2+2\left(\frac{b}{b'}-\frac{a}{a'}\right)\left(\frac{n-b}{b'-n}\right)-\frac{b}{b'}\frac{a}{a'}=0,$$

und sie stimmt dann mit der von Pfaff gegebenen überein. (Mon. Corr. B. XXII. S. 223.)

Folgerung 1. Wenn das gegebene Viereck ein Trapez, so ist $\frac{a'}{b'}=\frac{a}{b}$, und also auch aus (6)

$$n=\frac{2bb'}{b+b'},$$

und daher:

$$Z=\frac{\pi^2\sin^2\omega a^2a'^2(b'-b)^4}{16(a'-a)^2.bb'},\quad z=\frac{\pi\sin\omega aa'(b'-b)^2}{4(a'-a)\sqrt{bb'}}=\frac{\pi}{4}\sin\omega a(b'-b)\cdot\sqrt{\frac{b'}{b}}.$$

Der Flächeninhalt T des Trapez $=\frac{\sin\omega}{2}(a'b'-ab)=\frac{\sin\omega}{2}\cdot\frac{a(b'^2-b^2)}{b}$.

Bezeichnen nun p, q die parallelen Seiten des Trapez, so ist

$$p=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega},$$
$$q=\sqrt{a'^2+b'^2-2a'b'\cos\omega},$$
$$q=\frac{b'}{b}\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega};$$

also

$$\sqrt{pq}=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}\sqrt{\frac{b'}{b}},$$
$$p+q=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\omega}\,\frac{b+b'}{b};$$

und somit

$$z=\frac{1}{2}\pi.\frac{\sqrt{pq}}{p+q}.T.$$

Das Verhältniss der Fläche der Ellipse zum Trapez hängt bloss von dem Verhältnisse der parallelen Seiten ab.

Für die Coordinaten des Mittelpunkts der Ellipse erhält man

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{a+a'}{4},\quad -\frac{\delta}{\alpha}=\frac{b+b'}{4}.$$

Der Mittelpunkt liegt also im Durchschnittspunkte derjenigen beiden geraden Linien, welche die Mitten der beiden Paare gegenüberliegender Seiten verbinden.

Folgerung 2. Wenn das Viereck ein Parallelogramm, so ist $p=q$, also

$$z=\tfrac{1}{4}\pi.\ \text{Flächeninhalt des Parallelogramms.}$$

§. 4.

Bestimmung der kleinsten Ellipse, welche um ein gegebenes Viereck beschrieben werden kann.

Wir wählen zwei gegenüberliegende Seiten des unregelmässigen Vierecks zu Coordinatenachsen, und zwar so, dass die Coordinaten der Scheitel des Vierecks positive Werthe erhalten. (Solches ist immer möglich, wenn das Viereck keinen convexen Winkel hat. — Hat es einen solchen, so kann bekanntlich gar keine, durch die Scheitel gehende Ellipse beschrieben werden.)

Für alle Ellipsen:

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0\,(\alpha<0).\ \ .\ \ .\ \ .\quad(1)$$

welche durch die vier Scheitel gehen, erhalten dann C, D, E, F bestimmte Werthe, und namentlich sind auch $E<0$, $D<0$, $F>0$, $C>0$, $D^2-F=\gamma>0$, $E^2-CF=\varphi>0$, $E^2D^2-CF^2=\lambda>0$, $C<\frac{E^2D^2}{F^2}$, so dass B allein veränderlich bleibt.

Für das Quadrat Z des Flächeninhalts der Ellipse erhalten wir

$$Z=-\pi^2\sin^2\omega\frac{[(E-BD)^2-(B^2-C)(D^2-F)]^2}{(B^2-C)^3}.$$

Damit dieser Ausdruck ein Kleinstes werde, setze man $\frac{dZ}{dB}=0$, und dieses führt zu der von Euler (Nova Acta Petrop. T. IX.) gegebenen Gleichung:

$$B^3-\frac{4DE}{F}.B^2+\frac{3CD^2+3E^2-CF}{F}B-\frac{2CDE}{F}=0. \;\ldots\; (2)$$

Da aber zugleich $\frac{d^2Z}{dB^2}>0$ sein muss, so erhalten wir noch die Bedingung:

$$B^2-\frac{8DE}{3F}.B+\frac{3CD^2+3E^2-CF}{3F}>0. \;*)$$

Es müssen also die Werthe von B grösser als die beiden Wurzeln der Gleichung

$$x^2-\frac{8DE}{3F}x+\frac{3CD^2+3E^2-CF}{3F}=0$$

sein, oder kleiner als beide.

Oder: B grösser oder kleiner als die beiden folgenden Werthe von x:

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{4DE}{3F}+\sqrt{\frac{16D^2E^2-9CD^2F-9E^2F+3CF^2}{9F^2}},\\ x&=\frac{4DE}{3F}-\sqrt{\frac{16D^2E^2-9CD^2F-9E^2F+3CF^2}{9F^2}}.\end{aligned}\right\}\;\ldots\; (3)$$

Da aber für Werthe von B, grösser als die Werthe von x, $B^2>C$, so geben dieselben keine Ellipsen. — Wir können also nur dann kleinste Ellipsen erhalten, wenn $B<$ als die beiden Werthe von x. Die Gleichung (2) verwandelt sich mittelst der Substitution $B=y+\frac{4DE}{3F}$ in

*) Dieser Ausdruck wird <0, wenn man zwei Diagonalen des Vierecks zu Coordinatenachsen wählt (weil $F<0$), wie solches z. B. beim Parallelogramm nothwendig wird. — Der Gang der Untersuchung bleibt aber sonst im Wesentlichen derselbe.

$$y^3 + Py + Q = 0, \quad \ldots \quad (4)$$

wo

$$P = \frac{9CD^2F + 9E^2F - 3CF^2 - 16D^2E^2}{3F^2} = -\frac{9\varphi\gamma + 6\lambda + E^2D^2}{3F^2} < 0$$

ist;

$$Q = \frac{2DE}{27F^3}(54CD^2F + 54E^2F - 45CF^2 - 64D^2E^2)$$

$$= -\frac{2DE}{27F^3}(54\varphi\gamma + 9\lambda + E^2D^2)$$

auch <0 ist.

Nehmen wir 1) an, es sei $R = Q^2 + \frac{4}{27}P^3 > 0$, so hat die Gleichung (4) nur eine reelle Wurzel, und zwar eine positive, da P und Q negative Grössen sind; also $y > 0$, und $B = y + \frac{4DE}{3F}$ giebt $B^2 > C$. Daher, wenn die Gleichung (2) nur eine reelle Wurzel hat, nicht, wie Euler behauptet, nothwendiger Weise eine kleinste Ellipse sich ergiebt, sondern gar keine *).

Ist nun 2) $R < 0$, so hat die Gleichung (4) drei reelle Wurzeln, und diese lassen sich, da $P < 0$, $Q < 0$, folgendermassen ausdrücken:

$$y = 2\cos\varphi\sqrt{-\frac{P}{3}}, \quad y = 2\cos(240^0 + \varphi)\sqrt{-\frac{P}{3}},$$

$$y = 2\cos(120^0 + \varphi)\sqrt{-\frac{P}{3}}.$$

Ohne den Werth von φ genauer zu bestimmen, bemerken wir doch, dass $\varphi < 30^0 > 0$ ist.

Es liegen also diese Werthe von y innerhalb der Grenzen:

$y = 2\sqrt{-\frac{P}{3}}$	$y = 0$	$y = -\sqrt{-\frac{P}{3}}$
$y = \sqrt{3}\cdot\sqrt{-\frac{P}{3}}$	$y = -\sqrt{-\frac{P}{3}}$	$y = -\sqrt{3}.\sqrt{-\frac{P}{3}}$.

Wir erhalten also für $B = y + \frac{4DE}{3F}$:

---

*) Es lässt sich aber auch zeigen, dass in diesem Falle durch die vier Scheitel gar keine Ellipse beschrieben werden kann (also dass ein Scheitel innerhalb des von den anderen gebildeten Dreiecks liegt). Denn, welches auch die Werthe von E, D, F sein mögen, so liegen die Werthe der positiven Grösse C immer innerhalb der Grenzen $C = \frac{E^2}{F}$ und $C = 0$. Diese beiden Werthe geben aber für R eine negative Grösse, also auch nach der Form des Ausdrucks alle zwischen ihnen liegenden Werthe.

Im ersten Falle: Werthe grösser als beide Werthe von x in (3), also keine kleinste Ellipse.

Im zweiten Falle: Werthe zwischen den beiden Werthen von x in (3) liegend, also keine kleinste Ellipse.

Im dritten Falle: Werthe kleiner als beide Werthe von x in (3), also eine kleinste Ellipse möglich.

Es giebt also auch in diesem Falle, nicht, wie Euler meint, drei, sondern nur eine kleinste Ellipse.

Folgerung 1. Ist das Viereck ein Parallelogramm, und nimmt man die Diagonalen zu Coordinatenachsen, so ist $D=0$, $E=0$, und die Gleichung (2) giebt drei reelle Wurzeln $B=\sqrt{C}$, $B=-\sqrt{C}$, $B=0$, von denen nur die letzte der kleinsten Ellipse entspricht.

Der Flächeninhalt der Ellipse $z=\pi\sin\omega\frac{F}{\sqrt{C}}$.

Der Flächeninhalt des Parallelogramms ist aber $=\frac{2F}{\sqrt{C}}\sin\omega$;

also $z=\frac{\pi}{2}$. Flächeninhalt des Parallelogramms.

Anmerkung. Die Bestimmung der kleinsten um ein Trapez beschriebenen Ellipse beruht nur auf einer quadratischen Gleichung, wenn wir folgendermassen verfahren. Es seien $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, b)$, (c, b) die vier Scheitel des Trapez, so erhalten wir für alle Ellipsen:

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0 \quad (a<0),$$

welche durch die Scheitel des Trapez gehen, folgende Bedingungsgleichungen:

$$F=0,\ E=-\frac{Ca}{2},\ D=-\frac{b}{2},\ B=\frac{C(a-c)}{2b}.$$

Daher das Quadrat Z des Flächeninhalts der Ellipse:

$$Z=-4\pi^2\sin^2\omega b^6\frac{(C^2ac+Cb^2)^2}{[C^2(a-c)^2-4Cb^2]^3},$$

und wenn man $\frac{dZ}{dC}=0$ setzt:

$$C^2ac(a-c)^2+2b^2(a^2-ac+c^2)C-2b^4=0.$$

$\frac{d^2Z}{dC^2}<0$ zeigt uns, welches Zeichen genommen werden muss. Führt man die Rechnung durch, so ergiebt sich auch hier, dass das Verhältniss der Fläche des Trapez zur Ellipse bloss von dem Verhältnisse der parallelen Seiten abhängt.

Anmerkung des Herausgebers. Der Herr Verfasser dieses von demselben zur Aufnahme in das Archiv mir mitgetheilten Aufsatzes wünscht, dass hier in Bezug auf die Abhandlung des Herrn Professors Anger in Theil X. Nr. XV. bemerkt werde, dass der vorliegende Aufsatz bereits im Jahre 1839 geschrieben und im Bulletin de l'Academie Imp. de St. Petersbourg T. VI. No. 20.21. gedruckt erschienen ist.

XII.

Miscellen.

In den Berichten über die Mittheilungen von Freunden der Naturwissenschaften in Wien. Gesammelt und herausgegeben von W. Haidinger. 1847. März. Nr. 11. S. 269. hat Herr Professor Dr. Schulz von Strassnicki eine Methode zur praktischen Verzeichnung von Ellipsen, wenn deren Axen als bekannt angenommen werden, angegeben, die nach meiner Meinung, so einfach die Sache auch an sich ist, allgemeiner bekannt zu werden verdient, und daher im Nachstehenden mitgetheilt werden soll.

Diese Methode gründet sich auf die folgenden Betrachtungen. Wenn ACB in Taf. II. Fig. 5. der vierte Theil einer Ellipse ist und $AC=a$, $BC=b$ deren Halbaxen sind, so ziehe man AB und fälle auf diese Linie von C das Perpendikel CD. Setzen wir dann der Kürze wegen $AD=v$, $BD=w$, $CD=u$; so ist nach bekannten geometrischen Sätzen

$$v:a=a:v+w,$$
$$w:b=b:v+w,$$
$$v:u=u:w;$$

d. i.

$$v:a=a:\sqrt{a^2+b^2},$$
$$w:b=b:\sqrt{a^2+b^2},$$
$$v:u=u:w;$$

also

$$v=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ w=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}},\ u=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Weil nun bekanntlich

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$$

die Gleichung der Ellipse ist, so ist für $x=u$:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2})=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2},$$

d. i. $y=u$; und für $x=v$ ist:

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{a^4}{a^2+b^2})=\frac{b^4}{a^2+b^2},$$

d. i. $y=w$. Nimmt man also $CP=CD$, $CP_1=AD$ und errichtet durch P und P_1 die Perpendikel PQ und P_1Q_1 auf AC, so ist $PQ=CD$ und $P_1Q_1=BD$, woraus man sieht, dass die Punkte Q und Q_1 der Ellipse leicht gefunden werden können. Diese beiden Punkte nebst den Punkten A und B liefern aber vier Punkte des Quadranten der Ellipse, durch welche man denselben in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit aus freier Hand wird beschreiben können.

Indess wird es doch der Genauigkeit gewiss förderlich sein, wenn man ausser den vorhergehenden Punkten noch ein Paar andere Punkte des Quadranten der Ellipse mit Leichtigkeit finden kann, und ich will daher der obigen Mittheilung des Herrn Professors Dr. Schulz von Strassnicki noch die folgenden Bemerkungen hinzufügen.

Setzt man nämlich $x=\frac{3}{5}a$, so ist

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{9}{25}a^2)=\frac{16}{25}b^2,\quad y=\frac{4}{5}b;$$

und wenn man $x=\frac{4}{5}a$ setzt, so ist

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-\frac{16}{25}a^2)=\frac{9}{25}b^2,\quad y=\frac{3}{5}b.$$

Theilt man also sowohl die grosse, als auch die kleine Halbaxe der Ellipse in fünf gleiche Theile, so ist für

$$CP_2=\frac{3}{5}AC \text{ und } CP_3=\frac{4}{5}AC$$

nach dem Vorhergehenden

$$P_2Q_2=\frac{4}{5}BC \text{ und } P_3Q_3=\frac{3}{5}BC,$$

woraus sich ergiebt, dass sich immer auch die Punkte Q_2 und Q_3 leicht durch Construction bestimmen lassen, so dass man imm[er] sechs Punkte eines jeden Quadranten der Ellipse sehr leicht dur[ch] Construction finden kann.

Hiernach würde man also bei der Verzeichnung einer Elli[pse] aus ihren beiden Axen auf folgende Art zu verfahren haben. Taf. II. Fig. 6. seien AA' und BB' die beiden Axen der Ellip[se]

ıd C sei ihr Mittelpunkt, so erhält man den zwischen CA und B liegenden Quadranten der Ellipse auf folgende Art, woraus ınn auch zugleich ganz von selbst erhellen wird, wie man sich ɜi der Verzeichnung eines jeden andern Quadranten derselben, ıd somit der ganzen Ellipse, verhalten muss.

Man ziehe AB und fälle von C auf diese Linie das Perpenikel CD. Dann nehme man

$$CP=CD,\ CP_1=AD,\ CP_2=\frac{3}{5}AC,\ CP_3=\frac{4}{5}AC;$$

richte durch die Punkte

$$P,\ P_1,\ P_2,\ P_3$$

uf AC die Perpendikel

$$PQ,\ P_1Q_1,\ P_2Q_2,\ P_3Q_3$$

ınd mache

$$PQ=CD,\ P_1Q_1=BD,\ P_2Q_2=\frac{4}{5}BC,\ P_3Q_3=\frac{3}{5}BC;$$

so sind Q, Q_1, Q_2, Q_3 nebst A und B sechs Punkte des Quadranten der Ellipse, durch welche man denselben in den meisten Fällen mit hinreichender Genauigkeit aus freier Hand ziehen kann.

G.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Wann drücken die Gleichungen:

$$(a_1^2-b_2b_3)x+(a_3b_3-a_1a_2)y+(a_2b_2-a_1a_3)z=0,$$
$$(a_3b_3-a_1a_2)x+(a_2^2-b_1b_3)y+(a_1b_1-a_2a_3)z=0,$$
$$(a_2b_2-a_1a_3)x+(a_1b_1-a_2a_3)y+(a_3^2-b_1b_2)z=0$$

eine und dieselbe Ebene aus?

Die vorgelegten Gleichungen sind auch:

$$(a_1^2 - b_2 b_3)\frac{x}{z} + (a_3 b_3 - a_1 a_2)\frac{y}{z} + (a_2 b_2 - a_1 a_3) = 0,$$

$$(a_3 b_3 - a_1 a_2)\frac{x}{z} + (a_2^2 - b_1 b_3)\frac{y}{z} + (a_1 b_1 - a_2 a_3) = 0,$$

$$(a_2 b_2 - a_1 a_3)\frac{x}{z} + (a_1 b_1 - a_2 a_3)\frac{y}{z} + (a_3^2 - b_1 b_2) = 0.$$

Zieht man nun aus den ersten zwei Gleichungen die Werthe von $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$, so erhält man dadurch die Gleichung der Durchschnittslinie; sollen also die Ebenen zusammenfallen, so muss man für $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ Werthe von der Form $\frac{0}{0}$ erhalten. Das Gleiche wird Statt haben müssen, wenn man die erste und dritte Gleichung zur Bestimmung von $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ benützt.

Aus der ersten und zweiten Gleichung aber folgt:

$$\frac{x}{z} = \frac{a_2(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}{b_3(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{a_1(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}{b_3(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}.$$

Dagegen folgt aus der ersten und dritten:

$$\frac{x}{z} = \frac{a_3(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}{a_1(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_3 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)},$$

$$\frac{y}{z} = \frac{b_2(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}{a_1(a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3)}.$$

Damit also die vorgelegten drei Gleichungen eine einzige Ebene ausdrücken, genügt die Bedingung:

$$a_3^2 b_3 - 2a_1 a_2 a_3 + a_2^2 b_2 + a_1^2 b_1 - b_1 b_2 b_3 = 0.$$

(Man sehe: Mémoire sur l'équilibre intérieur des corps solides homogènes, par Lamé et Clapeyron in Crelle's Journal. Bd. 7. §. 34.)

XIII.

Auszug aus einem noch ungedruckten Werkchen über analytische Perspektive.

Von

Herrn L. Mossbrugger,

Lehrer der Mathematik an der Kantonsschule zu Aarau.

---

1. Zur Erklärung des Folgenden wollen wir nachstehende Bezeichnungen und Annahmen vorausschicken.

O sei das Auge; (t,u,v) seien seine Coordinaten, welche auf drei rechtwinklichte Coordinatenachsen der x, der y, und der z bezogen sind. Die Ebene der yz sei, so lange keine besondere Abänderung angegeben wird, diejenige Ebene, auf welcher sich die Punkte im Raume perspektivisch projiciren und die wir mit dem Namen Tafel bezeichnen. Die zu projicirenden Punkte, Figuren, Oberflächen u. s. w. nehmen wir, wenn es nicht besonders angemerkt wird, hinter der Tafel oder auf der negativen Seite der Achse der x, das Auge hingegen vor derselben oder auf der positiven Seite der x an. Die Punkte im Raume bezeichnen wir mit A, B, C,..., deren perspektivische Projektionen aber mit A_p, B_p, C_p,.... O_1 ist die orthogonale Projektion des Auges auf der Tafel und heisst der Augenpunkt. Die Ebene der xy, in oder über welcher sich die zu projicirenden Gegenstände befinden, heisst die Grundebene, ihr Durchschnitt mit der Tafel, oder die Achse der y, Basis. Unter perspektivischer Projektionslinie verstehen wir jede von einem beliebigen Punkte im Raume nach dem Auge gezogene Linie; $-X$, Y, Z seien die rechtwinklichten Coordinaten eines Punktes A im Raume; y', z' die Coordinaten seiner Perspektive A_p; beide Coordinatensysteme sind auf den gleichen Coordinatenanfang und auf die gleichen Achsen bezogen.

Sind nun

$$x = m_1 + n_1 z,$$
$$y = m_2 + n_2 z$$

die Gleichungen der perspektivischen Projektionslinie des Punktes A, so haben wir zur Bestimmung der Coefficienten m_1, n_1, m_2, n_2 und der Coordinaten y', z' folgende Bestimmungsgleichungen:

$$-X=m_1+n_1Z;\quad 0=m_1+n_1z';\quad t=m_1+n_1v;$$
$$Y=m_2+n_2Z;\quad y'=m_2+n_2z';\quad u=m_2+n_2v.$$

Aus diesen finden wir:

$$\left.\begin{aligned} Y&=y'+\frac{X}{t}(y'-u),\\ Z&=z'+\frac{X}{t}(z'-u); \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 1)$$

$$\left.\begin{aligned} y'&=\frac{tY+uX}{t+X},\\ z'&=\frac{tZ+vX}{t+X}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 2)$$

2. Nehmen wir jetzt an, es befinde sich ein System paralle- ler Linien in einer Ebene von beliebiger Lage, und nehmen die- sem zufolge ferner an, dass

$$x=m_1+n_1z \quad \ldots\ldots\ 1)$$

die Gleichung einer festen geraden in der Ebene der xz befind- lichen Linie sei.

Die Ebene der xz wollen wir für jetzt, der Einfachheit wegen, durch das Auge gehend annehmen.

Ferner seien

$$\left.\begin{aligned} x&=\mu_1+\nu_1z\\ y&=\mu_2+\nu_2z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ 2)$$

die Gleichungen einer Geraden, die sich immer in paralleler La- mit sich selbst auf der Linie 1) bewegt und auf diese Art e- Ebene erzeugt, für deren Gleichung wir:

$$-\nu_2x-(n_1-\nu_1)y+n_1\nu_2z+m_1\nu_2=0 \quad \ldots\ 3)$$

finden. Bemerken wir, dass, weil sich die Linien 1) und 2) schn- den, $\mu_2=\frac{m_1-\mu_1}{n_1-\nu_1}$ ist, so finden wir leicht für die Gleichu- einer Ebene, welche durch die Linie 2) und das Auge (t, v) ge- folgende:

$$\left.\begin{aligned} &\nu_2\{m_1-\mu_1+v(n_1-\nu_1)\}x-(n_1-\nu_1)\{\mu_1-t+v\nu_1\}y\\ &+\nu_2\{\mu_1n_1-m_1\nu_1-(n_1-\nu_1)t\}z+\nu_2\{(m_1\nu_1-\mu_1n_1)v-(m_1-\mu_1)t\} \end{aligned}\right\}=0\ldots$$

Nehmen wir ferner an, es seien

$$\left.\begin{array}{l} x = \mu_3 + \nu_1 z \\ y = \mu_4 + \nu_2 z \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots 5)$$

die Gleichungen einer Linie, die mit der Geraden 2) parallel ist, und zugleich mit dieser in der Ebene 3) liegt, so finden wir, wie vorhin, für die Gleichung der Ebene, welche durch die Linie 5) und durch das Auge (t, v) geht, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \nu_2\{m_1 - \mu_3 + v(n_1 - \nu_1)\}x - (n_1 - \nu_1)\{\mu_3 - t + v\nu_1\}y \\ + \nu_2\{\mu_3 n_1 - m_1\nu_1 - (n_1 - \nu_1)t\}z + \nu_2\{(m_1\nu_1 - \mu_3 n_1)v - (m_1 - \mu_3)t\} \end{array}\right\} = 0 \ldots 6)$$

Die Durchschnitte der Ebenen 4) und 6) mit der Tafel geben die Perspektive der Linien 2) und 5). Wir erhalten die Gleichungen dieser Durchschnitte, wenn wir in den Gleichungen 4) und 6) $x=0$ setzen, wodurch

$$\left.\begin{array}{l} -(n_1 - \nu_1)\{\mu_1 - t + v\nu_1\}y + \nu_2\{\mu_1 n_1 - m_1\nu_1 - (n_1 - \nu_1)t\}z \\ + \nu_2\{(m_1\nu_1 - \mu_1 n_1)v - (m_1 - \mu_1)t\} \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots 7)$$

$$\left.\begin{array}{l} -(n_1 - \nu_1)\{\mu_3 - t + v\nu_1\} + \nu_2\{\mu_3 n_1 - m_1\nu_1 - (n_1 - \nu_1)t\}z \\ + \nu_2\{(m_1\nu_1 - \mu_3 n_1)v - (m_1 - \mu_3)t\} \end{array}\right\} = 0 \ldots\ldots 8)$$

wird.

Da diese Gleichungen zwei Linien darstellen, die nicht parallel sind, so können wir daraus schliessen, dass sich die perspektivischen Projektionen paralleler Linien schneiden. Bezeichnen wir die Coordinaten des Durchschnittspunkts dieser beiden Linien mit q, r; so finden wir:

$$q = -\frac{\nu_2 t}{\nu_1},\quad r = \frac{v\nu_1 - t}{\nu_1}. \quad\ldots\ldots\ldots 9)$$

Da diese Coordinaten-Werthe sowohl von den Coefficienten m_1 und n_1 der Linie 1), als auch von $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ unabhängig sind, so können wir daraus schliessen, dass sich die Projektionen aller parallelen Linien in einem Punkte schneiden. Man nennt diesen Punkt **Fluchtpunkt** oder **Zusammenlaufungspunkt**.

3. Wir erhalten leicht für die Gleichungen einer Linie, welche durch das Auge (t, v) und durch den Fluchtpunkt (q, r) geht, folgende:

$$\left.\begin{array}{l} x = -(v\nu_1 - t) + \nu_1 z, \\ y = -v\nu_2 + \nu_2 z. \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots 1)$$

Diese Gleichungen, welche zugleich der Durchschnittslinie der Ebenen 4) und 6) in No. 1. angehören, stellen eine Linie vor, die mit den Linien 2) und 5) in No. 1. parallel sind.

Wir sehen ferner aus den Gleichungen 9) der No. 2., dass, wenn wir den *) Fuss- und den Fluchtpunkt einer Linie kennen,

*) D. h. den Punkt, in welchem die Linie die Tafel trifft.

wir auch die Gleichung ihrer Perspektive finden können. Sind daher

$$\left.\begin{array}{l} x = m_3 + n_3 z \\ y = m_4 + n_4 z \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 2)$$

die gegebenen Gleichungen einer Geraden im Raume, so finden wir nach diesen Bemerkungen leicht für die Gleichung ihrer Perspektive folgende:

$$y' = -\frac{(m_3n_4 - m_4n_3)v + m_4t}{n_3v + m_3 - t} + \frac{m_3n_4 - m_4n_3 - n_4t}{n_3v + m_3 - t} z' \ldots\ldots$$

und wenn die Linie 2) durch einen gegebenen Punkt (a, b, c) geht, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$y' = -\frac{n_4(av - ct) - b(n_3v - t)}{n_3(v - c) - (t - a)} - \frac{n_4(t - a) + n_3b}{n_3(v - c) - (t - a)} z' \ldots\ldots$$

Wir können auch umgekehrt zeigen, dass, wenn die Coordinaten (b_1, c_1) des Fluchtpunkts und die Coordinaten (b_2, c_2) des Fusspunkts einer Geraden gegeben sind, wir nicht nur die Gleichung der Perspektive der Geraden, sondern auch die Gleichungen dieser letztern selbst bestimmen können. Denn die Gleichung der durch (b_1, c_1), (b_2, c_2) gehenden Perspektive ist:

$$y' = \frac{b_2c_1 - b_1c_2}{c_1 - c_2} + \frac{b_1 - b_2}{c_1 - c_2} z' \quad \ldots\ldots\ 5)$$

Sind nun

$$\left.\begin{array}{l} x = \mu_3 + \nu_3 z \\ y = \mu_4 + \nu_4 z \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ 6)$$

die zu bestimmenden Gleichungen der Geraden, deren Perspektive durch die Gleichung 5) dargestellt ist, so haben wir in Beziehung auf den Fusspunkt der Linie 6) die Gleichungen

$$0 = \mu_3 + n_3c_2,$$
$$b_2 = \mu_4 + n_4c_2.$$

Und in Beziehung auf den Fluchtpunkt nach No. 2. Gleichung

$$b_1 = -\frac{\nu_4 t}{\nu_3}, \quad c_1 = \frac{\nu_3 v - t}{\nu_3}.$$

Aus diesen vier Gleichungen finden wir:

$$\nu_3 = \frac{t}{v - c_1}, \quad \nu_4 = \frac{-b_1}{v - c_1};$$

$$\mu_3 = \frac{-c_2 t}{v - c_1}, \quad \mu_4 = \frac{b_2(v - c_1) + b_1c_2}{v - c_1};$$

führen, nehmen wir an, es sei $OA_p = v$, $AA_p = t$, $SO = -m_1$, $\angle G_pSO = \varphi$, $\angle A_pQD = \psi$, $\operatorname{cotg}\varphi = n_1$, $OD = y'$, $DG_p = z'$, AE senkrecht auf OY, SL parallel OZ, A_pJ und G_pL parallel OY; so ist:

$$z' : y' - m_1 = \operatorname{tg}\varphi : 1,$$

also

$$y' = m_1 + n_1 z' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

die Gleichung der Fluchtlinie F_pG_p, worin m_1 und n_1 bekannte Constanten und y', z' die laufenden Coordinaten sind.

Ferner sei

$$y' = M_1 + n_1 z' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

die Gleichung des Risses der gegebenen Ebene, und

$$y' = m_2 + n_2 z'$$

die Gleichung der Senkrechten A_pF_p auf F_pG_p, welche durch den Augenpunkt A_p, dessen Coordinaten $y_1' = 0$, $z_1' = v$ sind, geht, so haben wir zur Bestimmung von m_2 und n_2 die Gleichungen:

$$0 = m_2 + n_2 v,$$
$$n_2 = \operatorname{cotg}\psi;$$

oder, da $\psi = 90^0 + \varphi$, so ist

$$n_2 = -\frac{1}{n_1};$$

folglich ist die Gleichung von A_pF_p:

$$y' = \frac{1}{n_1}(v - z') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Nehmen wir ferner

$$y' = m_3 + n_3 z'$$

als die Gleichung der auf A_pF_p errichteten Senkrechten A_pA an, so haben wir: $A_pJ : AJ = 1 : \operatorname{tg}\varphi$, also $AJ = A_pJ : \operatorname{tg}\varphi$ oder $AJ = \frac{A_pJ}{n_1}$; ferner ist $A_pA^2 = A_pJ^2 + AJ^2$ oder

$t^2 = (A_pJ)^2 \left(1 + \frac{1}{n_1^2}\right)$; folglich $A_pJ = \frac{n_1 t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$, $AJ = \frac{t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$; mithin sind:

$$AE = v + \frac{t}{\sqrt{1 + n_1^2}}, \quad OE = A_pJ = \frac{n_1 t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$$

die Coordinatenwerthe des Punktes A. Es muss daher die Gleichung

erhält, wenn man durch das Auge mit den Linien der erwähnte Systeme parallele Linien zieht, ihre Durchschnitte mit der Taf sucht, und diese mit einander verbindet, d. h. die so eben co struirte Linie ist nichts anderes, als die Durchschnittslinie d Tafel mit einer durch das Auge gelegten Ebene, die parallel m der in No. 2. Gleichung 3) dargestellten Ebene ist. Man nen diese Linie Verschwindungs- oder Fluchtlinie der Eben

Eine Ebene ist daher bestimmt, wenn ihr Durchschnitt m der Tafel (Riss) und ihre Fluchtlinie gegeben ist.

Nach diesen Folgerungen wird es leicht sein, die Gleichu der Fluchtlinie einer Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

zu erhalten; diese ist nämlich, wie wir leicht finden:

$$y = \frac{At + Bu + Cv}{B} - \frac{Cz}{D} \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

6. Als eine Anwendung der in den vorhergehenden Nummer entwickelten Sätze wollen wir nun noch folgende Aufgabe lösen

Es sind die Coordinaten f, g der Perspektive eines in ein Ebene gelegenen Punktes, nebst den Gleichungen der Fluchtlini und des Risses der letztern gegeben; man soll die Gleichung d Perspektive des Perpendikels auf jene Ebene suchen, das durc den Punkt, dessen Perspektive gegeben ist, geht.

Sind q, r die jetzt noch unbekannten Coordinaten des Fluch punktes P_p des gesuchten, durch den gegebenen Punkt gehende Perpendikels auf die gegebene Ebene, so wissen wir nach de bereits Gefundenen, dass dieser Fluchtpunkt kein anderer ist, al der Durchgang einer Geraden mit der Tafel, welche Gerade jene Perpendikel parallel ist und die durch das Auge geht. Denke wir uns daher (Taf. III. Fig. 1.) es sei $F_p G_p$ die gegebene Fluch linie der Ebene, worauf ein Perpendikel errichtet werden soll, s wird eine durch das Auge gelegte und mit dieser Ebene parallel Ebene nach dem oben Erklärten durch $F_p G_p$ gehen; es wird d her eine im Auge auf letztere errichtete Senkrechte die Tafel in verlangten Fluchtpunkte P_p treffen. Sind nun OY und OZ di Achsen der y und der z, so liegen diese nach unserer in No. 1 und No. 2. gemachten Annahme in der Tafel, und es wird demnac die rechtwinklichte Projektion A_p des Auges auf die Tafel in di Achse OZ fallen. Fällen wir ferner aus A_p eine Senkrechte A_pF auf die gegebene Fluchtlinie F_pG_p, so können wir diese Senk rechte als den Riss einer Ebene betrachten, die durch das Aug geht und senkrecht auf der durch das Auge A und durch F_pG gehenden Ebene ist, in der also die vorerwähnte, durch das Aug A gehende senkrechte Linie enthalten ist. Errichten wir endlic in A_p auf A_pF_p eine Senkrechte AA_p gleich dem Abstande t de Tafel vom Auge, und in A auf AF_p ein Perpendikel AP_p, s wird sein Durchschnitt P_p mit A_pF_p der gesuchte Fluchtpunkt de auf die gegebene Ebene zu errichtenden Senkrechten sein. Fa das so eben construktiv angegebene Verfahren analytisch au

führen, nehmen wir an, es sei $OA_p = v$, $AA_p = t$, $SO = -m_1$, $\angle G_p SO = \varphi$, $\angle A_p QD = \psi$, $\cotg \varphi = n_1$, $OD = y'$, $DG_p = z'$, AE senkrecht auf OY, SL parallel OZ, $A_p J$ und $G_p L$ parallel OY; so ist:

$$z' : y' - m_1 = \operatorname{tg} \varphi : 1,$$

also

$$y' = m_1 + n_1 z' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

die Gleichung der Fluchtlinie $F_p G_p$, worin m_1 und n_1 bekannte Constanten und y', z' die laufenden Coordinaten sind.

Ferner sei

$$y' = M_1 + n_1 z' \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

die Gleichung des Risses der gegebenen Ebene, und

$$y' = m_2 + n_2 z'$$

die Gleichung der Senkrechten $A_p F_p$ auf $F_p G_p$, welche durch den Augenpunkt A_p, dessen Coordinaten $y_1' = 0$, $z_1' = v$ sind, geht, so haben wir zur Bestimmung von m_2 und n_2 die Gleichungen:

$$0 = m_2 + n_2 v,$$
$$n_2 = \cotg \psi;$$

oder, da $\psi = 90^0 + \varphi$, so ist

$$n_2 = -\frac{1}{n_1};$$

folglich ist die Gleichung von $A_p F_p$:

$$y' = \frac{1}{n_1}(v - z'). \quad \ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

Nehmen wir ferner

$$y' = m_3 + n_3 z'$$

als die Gleichung der auf $A_p F_p$ errichteten Senkrechten $A_p A$ an, so haben wir: $A_p J : AJ = 1 : \operatorname{tg} \varphi$, also $AJ = A_p J . \operatorname{tg} \varphi$ oder $AJ = \frac{A_p J}{n_1}$; ferner ist $A_p A^2 = A_p J^2 + AJ^2$ oder

$t^2 = (A_p J)^2 (1 + \frac{1}{n_1^2})$; folglich $A_p J = \frac{n_1 t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$, $AJ = \frac{t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$;

also sind:

$$AE = v + \frac{t}{\sqrt{1 + n_1^2}}, \quad OE = A_p J = \frac{n_1 t}{\sqrt{1 + n_1^2}}$$

Coordinatenwerthe des Punktes A. Es muss daher die Gleichung

$$\frac{n_1 t}{\sqrt{1+n_1^2}} = m_3 + n_3 \left\{ v + \frac{t}{\sqrt{1+n_1^2}} \right\}$$

statt finden. Weil aber AA_p parallel F_pG_p ist, so ist $n_3 = n_1$, mithin $m_3 = -n_1 v$, folglich

$$y' = -n_1 (v - z') \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

die Gleichung von AA_p.

Sind y_1' und z_1' die Coordinaten des Durchschnittspunkts der Linien A_pF_p und F_pG_p, so finden wir für dieselben mittelst den Gleichungen 1) und 3)

$$y_1' = \frac{m_1 + n_1 v}{1+n_1^2}, \quad z_1' = \frac{v - m_1 n_1}{1+n_1^2};$$

mithin finden wir ebenfalls für die Linie AF_p, welche durch den Punkt F_p oder (y_1', z_1') und den Punkt A geht, die Gleichung:

$$y' = \frac{v(m_1+n_1v) + m_1 t\sqrt{1+n_1^2}}{n_1(m_1+n_1v) + t\sqrt{1+n_1^2}} - \frac{m_1 + n_1 v - n_1 t\sqrt{1+n_1^2}}{n_1(m_1+n_1v) + t\sqrt{1+n_1^2}} z' \quad 5)$$

Auf ähnliche Art wie die Gleichung 2) finden wir für AP_p, welche durch A geht und auf AF_p senkrecht steht, die Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} y' = &-\frac{n_1 v(m_1+n_1v) + t^2(1+n_1^2) + tv\sqrt{1+n_1^2}}{m_1+n_1v - n_1 t\sqrt{1+n_1^2}} \\ &+ \frac{n_1(m_1+n_1v) + t\sqrt{1+n_1^2}}{m_1+n_1v - n_1 t\sqrt{1+n_1^2}} z', \end{aligned} \right\} \ldots\ldots 6)$$

Bezeichnen wir endlich die Coordinaten des Durchschnittspunkts P_p von A_pF_p und AP_p mit y_2' und z_2', so finden wir leicht:

$$y_2' = \frac{-t^2}{m_1+n_1v}, \quad z_2' = \frac{v(m_1+n_1v) + n_1 t^2}{m_1+n_1v} \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Da aber die gesuchte Perspektive der Senkrechten auf die gegebene Ebene auch durch den Punkt (f, g) gehen muss, so ist deren Gleichung:

$$y' = -\frac{fv(m_1+n_1v) + t^2(g+n_1f)}{(g-v)(m_1+n_1v) - n_1t^2} + \frac{f(m_1+n_1v) + t^2}{(g-v)(m_1+n_1v) - n_1t^2} z' \ldots 8)$$

7. Nehmen wir jetzt an, in der Ebene der xy befinden sich zwei einander entsprechende Punkte A und A' zweier collinearer Systeme, deren Perspektive wir, wie bisher, mit A_p und A_p' bezeichnen. Die Coordinaten der erstern seien X, Y; P, Q; und jene ihrer Perspektiven y', z'; q', r'; so erhalten wir die Beziehungsgleichungen zwischen den Coordinaten X, Y; y', z' wenn wir in den Gleichungen 1), 2) der No. 1. $Z = 0$ setzen. Diese sind also:

$$X=\frac{tz'}{v-z'},\quad Y=\frac{vy'-uz'}{v-z'}; \quad \ldots \quad 1)$$

$$y'=\frac{tY+uX}{t+X},\quad z'=\frac{vX}{t+X} \quad \ldots \quad 2)$$

Auf gleiche Weise finden die Gleichungen:

$$P=\frac{tr'}{v-r'},\quad Q=\frac{vq'-ur'}{v-r'}, \quad \ldots \quad 3)$$

$$q'=\frac{tQ+uP}{t+P},\quad r'=\frac{Pv}{t+P} \quad \ldots \quad 4)$$

statt. Denken wir uns nun die Tafel sammt dem Augenpunkt um ihre Durchschnittslinie mit der Ebene der Figuren (d. h. um die Achse der y) in die Ebene der xy gedreht, und setzen der Gleichförmigkeit der Bezeichnung wegen x und p' statt z' und r'; so gehen die Gleichungen 1), 2), 3) und 4), wenn wir die erste und dritte mit v, die zweite und vierte mit t im Zähler und Nenner theilen, in folgende über:

$$X=\frac{\frac{t}{v}x'}{-\frac{x'}{v}+1},\quad Y=\frac{y'-\frac{u}{v}x'}{-\frac{x'}{v}+1}; \quad \ldots \quad 5)$$

$$x'=\frac{\frac{v}{t}X}{\frac{X}{t}+1},\quad y'=\frac{Y+\frac{u}{t}X}{\frac{X}{t}+1}; \quad \ldots \quad 6)$$

$$P=\frac{\frac{t}{v}p'}{-\frac{p'}{v}+1},\quad Q=\frac{q'-\frac{u}{v}p'}{-\frac{p'}{v}+1}; \quad \ldots \quad 7)$$

$$p'=\frac{\frac{v}{t}P}{\frac{P}{t}+1},\quad q'=\frac{Q+\frac{u}{t}P}{\frac{P}{t}+1} \quad \ldots \quad 8)$$

Es ist aber bekannt, dass, wenn X', Y'; P', Q' die Coordinaten zweier entsprechender Punkte von zwei zusammengehörigen collinearen Systemen sind, alsdann die collineare Verwandtschaft durch folgende Gleichungen ausgedrückt wird:

$$P'=\frac{m_1X'+n_1Y'+s_1}{m_3X'+n_3Y'+1},\quad Q'=\frac{m_2X'+n_2Y'+s_2}{m_3X'+n_3Y'+1} \quad \ldots \quad 9)$$

aus welchen auch die beiden Gleichungen:

$$X' = \frac{\mu_1 P' + \nu_1 Q' + \lambda_1}{\mu_3 P' + \nu_3 Q' + 1}, \quad Y' = \frac{\mu_2 P' + \nu_2 Q' + \lambda_2}{\mu_3 P' + \nu_3 Q' + 1} \quad \ldots\ldots \; 10)$$

hervorgehen, in welchen der Kürze wegen:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1 &= \frac{n_2 - n_3 s_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, & \nu_1 &= \frac{s_1 n_3 - n_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, & \lambda_1 &= \frac{n_1 s_2 - n_2 s_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}; \\
\mu_2 &= \frac{m_3 s_2 - m_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, & \nu_2 &= \frac{m_1 - m_3 s_1}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, & \lambda_2 &= \frac{m_2 s_1 - m_1 s_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}; \\
\mu_3 &= \frac{m_2 n_3 - m_3 n_2}{m_1 n_2 - m_2 n_1}, & \nu_3 &= \frac{m_3 n_1 - m_1 n_3}{m_1 n_2 - m_2 n_1}
\end{aligned}\right\} \; 11)$$

gesetzt wurde.

Bemerken wir, dass einige der Grössen m_1, n_1, ... auch Null sein können, und vergleichen die Gleichungen 5) und 7) mit den Gleichungen 9); die Gleichungen 6) und 8) mit den Gleichungen 10); so erkennen wir, dass

$$m_1 = \frac{t}{v}, \; n_1 = 0, \; s_1 = 0; \quad m_2 = -\frac{u}{v}, \; n_2 = 1, \; s_2 = 0;$$

$$m_3 = -\frac{1}{v}, \; n_3 = 0;$$

$$\mu_1 = \frac{v}{t}, \; \nu_1 = 0, \; \lambda_1 = 0; \quad \mu_2 = \frac{u}{t}, \; \nu_2 = 1, \; \lambda_2 = 0;$$

$$\mu_3 = \frac{1}{t}, \; \nu_3 = 0.$$

Die gleichen Werthe von μ_1, ν_1 etc. würden wir auch erhalten haben, wenn wir die Werthe von m_1, n_1, etc. in den Gleichungen 11) substituirt hätten. Aus der Vergleichung der Gleichungen 5), 7), 6), 8) mit denen in 9) und 10) geht hervor:

Dass ein System von Punkten A, A', A'', etc. mit seinen Perspektiven A_p, A_p', A_p'', etc. in der Verwandtschaft der Collineation steht.

8. Lassen wir endlich in den Gleichungen 9) und 10) der vorigen Nummer die Accente von P', Q', X', Y' weg, und schreiben, um Verwechslungen zu vermeiden, m' statt m_1, n' statt n_1 etc., so drücken offenbar die Gleichungen

$$P = \frac{m'X + n'Y + s'}{m'''X + n'''Y + 1}, \quad Q = \frac{m''X + n''Y + s''}{m'''X + n'''Y + 1}; \quad 1)$$

$$X = \frac{\mu' P + \nu' Q + \lambda'}{\mu''' P + \nu''' Q + 1}, \quad Y = \frac{\mu'' P + \nu'' Q + \lambda''}{\mu''' P + \nu''' Q + 1} \quad \ldots\ldots \; 2)$$

die collineare Verwandtschaft der Systeme P, Q und X, aus. In den letztern haben natürlich μ', ν' etc. ähnliche Werthe wie μ_1, ν_1 etc. in No. 7. Gleichung 11). Substituiren wir in 1)

und 2) statt P, Q, X und Y die Werthe aus den Gleichungen 5) und 7) der vorigen Nummer, so finden wir:

$$\left.\begin{aligned} p' &= \frac{\dfrac{m't-n'u-s'}{s'+t}x' + \dfrac{n'v}{s'+t}y' + \dfrac{s'}{s'+t}}{\dfrac{(m'''t+m')-u(n'''t+n')-(s'+t)}{v(s'+t)}x' + \dfrac{n'''t+n'}{s'+t}y'+1}, \\ q' &= \frac{\dfrac{t(m'u+n''t)-(n'u+n''t)u-(s'u+s''t)}{v(s'+t)}x' + \dfrac{n''t+n'u}{s'+t}y' + \dfrac{s'u+s''t}{s'+t}}{\dfrac{t(m'''t+m')-(n'''t+n')u-(s'+t)}{v(s'+t)}x' + \dfrac{n'''t+n'}{s'+t}y'+1} \end{aligned}\right\} \quad 3)$$

Aus der Form dieser Gleichungen ist leicht ersichtlich, dass auch die Punkte (p', q') und (x', y') entsprechende Punkte zweier collinearer Systeme sind.

9. Aendern wir jetzt das Coordinatensystem so, dass wir die Achse der x durch den Augenpunkt gehen, ihre Richtung jedoch unverändert lassen, so haben wir in den Gleichungen 5), 6), 7), 8) der No. 7. nur $Y+u$ statt Y, $y'+u$ statt y', $Q+u$ statt Q, $q'+u$ statt q' zu setzen, wodurch wir:

$$X = \frac{\frac{t}{v}x'}{-\frac{x'}{v}+1}, \quad Y = \frac{y'}{-\frac{x'}{v}+1}; \qquad 1)$$

$$x' = \frac{\frac{v}{t}X}{\frac{X}{t}+1}, \quad y' = \frac{Y}{\frac{X}{t}+1}; \qquad 2)$$

$$P = \frac{\frac{t}{v}p'}{-\frac{p'}{v}+1}, \quad Q = \frac{q'}{-\frac{p'}{v}+1}; \qquad 3)$$

$$p' = \frac{\frac{v}{t}P}{\frac{P}{t}+1}, \quad q' = \frac{Q}{\frac{P}{t}+1} \qquad 4)$$

erhalten. Bemerken wir, dass, wenn allgemein P', Q'; X', Y' die Coordinaten zweier entsprechenden Punkte sind, die zwei collinearen und collinear liegenden Systemen angehören, folgende Gleichungsformen diese Art der geometrischen Verwandtschaft ausdrücken:

$$P = \frac{M_1X}{M_2X+N_2Y+1}, \quad Q = \frac{M_1Y}{M_2X+N_2Y+1}; \qquad 5)$$

worin M_1, M_2, N_2 unbestimmte Constanten sind, und dass aus diesen auch

$$X = \frac{\frac{P}{M_1}}{-\frac{M_2}{M_1}P - \frac{N_2}{M_1}Q + 1}, \quad Y = \frac{\frac{Q}{M_1}}{-\frac{M_2}{M_1}P - \frac{N_2}{M_1}Q + 1} \quad \ldots. \quad 6)$$

folgt.

Setzen wir in den Gleichungen 5) die Werthe von P, Q, X und Y aus 1) und 3), so erhalten wir:

$$p' = \frac{M_1 x'}{\frac{M_2 t + M_1 - 1}{v} x' + N_2 y' + 1}, \quad q' = \frac{M_1 y'}{\frac{M_2 t + M_1 - 1}{v} x' + N_2 y' + 1} \quad 7)$$

10. Betrachten wir die Resultate, die wir in den Nummern 7., 8. und 9. gefunden haben, so erhalten wir folgende Ergebnisse:

a) Es folgt aus den Gleichungen 5), 6), 7) und 8) der No. 7., dass die Punkte (X, Y) und (x', y'), so wie (P, Q) und (p', q') Punkte zweier collinearen Systeme sind.

b) Es folgt aus den Gleichungen 3) der No. 8., dass auch die Perspektiven (x', y'), (p', q') der Punkte (X, Y), (P, Q) zu einander in Verwandtschaft der Collineation stehen.

c) Aus den Gleichungen 1), 2), 3) und 4) der No. 9. geht hervor, dass die Punkte (X, Y), (x', y'), wie auch die Punkte (P, Q), (p', q') zwei collinearen und collinear liegenden Systemen angehören, wenn die Systeme P, Q und X, Y collinear und collinear liegend sind. Dasselbe gilt auch wegen der Gleichungen 7) derselben Nummer für die Punkte (p', q'), (x', y').

d) Denken wir uns die Ebene der gegebenen Punktensysteme sammt diesen um die Basis in die Tafel umgelegt, so wird dadurch die Collineationsverwandtschaft der bezüglichen Systeme nicht gestört. Weil sich die entsprechenden Linien der Systeme P, Q; p', q' auf ihrer Collineations-Achse schneiden, der Riss (die Durchschnittslinie der gegebenen Ebene, worin das Punktensystem P, Q liegt, mit der Tafel) aber diejenige Linie ist, welche vor der Umdrehung jener Ebene in die Tafel den Ebenen beider Systeme gemeinschaftlich war, so müssen sich auf derselben alle entsprechenden Linien schneiden, woraus hervorgeht, dass der Riss der gegebenen Ebene zugleich die Collineationsachse der Systeme P, Q; p', q' ist. Aus den gleichen Gründen folgt, dass derselbe Riss auch die Collineationsachse der Systeme X, Y; x', y' ist.

e) Da sich bei zwei collinearen Systemen überhaupt diejenigen Linien des einen Systems, welche parallelen Linien des andern entsprechen, auf der Gegenachse des erstern schneiden, so werden wir leicht einsehen, dass die Fluchtlinie (diejenige Linie, auf welcher die Zusammenlaufungs- oder Fluchtpunkte aller Systeme

von Parallelen, die sich in einer Ebene befinden, liegen) der Ebene, in welcher die collinearen Figuren liegen, nichts anderes ist, als die gemeinsame Gegenachse der Systeme X, Y; x'; y' und P, Q; p', q'.

f) Sind die Systeme P, Q und X, Y collinear und collinear liegend, so gilt dasselbe von der Collineations- und Gegenachse der entsprechenden Systeme wie in *e*).

g) Aus der Beziehung, die der Augenpunkt zu einem Punkte im Raume und zu dessen Perspektive hat, so wie auch aus dem bekannten Satze über collinear liegende Systeme: „dass die Linien, welche zwei entsprechende Ecken zweier collinear liegenden Figuren verbinden, sich im Collineationspunkte schneiden", folgt, dass, wenn die Ebene der collinear liegenden Figuren um ihren Riss in die Tafel gedreht ist, der Augenpunkt zum Collineationspunkt der beiden Systeme X, Y; x', y'; sowie der Systeme P, Q; p', q' wird.

h) Endlich werden auch die Collineationspunkte der Systeme X, Y; P, Q und X, Y; x', y'; oder der Augenpunkt und jener der Systeme x', y'; p', q' auf einer einzigen Geraden liegen, etc.

11. Wir haben in No. 4. Gleichung 5) gefunden, dass

$$\left.\begin{array}{l} y'(\nu_1 v - t + \mu_1) + z'(\nu_2 t - \nu_1 u + \nu_1\mu_2 - \nu_2\mu_1) \\ \quad + v(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \mu_2 t - \mu_1 u \end{array}\right\} = 0 \;\ldots\ldots\; 1)$$

die Gleichung der Perspektive einer Geraden ist, deren Gleichungen:

$$x = \mu_1 + \nu_1 z, \quad y = \mu_2 + \nu_2 z$$

sind. Wir können der Gleichung 1) auch die Form:

$$\left.\begin{array}{l} v(\nu_1 y' + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) - u(\nu_1 z' + \mu_1) + t(\nu_2 z' - y') \\ \quad + \mu_1 y' + (\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2) z' = 0 \end{array}\right\} \;\ldots\ldots\; 2)$$

geben. Setzen wir in diesen Gleichungen $t=0$, d. h. nehmen wir statt des Auges den Augenpunkt, so erhalten wir

$$y'(\nu_1 v + \mu_1) + z'(-\nu_1 u + \mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2) + v(\mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) - \mu_1 u = 0. \;\ldots 3)$$

$$-u(\nu_1 z' + \mu_1) + v(\nu_1 y' + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1) + \mu_1 y' + (\mu_2\nu_1 - \mu_1\nu_2) = 0. \;\ldots 4)$$

Betrachten wir in der Gleichung 3) die Grössen u und v als constant, d. h. denken wir uns den Augenpunkt fest, so erkennen wir sogleich, dass die Gleichung 3) die Polare des Augenpunkts ausdrückt. Es ist daher die Perspektive einer Geraden die Polare des festen Augenpunktes. Betrachten wir aber in der Gleichung 4) die Grössen y', z' als constant, so drückt diese Gleichung die Polare des Punktes (y', z') aus, oder auch:

Denken wir uns die Perspektive irgend eines Punktes im Raume als fest, und den Augenpunkt auf der durch die Gleichung

4) ausgedrückten Geraden beweglich, so ist diese Gerade die Polare der Perspektive jenes Punktes im Raume.

Mittelst der Gleichung 3) können wir auch die Aufgabe lösen: „Es sind die Gleichungen einer Geraden

$$\left.\begin{array}{l} x=\mu_1+\nu_1 z \\ y=\mu_2+\nu_2 z \end{array}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \; 5)$$

gegeben, und die Gleichung

$$y=M+Nz \quad \ldots \ldots \ldots \; 6)$$

ihrer Perspektive zu finden.“

Nehmen wir, wie bisher, u und v als die Coordinaten des gesuchten Augenpunkts, so wird uns zu deren Bestimmung die Identificirung der Gleichungen 6) und 3) führen. Dadurch erhalten wir:

$$M=\frac{u\mu_1+v(\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2)}{\nu_1 v+\mu_1},$$

$$N=\frac{\nu_1 u+\mu_1\nu_2-\mu_2\nu_1}{\nu_1 v+\mu_1}.$$

Aus diesen finden wir:

$$v=-\frac{\mu_1}{\nu_1},\quad u=\frac{\mu_2\nu_1-\mu_1\nu_2}{\nu_1}.$$

12. Wenden wir die gefundenen Beziehungsgleichungen zwischen den räumlichen und ihren perspektivischen Coordinaten auf Curven und Flächen zweiten Grades an, und zwar sei zuerst:

$$a^2(Y-g)^2+b^2(f-X)^2-a^2b^2=0 \quad \ldots \ldots \; 1)$$

die Gleichung einer Ellipse, deren Achsen $2a$ und $2b$, und deren Mittelpunkts-Coordinaten g und $-f$ sind.

Bezeichnen wir wie früher die Perspektive des Punktes (X, Y) mit (y', z'), so finden wir leicht nach Gleichung 1) und 2) der No. 4.:

$$Y-g=\frac{vy'+(g-u)z'-gv}{v-z'},\quad f-X=\frac{fv-(f+t)z'}{v-z'}.$$

Substituiren wir diese Werthe von $Y-g$ und $f-X$ in der Gleichung 1), so erhalten wir als Gleichung der Perspektive der Ellipse 1) folgende:

$$\left.\begin{array}{l} \{a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2b^2\}z'^2+a^2v^2y'^2+2a^2(g-u)vy'z' \\ -2\{a^2g(g-u)+b^2f(f+t)-a^2b^2\}vz'-2a^2v^2gy' \\ +\{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2\}v^2 \end{array}\right\}=0 \ldots 2)$$

Diese Gleichung drückt im Allgemeinen einen Kegelschnitt aus, deren Specialität von den Grössen a, b, f, etc. abhängig ist.

Wir untersuchen nun zuerst, ob der Mittelpunkt der perspektivischen Curve 2) zugleich auch die perspektivische Projektion des Mittelpunkts der gegebenen Ellipse 1) ist, und im Fall dieses nicht statt findet, welches der geometrische Ort des Auges sein muss, damit der Mittelpunkt der perspektivischen Curve zugleich die perspektivische Projektion des Mittelpunkts der Ellipse 1) sei.

Bezeichnen wir mit y_1', z_1' die Coordinaten des Mittelpunkts der perspektivischen Curve 2), so ist bekanntlich:

$$y_1'=\frac{a^2u-(fu+gt)(f+t)}{a^2-(f+t)^2},\quad z_1'=\frac{v\{a^2-f(f+t)\}}{a^2-(f+t)^2}.$$

Sind y_2' und z_2' die Coordinaten der Perspektive des Mittelpunkts $(-f, g)$ der Ellipse 1), so ist nach No. 7. Gleichung 2):

$$y_2'=\frac{tg-uf}{t-f},\quad z_2'=\frac{-fv}{t-f}.$$

Diese Werthe von y_2' und z_2' sind offenbar verschieden von jenen der Coordinaten y_1', z_1'; daraus folgt, dass im Allgemeinen der Mittelpunkt der perspektivischen Curve nicht mit der Projektion des Mittelpunkts der perspektivisch projicirten Curve zusammenfällt. Um die Curve zu bestimmen, auf welcher sich das Auge bewegt, damit der Mittelpunkt der perspektivischen Curve mit jenem der projicirten zusammenfalle, setzen wir die Coordinatenwerthe von y_1' und y_2', so wie die von z_1' und z_2', einander gleich, wodurch wir:

$$\frac{(fu+gt)(f+t)-a^2u}{(f+t)^2-a^2}=\frac{fu-gt}{f-t},$$

$$\frac{v\{f(f+t)-a^2\}}{(f+t)^2-a^2}=\frac{fv}{f-t}$$

erhalten. Aus diesen folgt aber, dass

$$\frac{a^2-2f^2}{2f}=t$$

ist; u und v fallen aus der Gleichung und bleiben also unbestimmt. Diese letzte Gleichung spricht aber aus, dass der fraglichen Bedingung Genüge geleistet wird, wenn sich das Auge in einer Ebene befindet, die mit der Tafel parallel ist und von ihr den Abstand $t=\frac{a^2-2f^2}{2f}$ hat. Jedoch versteht es sich von selbst, dass $a > f\sqrt{2}$ ist.

13. Der in der vorhergehenden Nummer gemachten Untersuchung schliesst sich, der Natur der Sache gemäss, noch folgende an: „Welches ist der Ort des Auges, wenn die durch die Gleichung 2) der vorhergehenden Nummer ausgedrückte Perspektive der Ellipse 1) No. 12. wieder eine Ellipse geben soll, die der

gegebenen Ellipse 1) No. 12. ähnlich ist, jedoch mit ihr nicht ähnlich liegt?“

Bezeichnen wir mit a_1 und b_1 die Halbachsen der Curve 2) Nr. 12., so muss bekanntlich:

$$\frac{a^2}{a_1^2}=\frac{b^2}{b_1^2}=k \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

sein, wo k einen gegebenen constanten Coefficienten bezeichnet. Ferner finden wir leicht:

$$a_1^2=\frac{2a^2b^2v^2t^2}{\left\{\begin{array}{l}\{(f+t)^2-a^2\}\{a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2(b^2-v^2)\\ -\sqrt{\{a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2(b^2-v^2)\}^2-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\end{array}\right\}},$$

$$b_1^2=\frac{2a^2b^2v^2t^2}{\left\{\begin{array}{l}\{(f+t)^2-a^2\}\{a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2(b^2-v^2)\\ +\sqrt{\{a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2(b^2-v^2)\}^2-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\end{array}\right\}}.$$

Setzen wir, der Kürze wegen,

$$a^2(g-u)^2+b^2(f+t)^2-a^2(b^2-v^2)=s^4,$$

so muss nach 1)

$$k=\frac{\{(f+t)^2-a^2\}\{s^4-\sqrt{s^8-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\}}{2b^2v^2t^2},$$

$$k=\frac{\{(f+t)^2-a^2\}\{s^4+\sqrt{s^8-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\}}{2a^2v^2t^2}$$

sein. Aus diesen beiden Gleichungen erhalten wir:

$$1=\frac{a^2\{s^4-\sqrt{s^8-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\}}{b^2\{s^4+\sqrt{s^8-4a^2b^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}}\}}.$$

Ordnen wir diese Gleichung, so ist:

$$s^8-(a^2+b^2)^2v^2\{(f+t)^2-a^2\}=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

oder auch:

$$\{s^4-(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}\}\{s^4+(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}\}=0,$$

daraus folgt aber auch, dass:

$$s^4+(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}=0,$$

$$s^4-(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}=0.$$

Setzen wir statt s^4 seinen obigen Werth, so haben wir:

$$a^2(g-u)^2+b^2\{(f+t)^2-a^2\}+a^2v^2+(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}=0. \quad 3)$$

$$a^2(g-u)^2+b^2\{(f+t)^2-a^2\}+a^2v^2-(a^2+b^2)v\sqrt{(f+t)^2-a^2}=0. \quad 4)$$

Setzen wir in diesen Gleichungen $g-u=u'$, $f+t=t'$, so erhalten wir:

$$a^2u'^2+b^2t'^2+a^2v^2-a^2b^2+(a^2+b^2)v\sqrt{t'^2-a^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad 5)$$

$$a^2u'^2+b^2t'^2+a^2v^2-a^2b^2-(a^2+b^2)v\sqrt{t'^2-a^2}=0 \quad \ldots\ldots \quad 6)$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir:

$$2a^2u'^2+2b^2t'^2+2a^2v^2-2a^2b^2=0$$

oder

$$a^2u'^2+b^2t'^2+a^2v^2-a^2b^2=0. \quad \ldots\ldots \quad 7)$$

Durch Subtraction derselben aber:

$$2(a^2+b^2)v\sqrt{t'^2-a^2}=0$$

oder

$$v\sqrt{t'^2-a^2}=0. \quad \ldots\ldots \quad 8)$$

Untersuchen wir die geometrische Bedeutung der Gleichungen 7) und 8) und zwar die einer jeden insbesondere und die beider in Verbindung.

Die erstere drückt offenbar ein Umdrehungsellipsoid aus, dessen Mittelpunktscoordinaten $-f$ und g sind; die Rotationsachse desselben ist die Achse der x.

Aus der Gleichung 8) folgt:

$$t'-a=0, \; v=0; \; \text{oder} \; t=a-f, \; v=0.$$

Aus beiden Gleichungen 7) und 8) aber zugleich folgt:

$$t=a-f, \; v=0 \; \text{und} \; g=u.$$

Diese Werthe genügen auch den Gleichungen 3) und 4) oder 5) und 6).

14. Bestimmen wir schliesslich noch die Perspektive einer Fläche zweiten Grades. Die Perspektive einer krummen Fläche überhaupt wird bestimmt durch den Durchschnitt eines sie umhüllenden Kegels, dessen Scheitel das Auge ist, mit der Tafel.

Nehmen wir an, $f(x,y,z)=0$ sei die Gleichung einer gegebenen Fläche, und setzen $f(x,y,z)=U=0$, so haben wir bekanntlich zur Bestimmung des Umhüllungskegels die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} U=0, \; \dfrac{dU}{dx}(x-t)+\dfrac{dU}{dy}(y-u)+\dfrac{dU}{dz}(z-v)=0 \\ \dfrac{x-t}{\cos\alpha}=\dfrac{y-u}{\cos\beta}=\dfrac{z-v}{\cos\gamma}, \; \dfrac{x_1-t}{\cos\alpha}=\dfrac{y_1-u}{\cos\beta}=\dfrac{z_1-v}{\cos\gamma}. \end{array}\right\} \ldots 1)$$

In diesen Gleichungen bezeichnen α, β, γ die veränderlichen Winkel, welche eine Erzeugungslinie respektive mit der Achse der x, der y und der z bildet, und x_1, y_1, z_1 sind die Coordinaten eines Punktes der Berührungscurve des umhüllenden Kegels und der gegebenen Fläche.

Eliminiren wir aus diesen Gleichungen die Grössen $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; x_1, y_1, z_1; so gehört die resultirende Gleichung dem Berührungskegel der gegebenen Fläche an. Nehmen wir an, $F(x, y, z) = 0$ sei die Gleichung, welche aus jener Elimination hervorgegangen ist, also die Gleichung des Berührungskegels, so erhalten wir die Gleichung der Perspektive der gegebenen Fläche, wenn wir in der Gleichung $F(x, y, z) = 0$ die Abscisse x gleich Null setzen, wodurch diese in:

$$F(z, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

übergeht. Hierbei versteht es sich von selbst, dass die Ebene der yz als Tafel angenommen wird, und in der Gleichung der gegebenen Fläche und des umhüllenden Kegels x negativ genommen werden muss, weil die Fläche hinter der Tafel, d. h. auf der negativen Seite der x liegt.

15. Den in der vorigen Nummer gemachten Annahmen zu Folge wird die Gleichung einer Fläche zweiten Grades, die sich auf der dem Auge entgegengesetzten Seite der Tafel befindet, folgende sein:

$$\left.\begin{array}{l} Az^2 + By^2 + Cx^2 - 2A'xy - 2B'xz + 2C'yz \\ \qquad + 2A''z + 2B''y - 2C''x + D = 0 \end{array}\right\} \quad 1)$$

und die Gleichung des Kegels, dessen Scheitel im Auge ist, und der die Fläche 1) berührt, hat die Form:

$$K^2 = M.N, \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

wo, der Kürze wegen:

$$\left.\begin{array}{l} K = (Av + C'u + B't + A'')z + (C'v + Bu + A't + B'')y \\ \qquad + (B'v + A'u + Ct + C'')x + A''v + B''u + C''t + D, \\ M = Av^2 + Bu^2 + Ct^2 + 2A'tu + 2B'tv + 2C'uv \\ \qquad + 2A''v + 2B''u + 2C''t + D, \\ N = Az^2 + By^2 + Cx^2 - 2A'xy - 2B'xz + 2C'yz \\ \qquad + 2A''z + 2B''y - 2C''x + D \end{array}\right\} \quad 3)$$

gesetzt wurde.

Setzen wir in der Gleichung 2) $x = 0$ und für K, M, N die aus den Gleichungen 3) für diese Annahme entspringenden Werthe, so erhalten wir für die Gleichung der Perspektive der Fläche folgende:

$$\left.\begin{array}{r}\{(Av+C'u+B't+A''')z'+(C'v+Bu+A't+B'')y'+A''v+B''u+C''t+D\}^2\\ =\{Av^2+Bu^2+Ct^2+2A'tu+2B'tv+2C'uv+2A''v+2B''u+2C''t+D\}\\ \times\{Az'^2+By'^2+2C'y'z'+2A''z'+2B''y'+D\}.\end{array}\right\} \quad 4)$$

In dieser Gleichung wurde wieder, wie früher, y', und z' statt y und z gesetzt. Aus der Form dieser Gleichung sehen wir: dass die Perspektive einer Fläche zweiten Grades eine Curve desselben Grades ist.

16. Machen wir von dem in den vorhergehenden Nummern Entwickelten einige specielle Anwendungen, und suchen die Gleichung der Perspektive eines dreiachsigen Ellipsoids, dessen Mittelpunkts-Coordinaten $-f$, g, Null, und dessen Achsen $2a$, $2b$, $2c$ sind. Die grosse Achse $2a$ ist parallel mit der Achse der x angenommen.

Die Gleichung dieses Ellipsoids ist:

$$\left\{\frac{f-x}{a}\right\}^2+\left\{\frac{y-g}{b}\right\}^2+\left\{\frac{z}{c}\right\}^2=1$$

oder auch:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\frac{2gy}{b^2}-\frac{2fx}{a^2}+\frac{f^2}{a^2}+\frac{g^2}{b^2}-1=0. \quad \ldots \quad 1)$$

Wir erhalten daher, wie in der vorigen Nummer, für die Gleichung der Perspektive dieses Ellipsoids folgende:

$$\left.\begin{array}{r}\{a^2(u-g)^2+b^2(f+t)^2-a^2b^2\}z'^2-2a^2v(u-g)y'z'\\ +\{a^2v^2+c^2(f+t)^2-a^2c^2\}y'^2\\ -2vz'\{a^2g(u-g)+b^2f(f+t)-a^2b^2\}\\ -2\{u[c^2f(f+t)-a^2c^2]+g[c^2t(f+t)+a^2v^2]\}y'\\ +v^2(a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2)+c^2f^2u^2+c^2t^2(g^2-b^2)-2c^2fgut=0.\end{array}\right\} \quad 2)$$

Wir wollen nun untersuchen, ob wir dem Auge eine oder mehrere Lagen geben können, damit die Perspektive 2) des Ellipsoids 1) ein Kreis wird. Wir werden aus der Betrachtung der letzten Gleichung leicht erkennen, dass diese nur alsdann einen Kreis ausdrücken kann, wenn folgende zwei Bedingungsgleichungen erfüllt werden:

$$u-g=0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3)$$

$$a^2(u-g)^2+b^2(f+t)^2-a^2b^2=a^2v^2+c^2(f+t)^2-a^2c^2. \quad \ldots \quad 4)$$

Reduciren wir die letzte dieser Gleichungen auf Null und benutzen dabei die Gleichung 3), so erhalten wir:

$$a^2v^2+(c^2-b^2)t^2+2f(c^2-b^2)t-(c^2-b^2)(a^2-f^2)=0. \quad \ldots \quad 5)$$

Aus dieser und der Gleichung 3) erkennen wir, dass die Perspektive 2) des Ellipsoids 1) in einen Kreis degenerirt, wenn sich

das Auge auf einer Ellipse oder Hyperbel befindet, deren Ebene durch die grosse Achse $2a$ des gegebenen Ellipsoids geht und die dabei senkrecht auf der Tafel steht.

Eine Ellipse ist die Ortscurve 5), wenn $c > b$ und $a > f$ ist. Eine Hyperbel hingegen α) wenn $c < b$ und $a < f$; β) wenn $c < b$ und $a > f$ ist. Ist die Curve 5) eine Ellipse, so sind deren Achsen

$$\frac{2\sqrt{(c^2-b^2)(a^2-f^2)}}{a} \text{ und } 2\sqrt{a^2-f^2}.$$

Ist die Curve hingegen eine Hyperbel, so ist im Fall α) die reelle Achse $= 2\sqrt{a^2-f^2}$, und die imaginäre $= \frac{2\sqrt{-(b^2-c^2)(a^2-f^2)}}{a}$; und im Fall β) ist die reelle Achse $= \frac{2\sqrt{(b^2-c^2)(f^2-a^2)}}{a}$, und die imaginäre $= 2\sqrt{-(f^2-a^2)}$.

Die Gleichung des Kreises, welchen die Perspektive des Ellipsoids 1) darstellt, erhalten wir, wenn wir in der Gleichung 2) $u-g=0$ setzen. Alsdann wird sie zu:

$$\left.\begin{aligned} & z'^2+y'^2-2v\frac{f(f+t)-a^2}{(f+t)^2-a^2}z'-2gy'\frac{c^2\{(f+t)^2-a^2\}+a^2v^2}{b^2\{(f+t)^2-a^2\}} \\ & +\frac{v^2\{a^2g^2+b^2f^2-a^2b^2\}+c^2\{g^2(f-t)^2-b^2t^2\}}{b^2\{(f+t)^2-a^2\}}=0. \end{aligned}\right\} 6)$$

Die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises sind aber:

$$q=\frac{g\{c^2\{(f+t)^2-a^2\}+a^2v^2\}}{b^2\{(f+t)^2-a^2\}},\quad r=v\frac{f(f+t)-a^2}{(f+t)^2-a^2}.$$

Betrachten wir q und r als veränderlich und eliminiren v und t aus diesen Gleichungen, so drückt die resultirende Gleichung den Ort der Mittelpunkte aller Kreise aus, welche durch die Gleichung 6) dargestellt sind, d. h. der Kreise, welche die Perspektiven des Ellipsoids 1) darstellen, wenn sich das Auge auf der Ortscurve 5) bewegt. Weil aber aus 3) und 4)

$$c^2\{(f+t)^2-a^2\}+a^2v^2=b^2\{(f+t)^2-a^2\},$$

so wird $q=g$ und r bleibt unbestimmt. Daraus folgt, dass der Ort der Mittelpunkte aller perspektivischen Kreise, welche bei der Bewegung des Auges auf der Curve 5) erzeugt werden, eine Gerade ist, deren Fusspunkt im Durchschnitte der Achse $2b$ des gegebenen Ellipsoids 1) mit der Basis liegt und die auf letzterer senkrecht steht.

XIV.

Beitrag zur analytischen Geometrie.

Von dem

Herrn Professor Doctor H. Bruun

zu Odessa.

---

§. 1. In allen Lehrbüchern der analytischen Geometrie vermisse ich einen Lehrsatz, der mir, in Beziehung auf die Bestimmung der Linien zweiter Ordnung durch gegebene Punkte, von Wichtigkeit zu sein scheint. — Nur ein besonderer Fall desselben, der Gleichung dieser Linien bezogen auf ihre conjugirten Durchmesser entsprechend, wird gewöhnlich und auch dieser unvollständig abgehandelt.

Der allgemeine Lehrsatz ist folgender:

Ein Punkt (x', y') liegt ausserhalb oder innerhalb der Linie zweiter Ordnung

$$y^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0 \qquad (1)$$

1) wenn sie eine Ellipse oder Parabel vorstellt, je nachdem:

$$y'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \gtrless 0 \text{ ist;}$$

2) wenn sie eine Hyperbel vorstellt und

a) wenn derjenige Durchmesser, welcher dem der Ordinatenachse parallelen Durchmesser conjugirt ist, die Hyperbel schneidet, je nachdem:

$$y'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \gtrless 0 \text{ ist;}$$

b) wenn dagegen dieser Durchmesser die Hyperbel nicht schneidet, je nachdem:

$$y'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \lessgtr 0 \text{ ist.}$$

Beweis. Es sei

$$y = ax + b \qquad (2)$$

die Gleichung einer beliebigen Geraden, so ist diese eine Tangente der Linie (1), wenn folgende Bedingungsgleichung Statt findet:

$$(B^2-C)b^2+2(E-BD)ab+(D^2-F)a^2$$
$$+2(BE-CD)b+2(DE-BF)a+E^2-CF=0,$$

oder wenn:

$$\alpha b^2+2\beta ab+\gamma a^2+2\delta b+2\varepsilon a+\varphi=0 \qquad (3)$$

ist, nachdem man der Kürze halber

$$B^2-C=\alpha,\ E-BD=\beta,\ D^2-F=\gamma,\ BE-CD=\delta,$$
$$DE-BF=\varepsilon,\ E^2-CF=\varphi \qquad (4)$$

gesetzt hat.

Woraus umgekehrt durch leichte Umformungen sich folgende Gleichungen ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} -B=\dfrac{\alpha\varepsilon-\beta\delta}{\beta^2-\alpha\gamma},\ C=\dfrac{\delta^2-\alpha\varphi}{\beta^2-\alpha\gamma},\ D=\dfrac{\beta\varepsilon-\gamma\delta}{\beta^2-\alpha\gamma}, \\ -E=\dfrac{\delta\varepsilon-\beta\varphi}{\beta^2-\alpha\gamma},\ F=\dfrac{\varepsilon^2-\gamma\varphi}{\beta^2-\alpha\gamma} \end{array}\right\} (5)$$

Geht nun die Gerade (2) durch den Punkt (x', y'), so ist $b=-ax'+y'$ und es verwandelt sich (3) in

$$a^2(\alpha x'^2-2\beta x'+\gamma)-2a(\alpha x'y'-\beta y'+\delta x'-\varepsilon)$$
$$+\alpha y'^2+2\delta y'+\varphi=0.$$

Wir erhalten somit reelle oder imaginäre Werthe für a; durch (x', y') sind Tangenten möglich oder nicht; (x', y') liegt ausserhalb oder innerhalb der Linie zweiter Ordnung; je nachdem:

$$(\alpha x'y'-\beta y'+\delta x'-\varepsilon)^2-(\alpha y'^2+2\delta y'+\varphi)$$
$$\times(\alpha x'^2-2\beta x'+\gamma)\gtrless 0 \text{ ist;}$$

oder entwickelt, je nachdem:

$$(\beta^2-\alpha\gamma)y'^2-2(\alpha\varepsilon-\beta\delta)x'y'+(\delta^2-\alpha\varphi)x'^2$$
$$+2(\beta\varepsilon-\gamma\delta)y'-2(\delta\varepsilon-\beta\varphi)x'+\varepsilon^2-\gamma\varphi\gtrless 0 \text{ ist;}$$

endlich, wegen der Gleichungen (5), je nachdem:

$$(\beta^2-\alpha\gamma)(y'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F)\gtrless 0 \text{ ist.}$$

1. Für die Ellipse und Parabel ist aber $\beta^2-\alpha\gamma$ immer >0; somit (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem:

$$y'^2+2Bx'y'+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F\gtrless 0 \text{ ist.}$$

2. Für die Hyperbel ist $\beta^2 - \alpha\gamma > 0$, wenn die Hyperbel die Gerade $y + Bx + D = 0$ schneidet; und dann liegt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem:

$$y'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Schneidet aber die Hyperbel die Gerade $y + Bx + D = 0$ nicht; so ist $\beta^2 - \alpha\gamma < 0$, und dann findet der umgekehrte Fall Statt.

---

§. 2. Zweiter Beweis. Die Linie §. 1. (I), $\varphi(x, y) = 0$, theilt die Ebene in zwei Theile, so dass für alle Punkte des einen Theils $\varphi(x, y) < 0$, für alle Punkte des andern $\varphi(x, y) > 0$ ist.

Mit Hülfe dieses leicht zu erweisenden Satzes erhalten wir folgenden einfachen Beweis.

Es sei $y = ax$ die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gehenden geraden Linie, so ist diese eine Tangente, wenn

$$\gamma a^2 + 2\varepsilon a + \varphi = 0 \text{ ist.}$$

Wir erhalten somit reelle oder imaginäre Werthe für a, d. h. der Anfangspunkt liegt ausserhalb oder innerhalb der Linie zweiter Ordnung, je nachdem

$$\varepsilon^2 - \varphi\gamma \gtrless 0$$

ist, d. h. je nachdem

$$F(\beta^2 - \alpha\gamma) \gtrless 0$$

ist, somit auch jeder andere Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)(y'^2 + 2Bx'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F) \gtrless 0 \text{ ist.}$$

---

§. 3. Es ergeben sich nun auch die folgenden besonderen Fälle:

1. Es sei $a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$ die Gleichung einer Ellipse, bezogen auf conjugirte Durchmesser, oder $a^2y^2 \pm 2ab^2x + b^2x^2 = 0$ die Gleichung derselben, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente im Scheitel, so liegt ein Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem im ersten Falle

$$a^2y'^2 + b^2x'^2 - a^2b^2 \gtrless 0 \text{ ist;}$$

im zweiten Falle:

$$a^2y'^2 \pm 2ab^2x' + b^2x'^2 \gtrless 0 \text{ ist.}$$

2. Es sei $y^2+2px=0$ die Gleichung einer Parabel, so liegt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem

$$y'^2+2px' \gtrless 0 \text{ ist.}$$

3. Es sei $a^2y^2-b^2x^2+a^2b^2=0$ die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf ihre conjugirten Durchmesser, oder $a^2y^2+2ab^2x-b^2x^2=0$ die Gleichung derselben, bezogen auf einen Durchmesser und die Tangente im Scheitel (wo in beiden Fällen der zur Abscissenachse genommene Durchmesser die Curve schneidet), so liegt ein Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem im ersten Falle:

$$a^2y'^2-b^2x'^2+a^2b^2 \gtrless 0 \text{ ist,}$$

im zweiten Falle:

$$a^2y'^2+2ab^2x'-b^2x'^2 \gtrless 0 \text{ ist.}$$

4. Es sei $b^2y^2-a^2x^2-a^2b^2=0$ die Gleichung einer Hyperbel bezogen auf conjugirte Durchmesser; oder $b^2y^2-a^2x^2-2a^2bx-2a^2b^2=0$ die Gleichung derselben bezogen auf einen Durchmesser und auf eine durch den Scheitel dieses Durchmessers dem conjugirten Durchmesser parallel laufende Gerade (wo in beiden Fällen der zur Abscissenachse genommene Durchmesser die Curve nicht schneidet), so liegt ein Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem im ersten Falle

$$b^2y'^2-a^2x'^2-a^2b^2 \lessgtr 0 \text{ ist,}$$

im zweiten Falle

$$b^2y'^2-a^2x'^2-2a^2bx'-2a^2b^2 \lessgtr 0 \text{ ist.}$$

Anmerkung. Alle diese besondern Fälle lassen sich einzeln, selbst ohne Anwendung der Tangentengleichung beweisen, und dann erhalten wir leicht durch Verwandlung der Coordinaten einen dritten indirecten Beweis des allgemeinen Lehrsatzes.

§. 4. Wenn in der allgemeinen Gleichung die Coëfficienten von y^2 und $x^2=0$ sind, d. h. wenn sie eine Hyperbel vorstellt, deren Asymptoten den Coordinatenachsen parallel sind, und also auf die Form

$$xy+Dy+Ex+F=0$$

gebracht werden kann, so ist es nöthig, die Untersuchung von neuem anzustellen. Es ergiebt sich dann leicht, dass ein Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb liegt, je nachdem

$$(F-ED)(x'y'+Dy'+Ex'+F) \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Ist also:

$$xy+F=0$$

die Gleichung einer Hyperbel, bezogen auf ihre Asymptoten, so liegt ein Punkt (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem

$$F(x'y'+F) \gtrless 0 \text{ ist.}$$

Liegt die Hyperbel im ersten und dritten der von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel, so ist F eine negative Grösse, somit (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem

$$x'y'+F \lessgtr 0 \text{ ist.}$$

Liegt die Hyperbel im zweiten und vierten der von den Asymptoten gebildeten Scheitelwinkel, so ist F eine positive Grösse und (x', y') ausserhalb oder innerhalb, je nachdem

$$x'y'+F \gtrless 0 \text{ ist.}$$

---

§. 5. Anwendung des Lehrsatzes §. 1. auf eine besondere Aufgabe.

Aufgabe. In einer Ebene sind fünf Punkte gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen. — Die Art der Linie zweiter Ordnung zu bestimmen, welche durch die fünf Punkte beschrieben werden kann.

Wir können bekannter Maassen

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$$

als die Gleichung aller Linien zweiter Ordnung, welche durch vier gegebene Punkte gehen, betrachten, wenn wir C, D, E, F constant, B allein veränderlich annehmen.

Wir erhalten somit für diejenige Linie zweiter Ordnung, welche noch durch den fünften Punkt (x', y') geht, zur Bestimmung von B die Gleichung:

$$B=-\frac{y'^2+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F}{2x'y'}.$$

Es ist also auch:

$$\alpha=B^2-C=\frac{(y'^2+Cx'^2+2Dy'+2Ex'+F)^2-4x'^2y'^2C}{4x'^2y'^2}.$$

Die verlangte Curve ist somit eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem der Zähler dieses Ausdrucks $<$ oder $>$ oder $=0$ ist.

Wir erhalten insbesondere als Gleichungen der beiden durch die vier ersten Punkte gehenden Parabeln:

der 1. $y^2 + 2\sqrt{C}xy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0,$

„ 2. $y^2 - 2\sqrt{C}xy + Cx^2 + 2Dy + 2Ex + F = 0.$

Der Punkt (x', y') liegt somit ausserhalb, innerhalb oder auf der ersten Parabel, je nachdem

$$y'^2 + 2\sqrt{C}x'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \gtreqless 0 \text{ ist};$$

ausserhalb, innerhalb oder auf der zweiten Parabel, je nachdem

$$y'^2 - 2\sqrt{C}x'y' + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F \gtreqless 0 \text{ ist}.$$

Es liegt also endlich (x', y')

1) ausserhalb beider Parabeln oder innerhalb beider, wenn:

$$(y'^2 + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F)^2 - 4x'^2y'^2C > 0$$

und dann $\alpha > 0$;

2) (x', y') ausserhalb der einen, innerhalb der andern Parabel, wenn

$$(y'^2 + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F)^2 - 4x'^2y'^2C < 0$$

und dann $\alpha < 0$;

3) (x', y') auf einer der Parabeln, wenn

$$(y'^2 + Cx'^2 + 2Dy' + 2Ex' + F)^2 - 4x'^2y'^2C = 0$$

und dann $\alpha = 0$.

Somit erhalten wir folgende Auflösung.

Unter den fünf Punkten lassen sich immer vier auswählen, von denen jeder ausserhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks liegt. — Es sei dieses geschehen und man beschreibe durch solche vier Punkte zwei Parabeln, was immer möglich ist (siehe den folgenden Paragraphen).

Liegt nun der fünfte Punkt in einer dieser Parabeln selbst, so ist diese Parabel die Linie zweiter Ordnung, welche sich durch alle fünf Punkte beschreiben lässt. Liegt der Punkt innerhalb beider Parabeln oder ausserhalb beider, so ist die Linie zweiter Ordnung eine Hyperbel. Ist er dagegen innerhalb der einen und ausserhalb der andern befindlich, so liegt er mit den vier übrigen in einer Ellipse.

§. 6. Das I. Capitel des III. Abschnitts im Barycentrischen Calcül von Moebius (Bestimmung eines Kegelschnitts durch gegebene Punkte) enthält ausser dieser Aufgabe noch einen Lehrsatz. Der Vollständigkeit halber gebe ich hier auch einen rein analytischen Beweis desselben, obgleich er vom Lehrsatze §. 1. unabhängig ist.

Lehrsatz. Haben vier Punkte in einer Ebene eine solche Lage gegen einander, dass jeder derselben ausserhalb des Dreiecks, welches die drei andern bilden, befindlich ist, so lassen sich durch sie sowohl Ellipsen als Hyperbeln und zwei verschiedene Parabeln beschreiben.

Liegt aber einer der vier Punkte innerhalb des von den drei andern gebildeten Dreiecks, so können durch sie weder Ellipsen noch Parabeln, sondern bloss Hyperbeln geführt werden.

Beweis. Es sei

$$y^2+2Bxy+Cx^2+2Dy+2Ex+F=0$$

die allgemeine Gleichung einer Linie zweiter Ordnung. Die Coordinaten des Punktes $O=0, 0$; des Punktes $M=a, 0$; des Punktes $N=0, b$. OM die Axe der x, und zwar der positive Theil derselben, ebenso ON der positive Theil der Achse der y; so erhält man (wegen folgender Bedingungsgleichungen $F=0$, $E=-\frac{Ca}{2}$, $D=-\frac{b}{2}$) als Gleichung einer durch die drei Punkte O, M, N beschriebenen Linie zweiter Ordnung:

$$y^2+2Bxy+Cx^2-by-Cax=0.$$

Soll nun die Linie zweiter Ordnung noch durch den Punkt $P(x',y')$ gehen, so erhalten wir folgende Bedingungsgleichung:

$$y'^2+2Bx'y'+Cx'^2-by'-Cax'=0$$

oder

$$B^2+\frac{2By'}{x'-a}+\frac{y'^2-by'}{x'(x'-a)}-\alpha=0,$$

wenn wir $B^2-C=\alpha$ setzen. Endlich

$$B=-\frac{y'}{x'-a}\pm\sqrt{\frac{y'}{x'}\frac{(x'b+y'a-ab)}{(x'-a)^2}+\alpha}.$$

Daher reelle Werthe für B, wenn $M+\alpha>0$, wenn wir der Kürze halber

$$\frac{y'}{x'}\frac{(x'b+y'a-ab)}{(x'-a)^2}=M$$

setzen.

Liegt der Punkt P im Winkel NOP oder in seinem Scheitelwinkel, so ist $\frac{y'}{x'}>0$; liegt er ausserhalb dieser Winkel, so ist $\frac{y'}{x'}<0$.

Liegt der Punkt P links von NM (deren Gleichung $ay+bx-ba=0$ ist), so ist

$$ay' + bx' - ba < 0;$$

liegt er rechts, so ist

$$ay' + bx' - ba > 0.$$

Bezeichnen wir nun (wie in Taf. III. Fig. 2.) die sieben Theile der Ebene, in welche sie durch OM, ON, NM und ihre Verlängerungen getheilt wird, durch I., II.,.... VII., so ergiebt sich,

1) wenn P in I. oder II. liegt, $\frac{y'}{x'} > 0$ und $ay' + bx' - ba < 0$ ist, also $M < 0$ ist,

2) wenn P in III. oder IV. liegt, $\frac{y'}{x'} < 0$ und $ay' + bx' - ba > 0$ ist, also $M < 0$ ist

3) wenn P in V. oder VI. liegt, $\frac{y'}{x'} < 0$ $ay' + bx' - ba < 0$ ist, also $M > 0$ ist

4) wenn P in VII. liegt, $\frac{y'}{x'} > 0$ $ay' + bx' - ba > 0$ ist, also $M > 0$ ist.

Liegt also P in I., II., III., IV., so erhält man nur reelle Werthe für B, wenn $\alpha > 0$ ($> -M$ ist), d. h. durch die vier Punkte lassen sich nur Hyperbeln legen.

Liegt P in V., VI., VII., so giebt es Werthe von $\alpha < 0$, $= 0$, > 0, für die B reell ist, d. h. durch die vier Punkte lassen sich sowohl Ellipsen, als Parabeln und Hyperbeln legen.

Ist $\alpha = 0$, so erhält B zwei bestimmte Werthe $\pm\sqrt{M}$.

XV.

Beschreibung einiger zu experimentalen Darstellungen bei öffentlichen Vorträgen bestimmter Apparate. Von J. G. Crahay, Mitglied der Akademie der Wissenschaften etc. zu Brüssel.

Uebersetzt aus den
„Bulletins de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux arts de Belgique. Tome XIV. 1re Partie. Bruxelles. 1847."

von

Herrn W. Kuhse,
Candidaten des höheren Schulamts zu Greifswald.

Ich glaube den Schulen einen Dienst zu leisten, wenn ich diejenigen Apparate zur öffentlichen Kenntniss bringe, welche ich für das Kabinet der katholischen Universität habe anfertigen lassen und die sich mir bei wiederholtem Gebrauche als nützlich bewiesen haben.

Der erste hat den Zweck, die Richtigkeit der in der Theorie des Hebels aufgestellten Hauptpunkte zu bestätigen, als da sind: die Bedingungen des Gleichgewichts für die drei Arten der Hebel; das Verhältniss zwischen den Intensitäten der Kräfte und der Länge der Hebelsarme für jede Art; das Willkürliche in der Form der Arme, indem das Gleichgewicht nur von deren in der geradlinigen Entfernung des Unterstützungspunktes des Hebels von dem Angriffspunkte der Kraft gemessenen Länge abhängig ist; endlich der Einfluss auf das statische Moment der Kraft, welchen die Richtung derselben in Rücksicht auf den Hebelsarm ausübt.

Der Apparat ist im Aufriss und im Grundriss in den Figuren Taf. III. Fig. 3. und Fig. 4. nach dem Maassstabe von $\frac{1}{8}$ der wirklichen Grösse dargestellt. Der Hebel AB, von Stahl, hat 80 Centimeter

Länge bei einer Breite von 3 und einer Dicke von 1 Centi
Seine Unterstützung, in der Mitte der Länge in C angel
besteht in einer horizontalen mit dem Hebel verbundener
welche sich an ihren Enden durch Kegel von gehärtetem
verlängert; die Spitzen dieser Kegel passen in konische
fungen, welche an den Enden von zwei eine angemessene A
rung zulassenden Schrauben ausgebohrt sind. Der Hebel l
sich neben einer oben auf der Säule E in einem Würfel ge
ten rechtwinkligen Höhlung vorbei; in die beiden massiven
dieses Würfels sind die Schraubenmuttern für die die Axe t
den Schrauben geschnitten; die eine der Schrauben ist mit
Knopfe versehen, der sich auf der vorderen Seite des App
zeigt.

Der Arm CB des Hebels ist gerade; die Seitenfläche
oben und unten parallel unter sich abgedacht; die Richtu
oberen Abdachung geht durch den Mittelpunkt der Axe C.
ser Arm ist in 10 auf der Vorderseite bezeichnete gleiche
getheilt; einem jeden Theilungspunkte entspricht ein k
Einschnitt auf der Kante der beiden Abdachungen; sie dien
Aufhängungspunkte der die Stelle der Kräfte vertretenden Gew

Der Hebelsarm AC ist zusammengekrümmt; sein Schn
rechtwinklig, aber seine Länge, von dem Unterstützungspu
bis zu einem in A befindlichen Stifte, ist genau dieselbe, w
des Armes CB; dieser Stift, von cylindrischer Form, geht
zontal und senkrecht durch den Hebel, und ist in der Ve
rung der durch die obere Abdachung des Armes CB und
die Axe C hindurchgehenden geraden Linie darin befestig
dient als unveränderlicher Aufhängungspunkt des Gewicht
welches man hier mit Hülfe eines doppelten Hakens auf die
anbringt, wie die Wageschalen mit den Wagebalken häufi
bunden sind. Das hintere Ende des Stiftes A läuft in eine
aus, welche in der Gleichgewichtslage des Hebels sich ein
deren oben an der Säule D befestigten Spitze a gegenüber
den muss.

Der Schwerpunkt des Hebels liegt ein wenig tiefer, a
Axe, welche ihm zur Unterstützung dient, so dass er durc
selbst das Bestreben hat, sich horizontal zu stellen.

Der Arm CB erstreckt sich ungefähr 1^{mm} über den ze
Theilstrich hinaus, dessen Entfernung vom Unterstützungsp
C derjenigen genau gleich ist, um welche die Axe A von d
ben Punkte entfernt ist. Dieser Arm wird durch eine Sc
verlängert, auf welcher eine kleine kupferne Scheibe bew
ist, die den Zweck hat, die horizontale Lage des Hebels zu
firen, wenn er mit keinem Gewichte belastet ist.

Das Gewicht Q, welches die eine Kraft vorstellt, hä
dem Arme CB mittels eines Bügels F, dessen innere al
Schneide gearbeitete Krümmung genau in die Einschnitte de
ren abgedachten Fläche eingreift. Die Taf. III. Fig. 3.
diesen Bügel und den Hebel, an welchen er sich genau a
in der wirklichen Grösse und in einer auf der Länge des I
senkrechten Ebene dar; der seitliche Ausschnitt bc hat ein
mögliche Breite, um über die die Verlängerung des Hebe

[...]nde Schraube gehen zu können, wenn der Bügel vom Arme [en]tfernt werden muss.

Die Massen P und Q sind eine jede aus 10 Messingschei[be]n von 50 Grammen Gewicht zusammengesetzt; im Mittelpunkte [de]r unteren Scheibe und senkrecht auf ihrer Ebene ist ein Stiel [be]festigt, auf welchem die anderen Scheiben mittels Löcher, die [in] Verlauf ihrer Axe durch sie hindurchgehen, aufgereiht sind; [au]sserdem sind sie vom Mittelpunkte nach dem Umfange hin ge[sp]alten, um leicht hingelegt und wieder weggenommen werden zu [kö]nnen. Rücksichtlich der Masse Q musste man in dem Gewichte [de]r unteren Scheibe auch das Gewicht des Bügels F und des [A]ufhängefadens aus dem Grunde vereinigen, weil dieser Bügel [se]ine Lage auf dem Hebelsarm verändert; dagegen ist der dop[pe]lte Haken, welcher zum Aufhängen der Masse P dient, und [eb]enso die Schnur, immer als zum Stifte A des Hebels gehörig, [un]d folglich als ein Theil desselben anzusehen. Die Masse P ist [zu]gleich bestimmt, als Kraft an dem Arme CB zu dienen, und [ka]nn aus ihrer Schnur ausgehakt werden; die Masse Q ist un[ve]ränderlich mit der ihrigen verbunden.

Die Lineale HG und JK, von Messing oder von Holz, wer[de]n an die hinteren Flächen der Würfel, welche die Säulen E und [D] überragen, mittels cylindrischer Zapfen befestigt, welche pa[ra]llel und beziehungsweise mit der Unterstützungsaxe C des He[be]ls und mit der Axe der kegelförmigen Spitze a concentrisch [s]ind. Sie können sich um diese Zapfen drehen und dabei mit [m]ehr oder weniger Reibung mittels der Schraubenmüttern L und [M] festgestellt werden. Die Mittelpunkte der kreisförmigen Löcher, [d]urch welche die Zapfen hindurchgehen, liegen in den geraden [L]inien, welche die eine der Seiten jedes Lineals bilden. N ist [e]ine winkelrecht auf das grosse Lineal aufgeschobene kleine [K]lemme, welche in verschiedenen Entfernungen von dessen Mit[te]lpunkte mittels einer Pressschraube auf demselben befestigt wer[d]en kann, die in eine das grosse Lineal durchlaufende Rille ein[g]reift. Der Zweck dieser Klemme ist, das Lineal HG senkrecht [a]uf JK stellen zu helfen. Dieses letztere dient dazu, die Kraft P unter einem mit der Geraden AC des Hebels gegebenen Win[k]el wirken zu lassen; zu dem Ende stellt man das Lineal unter [d]iesem Winkel fest und lässt die Schnur, welche die Masse P [t]rägt, über die Leitungsrolle O gehen. Der Halter dieser Rolle [is]t am Lineale mittels eines Zapfens R angebracht, um welchen [e]r sich in einer angemessenen Weite drehen kann, damit die [S]chnur parallel gerichtet werden könne der Seite des Lineals, [w]elche durch den Mittelpunkt a geht, mag nun die Kraft nach [d]er Aussenseite hin übertragen sein, wie es die Figur zeigt, oder [n]ach innen hin abgelenkt werden; desshalb ist der Halter auf der [H]interseite mit einem Stifte versehen, welcher durch einen Aus[s]chnitt im Lineale hindurchgeht; die Länge dieses Ausschnittes [b]estimmt die äussersten Lagen der Rolle. Beide Lineale HG und [J]K sind von ihren Drehungsmittelpunkten aus in eben solche [g]leiche Theile getheilt, wie der Arm CB des Hebels.

Ein prismatischer Stab Y, von Metall oder von Holz, geht [d]urch den Würfel oben auf der Säule S, welche die Säule E,

mit der sie ein Ganzes bildet, überragt. Eine Pressschraube *T* dient dazu, den Stab festzustellen. An seinem Endpunkte hängt an einem Doppelhaken eine Leitungsrolle *U*; die Schnur, welche sie umgiebt, trägt an der einen Seite einen Bügel, ähnlich dem bei *F*, aber verkehrt; er ist bestimmt, den Arm *CB* aufzuheben, wenn dieser als Hebel der zweiten oder dritten Art gelten soll; das andere Ende der Schnur trägt die Masse *W*, welche als Gegengewicht des Bügels *V* dient, sowie eine Schleife zur Aufnahme des Hakens des Gewichtes *P*. Die vertikale Lage des Bügels *V* oberhalb des Theilstriches, wo man ihn zum Aufheben des Armes *CB* haben will, wird erhalten, indem man den entsprechenden, auf dem Stabe *Y* verzeichneten Theilstrich mit der Mitte einer kleinen in dem Würfel gemachten Oeffnung *X* zusammenfallend macht.

Fügen wir ein Wort über die Art und Weise hinzu, wie man von dieser Maschine Gebrauch macht. Das Gleichgewicht des Hebels wird durch seine horizontale Lage und durch das Zusammenfallen der Spitze des Stiftes *A* mit der festen Spitze *a* angezeigt, wie ich dies weiter oben gesagt habe. Die Gleichheit der Arme *CA*, *CB* ergiebt sich mittels der kleinen Klemme *N*, welche wenn sie bei dem zehnten Theilstriche des Stabes *CH* befestigt ist, allmälig mit dem Stifte *A* und mit dem zehnten Theilstriche des Armes *CB* zur Deckung gebracht wird. Wenn nun die Massen *Q* und *P* gleich sind, und die eine bei diesem letzten Theilstriche, die andere bei dem Stifte *A* aufgehängt ist, so halten sie sich das Gleichgewicht; daraus ergiebt sich, dass die Krümmung des Armes *CA* ohne Einfluss ist auf das statische Moment der in *A* parallel mit der Richtung der Kraft *Q* wirkenden Kraft *P*.

Indem man ferner nach und nach die Kraft *Q* nach den verschiedenen Theilstrichen des Armes *CB* versetzt und zu gleicher Zeit den Werth der Masse *P* abändert, erweist man, dass die Intensitäten der Kräfte *P* und *Q* mit ihren respectiven Hebelsarmen im umgekehrten Verhältnisse stehen.

Um zu beweisen, dass eine Kraft, deren Richtung schief gegen den Hebel ist, zum Hebelsarm die Länge des Perpendikels habe, welches auf ihre Richtung vom Unterstützungspunkte des Hebels aus gefällt wird, bringt man das Lineal *JK* in die Lage, dass es mit der Horizontallinie den gegebenen Neigungswinkel bilde; sodann kreuzt man es mit dem Lineale *HG* unter einem rechten Winkel. Dieser wird, nachdem man die kleine Klemme *N* auf *HC* verschoben und hernach durch ihre Pressschraube festgestellt hat, aus der auf seiner ganzen Länge stattfindenden Berührung erkannt. Die Entfernung des Unterstützungspunktes *C* des Hebels von dem Kreuzungspunkte *Z* der beiden Lineale, welche Entfernung durch die auf dem Lineale *HG* verzeichneten Theilstriche angegeben wird, bildet jetzt den Hebelsarm der Kraft *P*; sie ist der vertikalen Composante der Kraft *P* proportionirt, derjenigen, welche diese Kraft behält, um *Q* das Gleichgewicht zu halten; dagegen ist die Entfernung des Kreuzungspunktes *Z* vom Drehungsmittelpunkte *a* des Lineales *JK*, die auf diesem letzteren abgelesen wird, der horizontalen Composante der Kraft *P* proportionirt; sie drückt denjenigen Theil dieser Kraft

aus, welcher für das Gleichgewicht von Q verloren gegangen ist, so dass das durch die Neigung der Richtung von P unterbrochene Gleichgewicht zwischen den gleichen Massen P und Q von neuem wiederhergestellt sein wird, wenn man die Kraft Q, welche dieselbe Intensität wie P beibehält, an dem Arme CB so anbringt, dass ihre Entfernung vom Unterstützungspunkte C dem Perpendikel CZ gleich ist, das nun den Hebelsarm von P misst; oder auch, das Gleichgewicht wird in gleicher Weise wiederhergestellt, wenn man den Angriffspunkt der Kraft Q in der Entfernung $CB=CA=10$ lässt, aber den Werth des Gewichtes Q vermindert, in der Art, dass dieses zu P in dem Verhältnisse $CZ:CB$ stehe.

Wenn man, um den Einfluss der geneigten Richtung der Kräfte zu beweisen, das Ende J des Lineales JK der Säule E nähert, statt es von ihr zu entfernen, wie es die Figur zeigt, dann wird der Kreuzungspunkt der beiden Lineale JK und HG auf dem unteren Arme des ersten seine Stelle haben; der Nachweis für die Richtigkeit der Bedingungen des Gleichgewichtes geschieht nach den beiden angezeigten Methoden. Doch es ist gut, darauf aufmerksam zu machen, dass im letzten Falle die horizontale Lage des Hebels eine momentane Gleichgewichts-Lage ist, weil nun der Winkel, welchen die Richtung von P mit dem Hebel bildet, die Grösse dieser Kraft für jede Lage des Hebels auf beiden Seiten der Horizontallinie verringert; also wird dadurch das Moment der Kraft P vermindert, das von Q vermehrt. Dagegen ist das Gleichgewicht stabil, wenn die Richtung von P nach aussen verlegt wird, wie in dem Falle, den die Zeichnung darstellt.

An der für das Cabinet der katholischen Universität verfertigten Maschine sind das Fussgestell und die Säulen von Holz, der Hebel von Stahl und die drei Lineale von Messing. Jeder der zehn Theile ist wieder in zehn gleiche Theile getheilt. Diese mit Sorgfalt und Genauigkeit vom Herrn Vanhese-Lamblin, Verfertiger physikalischer Instrumente zu Gent, ausgeführte Maschine leistet ihren Dienst mit der Schärfe einer Wage.

Der zweite Apparat ist bestimmt, die Richtigkeit der Bedingungen des Gleichgewichts beim Keile zu zeigen. Er ist eine Abänderung des von 's Gravesande angegebenen Apparates, welcher, obwohl für die Anschauung sehr gut, doch wegen der Masse von Schnüren, an denen er aufgehängt wird, den grossen Nachtheil hat, während der Versuche leicht in Unordnung zu gerathen und beim Gebrauche viele Umstände zu verursachen. Das Streben, diesen Fehler zu entfernen, führte mich darauf, das System der Schnüre durch feste Stützen zu ersetzen *).

*) Anmerkung des Uebersetzers. Zur Erleichterung des Verständnisses möge hier die aus 's Gravesande's Physices Elementa Mathematica entnommene Figur (Taf. V. Fig. 1.) verglichen werden, zu deren Erklärung Folgendes dient:

Der neue Apparat ist durch die Figuren Taf. IV. Fig. 1. 2. 3 im Grund- und Aufriss und von der Seite, in $\frac{1}{3}$ der wirklichen Grösse dargestellt. Wie in s' Gravesande's Maschine wird der Keil durch zwei rechtwinklige Platten mit parallelen Oberflächen *CA* und *CB* gebildet, welche in *C* durch ein Scharnier verbunden sind und unter einem gegebenen Winkel *ACB* mittelst eines metallenen Bogens *DE* von einander gehalten werden können, der durch beide Platten gegen deren obere Enden zu hindurch geht, wo Pressschrauben ihn feststellen. Eine Wagschale, an Schnüren befestigt und in der Mitte des Scharniers *C* angehakt dient zur Aufnahme der Gewichte, welche, mit dem der Wagschale und des Keils selbst, die Kraft *R* vorstellen, deren Richtung den Winkel des Keiles in zwei gleiche Theile theilt und die den Keil zwischen die beiden Hemmnisse *F*, *G* einzudrängen sucht. Diese setzen ihrem Entfernen von einander in horizontaler Richtung einen Widerstand entgegen, den ich mit *P* bezeichnen will. Es handelt sich darum, zu beweisen, dass in dem vorliegenden Falle die Intensitäten der Kräfte *R* und *P* sich zu einander verhalten, wie die Breite *AB* zur Höhe *CH* des Keils.

Um die Reibung des Keils gegen die Hemmnisse *F*, *G* zu vermindern, habe ich gleichfalls diese letzteren als hölzerne Cylinder angebracht und dieselben, um ein Ausgleiten des Keils nach der Seite hin zu verhindern, mit Randleisten versehen, so jedoch, dass für den Keil hinreichender Spielraum bleibt. Um ausserdem die Zahl der Berührungspunkte zu vermindern, lehnen sich die Keilflächen an zwei auf der Oberfläche jedes Cylinders als abgerundete Vorsprünge gelassene Ringe.

AA, *AA* sind zwei durch die Unterlagen *BB*, *BB* in paralleler und horizontaler Lage erhaltene Hölzer, an deren inneren Seiten Metallstreifen *CC*, *CC* anliegen, und so, dass sie über dieselben etwas hervorragen. Zwischen ihnen können sich zwei Cylinder *E*, *E* auf dünnen, stählernen, beiderseits etwas hervorragenden Axen bewegen. Die Cylinder haben an ihren Grundflächen überragende Ränder, und sind daselbst zur Vermeidung der Reibung mit den Metallstreifen an ihrer Aussenseite etwas convex gearbeitet. In der Mitte jedes der Hölzer *AA* befinden sich zwei Rollen *d*, *d* nahe bei einander, so dass sie sich fast berühren, deren obere Ränder über den Hölzern *AA* eben so weit hervorstehen, wie die oberen Ränder der Metallstreifen *CC*. Um die Rollen *d*, *d* auf der einen Seite des Apparates wird eine Schnur gelegt, in deren Mitte ein Gewicht *P* angehängt, und deren Enden an je einer Axe eines Cylinders mittels eines kleinen Metallbleches befestigt. In diesem letzteren ist nämlich ein Loch, durch welches man die Axe hindurchgehen lässt. Ganz ebenso ist auch auf der anderen Seite des Apparates ein Gewicht *P* angebracht. Durch die Gewichte *P*, *P* also, wenn diese gleich sind, werden die Cylinder in horizontaler Bewegung und mit parallel bleibenden Axen einander nahe gebracht. Der Keil zwischen den beiden Cylindern besteht aus zwei Holzplatten *F*, *F*, die unter einem beliebigen Winkel festgestellt werden können. Die den Keil niedertreibende Kraft wird durch das Gewicht *M* dargestellt.

Nach Crahay's im Obigen enthaltenen Angaben musste der ganze Apparat zur Anstellung von Versuchen in Schnüren aufgehängt, oder sonst auf irgend eine Weise so aufgestellt werden, dass der Keil und die Gewichte hinreichenden Spielraum zur Bewegung hatten.

Die metallenen Zapfen der Cylinder lagern an jedem Ende in Messingplatten, deren zwei man in J und K sieht. Diese Platten, anstatt an Schnüren aufgehängt zu werden, wie in 's Gravesande's Maschine, sind oben an zwei Gestellen L, M befestigt; so nämlich, dass die Axen der beiden Cylinder unter sich parallel und in einer Horizontalebene liegen. Jedes der Gestelle L, M ist aus zwei Streben L, L' und M, M' gebildet, welche, ein wenig gegen einander geneigt, nach unten hin durch die Fussplatten L'' und M'', nach oben hin durch die Zwischenstäbe L''', M''' dergestalt verbunden sind, dass sie eine unveränderliche Form behalten. Das Gestell M ist durch seine Fussplatte M'' mit dem Fusse T fest verbunden, das andere, L, ist um eine horizontale Axe beweglich, welche durch die Platte hindurchgeht und aus zwei Zapfen besteht, die in metallenen, ganz in den Fuss T eingefügten Trägern ruhen. Dadurch ist es möglich, den Cylinder F bis auf eine gewisse Grenze dem Cylinder G zu nähern und von ihm zu entfernen. Die beiden Platten J, J', welche die Zapfen des Cylinders F tragen, sind mit kleinen Ausläufern versehen, an denen Schnüre befestigt werden. Diese laufen horizontal über Leitungsrollen, welche auf der einen und der anderen Seite in den Platten K, K' des Gestelles M fest sind, und gehen von da vertikal hinab zur Aufnahme der beiden Enden eines horizontalen Stabes OO', in dessen Mitte ein Gewicht angebracht wird. Letzteres macht in Verbindung mit dem Gewichte des Stabes die Kraft P aus, welche dem durch die Kraft des Keils verursachten Entfernen der beiden Cylinder entgegenwirkt.

Damit diese Kraft nicht beeinträchtigt werde durch die Neigung des Gestelles L, sich nach M oder nach der entgegengesetzten Seite hin zu verrücken, haben die Zapfen l, l' solche Lage, dass, wenn dieses Gestell, gleichwie das andere in vertikale Stellung gebracht ist, die Richtung seines Schwerpunktes durch die Axe ll' hindurchgeht, so dass alsdann keine Neigung zum Verrücken vorhanden ist. Diese vertikale Stellung wird durch ein Bleiloth angezeigt, dessen Faden an seinem Ende in der Mitte des Zwischenstabes L''' befestigt ist, und dessen Spitze mit einem auf der Fussplatte L'' angemerkten Punkte zum Einspielen gebracht wird. Man gelangt dahin, dieser Bedingung Genüge zu leisten, wenn man den Keil mehr oder weniger zwischen die beiden Cylinder einsenkt, während die Wagschale mit einem zum Gleichgewichte nöthigen Gewichte belastet wird.

Um den Winkel zwischen den beiden Keilflächen, oder vielmehr das Verhältniss zwischen der Höhe CH und der Breite AB, für welches man die Beziehung zwischen den Kräften P und R darthun will, zu berichtigen, ist nichts bequemer, als sich hölzerner oder metallener Platten zu bedienen, von der Form gleichschenkliger Dreiecke, deren Grundseite und Höhe in den verschiedenen, für die Bedingungen des Gleichgewichtes festgestellten Verhältnissen angenommen sind (Taf. IV. Fig. 4.) Man stellt die eine von ihnen zwischen die Flächen des Keils, und wenn diese dann unter i Winkel der Platte angeordnet sind, stellt man sie durch Drehung Pressschrauben bei A und bei B fest; darauf nimmt man die te wieder weg. Ist dies geschehen, so stellt man den Keil schen die beiden Cylinder F, G, belastet die Wagschale so-

weit mit Gewichten, dass deren Summe, vereinigt mit dem Gewichte des Keils und der Wagschale, zum Gewichte P in dem Verhältniss der Grundseite zur Höhe des Dreiecks stehe. Man senkt den Keil bis soweit ein, dass das Bleiloth des Gestelles L mit dem angemerkten Punkte zusammenfällt; alsdann giebt der Keil, sich selbst überlassen, durch seine Unbeweglichkeit zu erkennen, dass Gleichgewicht stattfinde. Wenn die Last R nicht in dem angegebenen Verhältnisse angenommen ist, so wird der Keil etwas gehoben, oder er senkt sich auch soweit, bis der Bogen DE seine Unterstützung auf den Cylindern erhält.

An dem Modelle, welches in dem physikalischen Cabinet von Löwen vorhanden ist, beträgt das Gewicht P 2400 Grammes oder 24 Hectogrammes; die Platten, an Zahl ihrer fünf, haben die Verhältnisse $\frac{24}{24}$, $\frac{20}{24}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{24}$, $\frac{8}{24}$ zwischen Grundseite und Höhe. Diese Maschine, gearbeitet von Herrn Bernaert aus Gent, verrichtet ihre Dienste auf eine sehr befriedigende Weise.

In dem Apparate Taf. IV. Fig. 5. erkennt man den des Herrn Gay-Lussac für die Vermengung der Dünste und der trockenen Gase *) wieder. Er hat denselben Zweck und unterscheidet sich von jenem nicht wesentlich in der Construction, ausser darin, dass der eiserne Hahn, welcher nach unten zu die weite Glasröhre des Apparates von Gay-Lussac verschliesst, in dem neuen Instrumente durch ein cylindrisches Gefäss ersetzt ist, welches als Behälter für's Quecksilber dient und mit einem beweglichen, mittels einer Schraube einer Hebung und Senkung fähigen Boden versehen ist, wie bei einer Barometerröhre mit constantem Niveau. Der Zweck dieser Abänderung ist folgender: Um unter das in der weiten Röhre enthaltene trockene Gas die Flüssigkeit hinzuleiten, deren Dunst sich mit demselben vermengen muss, verlangt der Apparat Gay-Lussac's, dass man eine gewisse Masse Quecksilbers durch den Hahn ausfliessen lasse; wenn es sich in der Folge darum handelt, das Gemenge des Gases und des Dunstes in dem anfangs von dem Gase allein eingenommenen Raume wiederherzustellen, so muss man durch die Seitenröhre Quecksilber hinzuthun. Will man fernerhin das Quecksilber einen kleineren oder grösseren Raum einnehmen lassen, so ist man genöthigt, eine neue Portion Quecksilber in die Seitenröhre zu schütten, oder durch den Hahn ausfliessen zu lassen. Bei diesen sehr langwierigen Verrichtungen hält es sehr schwer, die Massen des zugeschütteten oder des abgelaufenen Quecksilbers so abzupassen, dass die Vermengung genau in dem vorgesetzten Raume herbeigeführt wird. Um die Schwierigkeiten zu vermindern und um ein Mittel zu haben, leicht und schnell den verlangten Raum herzustellen, geschah es, dass ich zu der ange-

---

*) Anmerkung des Uebersetzers. Als hinreichend bekannt wird dieser Apparat von Gay-Lussac hier nicht weiter beschrieben. M. s. z. B. Lehrbuch der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung von J. A. Grunert. Erster Theil. Leipzig. 1845. S. 485.

gebenen Veränderung meine Zuflucht nahm, über welche ich noch einiges Nähere mitzutheilen für nothwendig halte.

Das Gefäss mit beweglichem Boden ist von Buchsbaum, inwendig lakirt, um das Anhängen des Quecksilbers zu vermeiden. Es hat nach oben hin eine Oeffnung, in welche man eine Dille, gleichfalls aus Buchsbaum, mittels Schrauben einfügt; ein Lederring, zwischen das Gefäss und eine Einfassung der Dille gelegt, vervollständigt den Verschluss; die Dille ist von einem vertikalen Kanale durchbohrt, welcher sich nach oben in Form eines ziemlich kegelförmigen Flaschenhalses erweitert. In diesen Hals nun drückt man den Korkstöpsel hinein, durch welchen die Verlängerung der weiten Röhre hindurchgeht; diese verengert sich in ihrem Durchmesser von da an, wo sie mit der Seitenröhre zusammengelöthet ist. Das Ganze wird mittels eines Lederstückes in seiner Lage erhalten, welches man um die Röhre und um die an ihrer Aussenseite gekehlte Dille windet. Der verengerte Theil der weiten Röhre ist von der Länge, dass er durch die Dille ganz und gar hindurchgeht und in das Innere des Gefässes hineinragt, dessen Quecksilber nirgend anders als durch die Röhre einen Ausweg hat.

Um den Apparat zum Experimentiren in Stand zu setzen, muss man alle Feuchtigkeit, welche sich in den Röhren finden könnte, austreiben; zu diesem Zwecke hebe man sie von dem Gefässe, indem man die Dille abschraubt; hat man dann die Röhren leicht erhitzt, so fügt man in die weite Röhre, durch die untere Oeffnung, und fast nahe an ihrem Ende, eine Röhre von geringerem Durchmesser ein, verstopft den Zwischenraum zwischen den beiden Röhren und lässt durch das eingefügte Rohr hindurch einen trocknen Luftstrom gelangen. Dieser durchläuft die weite Röhre und geht durch die Seitenröhre hinaus. Alsdann verschliesst man, jenen Zwischenraum zwischen beiden Röhren frei lassend, das obere Ende der Seitenröhre. Genöthigt, durch die untere Oeffnung zu gehen, nimmt der Luftstrom ebenso die Feuchtigkeit mit, die sich vorfinden könnte. Ist dies geschehen, so bringt man die Dille sogleich wieder an ihren Platz über dem das trockne Quecksilber enthaltenden Gefässe und lässt dieses in den Röhren aufsteigen. Indem man den Apparat gehörig neigt, ist es leicht, aus der weiten Röhre soviel Luft fortzuschaffen, als man wünscht. Hat dann der Apparat die Temperatur der umgebenden Luft angenommen, so bringt man das Quecksilber in beiden Röhren auf gleiche Höhe; ferner stellt man den Massstab in der Weise fest, dass ein Ring, welcher daran in horizontaler Lage angebracht ist, und welcher die weite Röhre umfasst, mit seinem unteren Rande das Ende der in dieser Röhre enthaltenen Quecksilbersäule berührt. Hierauf giesst man in die Seitenröhre eine hinreichende Masse derjenigen Flüssigkeit, mit der man operiren will; man erniedrigt das Niveau des Quecksilbers ein wenig unter die gelöthete Stelle, und erhöht es in der Folge wieder, wenn in die weite Röhre ein grösserer Theil der Flüssigkeit eingetreten ist, als zur Sättigung des Raumes nöthig ist. Der Ueberschuss der Flüssigkeit, welcher in der Seitenröhre zurückgeblieben ist, wird daraus leicht entfernt, indem man die Quecksilbersäule durch das Spiel der unteren Schraube bis zu der Oeffnung in die

Höhe hebt, woselbst man die Flüssigkeit in dem Masse fortschafft, wie sie in dem kleinen, die Röhre endigenden Trichter anlangt.

Hat der Dunst der in die weite Röhre hineingebrachten Flüssigkeit den Raum darin durchdrungen — was man beschleunigt, indem man die Quecksilbersäule durch die Bewegung der Schraube oscilliren lässt — so führt man den Raum des Gemenges auf denjenigen zurück, welchen die trockene Luft inne hatte und welcher durch den Ring angezeigt wird. Die Erhebung des Quecksilbers in der Seitenröhre über den Nullpunkt der Theilung, welcher gleichfalls dem unteren Rande des Ringes entspricht, ist das Mass der Zunahme, welche die Elasticität der Luft durch das Hinzukommen des Dunstes erfahren hat; es ist die diesem eigenthümliche Spannkraft.

Damit der Massstab in angemessener Höhe festgestellt werden könne, wird er durch einen kupfernen Stiel getragen, welcher von einem auf der Rückseite des Masstabes angebrachten und mit einer Pressschraube versehenen Falze aufgenommen wird. Der Stiel ist vertikal eingesenkt in eine Art hölzernen Ring, welcher auf den oberen Theil des Gefässes passt, indem er mit einer Randleiste aufliegt, und welcher mittels zweier Schrauben daran fest gemacht werden kann, deren Enden in eine am Umfange des Gefässes angebrachte Höhlung einfassen können. Dieser Ring ist gegen die Mitte hin in der Art ausgeschnitten, dass er um beide Röhren gehen kann, wenn es sich darum handelt, diese zur Instandsetzung des Apparates abzuheben.

Die weite Röhre ist in Theile von gleichem Rauminhalte eingetheilt, deren Zahl auf der Aussenseite, ungefähr in der Mitte der Höhe anfangend, eingeschnitten ist. Den Durchmesser dieser Röhre, sowie den der Seitenröhre, muss man kennen, um die Capillarität berechnen zu können. Aber der Werth derselben kann sogleich bestimmt werden, wie ich es für den Apparat des Cabinets zu Löwen gethan habe, indem man den Höhenunterschied der Quecksilbersäulen in den beiden verbundenen Röhren beobachtet, bevor das Ende der weiten Röhre verschlossen ist. Der Massstab ist in Millimeter eingetheilt; die Theilungen setzen sich über den neben der weiten Röhre sichtbaren Theil der Platte auf einen Abstand von 30 Millimetern fort, sowohl oberhalb als unterhalb des unteren Randes des Ringes, welchem der Nullpunkt der Theilung entspricht. Die in $\frac{1}{5}$ der wirklichen Grösse ausgeführte Zeichnung wird zur weiteren Erklärung der verschiedenen Theile dieses Instrumentes dienen.

Ausser der weiter oben beschriebenen Methode, um die Elasticität des mit der Luft oder mit trocknem Gase vermengten Dunstes bestimmt zu ermitteln, kann man auch die folgende in Anwendung bringen: Für ein und dieselbe unveränderte Temperatur sei V der von dem Gas- und Dunst-Gemenge eingenommene Raum; p der atmosphärische Druck, h die Höhe der Quecksilbersäule in der Seitenröhre oberhalb des Niveaus in der weiten Röhre; c die Wirkung der Capillarität, d. h. die Grösse, um welche das Quecksilber in der Seitenröhre zu tief steht; endlich noch sei f die Elasticität des mit dem Gase vermengten Dunstes;

s Gemenge steht unter dem Drucke $p+h+c$, während das in m Gemenge enthaltene trockene Gas für sich allein diesen Druck trägt, vermindert um den Druck f, welchem der Dunst das leichgewicht hält; es bleibt also für das Gas übrig $p+h+c-f$ s dessen Raum V. Nun wollen wir den Raum des Gemenges rch die Bewegung der Schraube, welche den beweglichen Boen unten hält, ändern; die Länge der Quecksilbersäule in der itenröhre wird h' geworden sein, gerechnet von dem Niveau an der weiten Röhre, welches gleichfalls seine Stelle verändert t, indem der Raum des Gemenges jetzt eine Anzahl V' der auf eser Röhre bezeichneten Theile einnimmt; wenn die Temperar und der atmosphärische Druck dieselben geblieben sind, so ird die Luft allein im Gemenge dieses Mal einem Drucke $+h'+c-f$ unterworfen sein. Nun hat man nach dem Mariotteshen Gesetze, welchem das Gas des Gemenges für sich allein nterworfen bleibt:

$$\frac{V}{V'}=\frac{p+h'+c-f}{p+h+c-f},$$

oraus

$$f=p+c+\frac{V'h'-Vh}{V'-V}.$$

Jedes Paar von Beobachtungen wird den Werth der Elasticiit f des Dunstes liefern, und alle diese Werthe müssen gleich ein, wenn die Temperatur und der äussere Druck nicht geändert ind; der Raum wird hiebei als beständig mit Dunst gesättigt orausgesetzt.

Dieser Werth von f müsste bei Gleichheit der Temperatur der lasticität gleich sein, welche der Dunst im leeren Raume hat, ie es Herr Gay-Lussac aus seinen Versuchen hergeleitet hat. tatt dieser Gleichheit liefert der beschriebene Apparat, eben so ie alle die von derselben Art, für f immer einen um etwas zu leinen Werth. Ich habe mich davon zu verschiedenen Malen verichert, indem ich die Versuche, so viel ich allein konnte, mit 's Kleinste gehender Sorgfalt und unter Anwendung eines Kathemeters, um die Höhen der Quecksilbersäulen zu messen, antellte; ich vermengte mit der trocknen Luft bald Wasserdunst, ald Alkoholdunst, mit einem leichten Ueberschuss von Flüssigeit; die Spannkraft dieser Dünste im leeren Raume ward gleicheitig mittels des Daltonschen Apparates bestimmt, welcher zur eite desjenigen, der das Gemenge enthielt, aufgestellt war. Voreer schon hatte ich versucht, das Gesetz des Herrn Gay-Lussac mit Hülfe eines Daltonschen Apparates zu bewahrheiten, essen das Gemenge einschliessende Röhre in Theile von gleihem Rauminhalte eingetheilt war und welche bis zu verschiedenen iefen in das Quecksilber eingesenkt ward, um den Raum und ie drückende Kraft eine Abänderung erleiden zu lassen; allein h erhielt beständig für f eine kleinere Grösse, als die, welche emselben Dunste im leeren Raume angehörte. Herr Regnault ard zu einem ähnlichen Resultate durch eine Reihe von Versuchen eführt, welche dieser gelehrte und geschickte Beobachter mit

Instrumenten anstellte, die mit der äussersten Genauigkeit die Angaben zu liefern fähig waren. Allemal sind die Unterschiede, welche er für die Elasticität des mit der Luft gemengten Wasserdunstes erhalten hat, in Vergleich mit der Spannkraft desselben Dunstes im leeren Raume, bei Gleichheit der Temperatur, kleiner als diejenigen, welche die gewöhnlich zu dieser Darstellung bei den öffentlichen Vorlesungen angewendeten Apparate geben.

Ich schliesse mit der Bemerkung, dass das Instrument, welches den Gegenstand gegenwärtiger Notiz ausmacht, auf die befriedigendste Art benutzt werden kann, das Mariotte'sche Gesetz für die trockene Luft zu erweisen, wenn diese grösseren oder kleineren Druckkräften unterworfen ist, als denen der Atmosphäre, innerhalb der durch die Länge der Seitenröhre bestimmten Grenzen. Beobachtet man dann an der weiten Röhre, welche nur die trockene Luft enthält, nach einander die Räume V und V' und die Druckkräfte $p+h+c$ und $p+h'+c$, so muss der Relation

$$\frac{V}{V'}=\frac{p+h'+c}{p+h+c}$$

Genüge geschehen, indem die Längen h, h' mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, genommen werden, jenachdem sie grösser oder kleiner sind als die Länge der Quecksilbersäule in der anderen Röhre.

XVI.

Zur Rechtfertigung des Pythagoräischen Lehrsatzes.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Herr Oberlehrer Koppe begleitet in seinem Lehrbuche der Planimetrie und Stereometrie (zweite Aufl. S. 99.) den Pythagoräischen Lehrsatz, nachdem er denselben mit dem bekannten Euklidischen Beweise vorgetragen hat, mit folgender Bemerkung:

„Wie wir den vorstehenden Lehrsatz hier vorgetragen haben, erscheint derselbe als ein merkwürdiges Kunst-

stück, zwar bewundernswerth und äusserst künstlich, aber ohne irgend wie Aufschluss darüber zu geben, auf welchem Wege wohl der menschliche Geist zur Entdeckung dieses sonderbaren Satzes gelangt sein dürfte. Soll aber der mathematische Unterricht den Nutzen gewähren, dessen er fähig ist, so müssen die Wahrheiten der Mathematik nicht als Staunen erregende Kunststücke, sondern in einem natürlichen Verbande, nämlich so vorgetragen werden, dass jeder folgende Satz als ein Fortschritt in der durch die vorhergehenden Sätze gegebenen Richtung erscheint, als die Beantwortung einer Frage, welche sich aus der Erkenntniss des Vorangehenden jedem denkenden Kopfe von selbst aufdrängt. Da aber der so eben vorgetragene Lehrsatz eines solchen Zusammenhanges mit den ihm vorangehenden Sätzen offenbar entbehrt, so scheint er in einem für den Unterricht bestimmten Lehrbuche hier nicht an der rechten Stelle zu stehen, und wirklich hat er diesen Platz nur hergebrachter Weise erhalten. Auf eine einfache und natürliche Weise geht derselbe aus den Sätzen von der Aehnlichkeit der Dreiecke hervor.“

Wir haben diese Anmerkung vollständig hier abdrucken lassen, weil wir glauben, es dürfte darin die Ansicht mehr als eines Lesers ausgesprochen liegen, dem es um die vollständige Motivirung des einzelnen Satzes an derjenigen Stelle, welche derselbe einnehmen soll, ein Ernst ist. Zwar so lange man nur darauf ausgeht, das Verwandte und Gleichartige zusammenzustellen, so lange gebührt dem Pythagoräischen Lehrsatze, wie ihn Euklid gibt, offenbar seine Stelle in dem Abschnitte von der Flächengleichheit, da er es ebenfalls mit gleichen Flächen zu thun hat, und es kann dabei völlig gleichgültig bleiben, welche andere Sätze über Flächengleichheit ihm etwa voran_ehen oder nachfolgen; das leitende Princip für die Anordnung dieser Sätze bildet alsdann nur die Möglichkeit, jeden Satz an der ihm angewiesenen Stelle auch völlig beweisen zu können. Wenn man aber tiefer auf die Frage eingeht, wie der einzelne Satz durch die ihm vorangehenden gerechtfertigt erscheine, d. h. wie er aus diesen als ein nothwendiger Fortschritt nachgewiesen werden könne, so gewinnt die Sache allerdings ein anderes Ansehen.

Die Lehre von der Flächengleichheit eröffnet man in der Regel (wir wollen hier nicht untersuchen, mit welchem Rechte) durch Betrachtungen über die Gleichheit von Parallelogrammen und Dreiecken, sowohl bei einerlei, als bei verschiedener Grundlinie und Höhe, und gelangt daraus sehr einfach zu einem allgemeinen Verfahren, nicht nur Dreiecke und Parallelogramme vielfach unter einander, sondern auch beliebige andere geradlinige Figuren in Dreiecke oder in Parallelogramme zu verwandeln. Lässt man nun auf diese Betrachtungen plötzlich und ohne Uebergang den Pythagoräischen Lehrsatz folgen — natürlich so, dass von Quadratflächen und nicht von zweiten Potenzen der Dreiecksseiten die Rede ist, so hat man offenbar einen Sprung gemacht; denn es drängen sich sogleich mehrere Fragen auf, die ohne Antwort bleiben:

1) Wie kommt man dazu, plötzlich von **Quadraten ausschliesslich** zu reden?

2) Wie kommt es, dass man auf die **Summe** zweier Quadrate das Augenmerk richtet?

3) Wie kommt man zum **rechtwinkligen** Dreiecke?

Diese Fragen lassen sich umgehen, oder vielmehr sie erledigen sich von selbst, wenn man an die vorangegangenen Sätze auf folgende Weise anknüpft.

Es hat sich bis dahin herausgestellt, dass man jedes Parallelogramm, so wie jedes Dreieck in ein anderes von gegebener Grundlinie (oder gegebener Höhe) verwandeln kann, und da die beiden Elemente, Grundlinie und Höhe, das resultirende Parallelogramm oder Dreieck noch nicht vollständig bestimmen, so darf man noch eine dritte Bedingung hinzufügen, vorausgesetzt, dass diese weder auf Grundlinie noch auf Höhe von Einfluss ist. So kann man also jedes Parallelogramm in ein Rechteck oder einen Rhombus, jedes Dreieck in ein rechtwinkliges oder gleichschenkliges verwandeln; dagegen die Verwandlung des Parallelogramms in ein **Quadrat** und des Dreiecks in ein **gleichseitiges Dreieck** kann mit den bisherigen Hülfsmitteln nicht ausgeführt werden, weil hier die aufgestellte Bedingung, dass die resultirende Figur gleichseitig und gleichwinklig sein soll, wieder rückwärts Einfluss auf Grundlinie und Höhe hat, indem sie zwischen beiden eine Relation feststellt.

Daraus aber folgt die Nothwendigkeit, diese beiden letztern Aufgaben nun selbstständig in's Auge zu fassen. Es zeigt sich indessen sogleich, dass die Herstellung des **Quadrats** insofern als die einfachere dieser Aufgaben erscheint, als hier zwischen Grundlinie und Höhe nur das einfache Verhältniss der **Gleichheit** vorgeschrieben wird, während dagegen beim gleichseitigen Dreieck das Verhältniss zwischen Grundlinie und Höhe — auf dessen Berücksichtigung es hier jedenfalls ankommt — von einer zu verwickelten Natur ist, als dass solches an dieser Stelle der Geometrie schon genügend zur Sprache gebracht werden könnte. Aus diesem Grunde bleibt diese zweite Aufgabe besser bis zu einer spätern Stelle hinausgeschoben; die erste Aufgabe dagegen, welche das allgemeine Problem „**Jede geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln**", zum völligen Abschluss bringt, wollen wir hier vollständig behandeln, um zu zeigen, wie man daraus auf einem ganz natürlichen und streng methodischen Wege zu dem Pythagoräischen Lehrsatze gelangt. Wir geben damit schwerlich etwas neues, wenigstens wird jeder Kenner der geometrischen Analysis der Alten das Nachstehende ohne Mühe selbst zu entwickeln im Stande sein; aber wir erinnern uns nicht, diese Entwickelung in irgend einem geometrischen Lehrbuche ausgeführt oder auch nur angedeutet gefunden zu haben, und es wird uns freuen, wenn wir durch Mittheilung derselben auf eine ausgedehntere Anwendung der **geometrischen Analysis** aufmer[illegible] macht haben sollten, in welcher wir ein so vortrefflic[illegible] stück zu der Auflösung arithmetischer Aufgaben durch [illegible] **gen** besitzen.

Aufgabe.

Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Erste Auflösung (Taf. V. Fig. 2.).

Analysis. Es sei $ABCD$ das gegebene Rechteck, so liegt offenbar der Versuch am nächsten, die längere Seite AB um so viel zu verkürzen und gleichzeitig die kürzere AD um so viel zu verlängern, dass dadurch das gesuchte Quadrat entstehe. Gestützt auf das oberste Princip der geometrischen Analysis („Man betrachte die Aufgabe als gelöst") setzen wir demnach, es sei $AEFG$ das gesuchte Quadrat. Dieses soll mit $ABCD$ gleichen Inhalt haben, woraus sogleich folgt, dass auch die Hälfte des Quadrats, AEG, mit der Hälfte des Rechtecks, ABD, gleichen Inhalt haben muss; wo wir absichtlich die halbirenden Diagonalen EG und BD so gelegt haben, dass beiden Dreiecken der Winkel bei A, und damit so viel Fläche wie möglich, gemeinschaftlich bleibt. Denn nun erkennt man ohne Mühe, dass die Gleichung $AEG = ABD$ nur bestehen kann, wenn man hat

$$ED \parallel BG. \qquad (1)$$

Diese Bedingung für sich setzt aber die Lage der Punkte E und G, welche ausserdem an die Bedingung $AE = AG$ gebunden sind, noch nicht fest.

Um nun weiter die Gleichheit der Linien AE und AG in die Betrachtung hineinziehen zu können, wenden wir wieder ein sehr bekanntes Verfahren der geometrischen Analysis an, indem wir beide Linien in congruente Dreiecke zu bringen suchen, jedoch mit möglichster Benutzung schon vorhandener und Vermeidung willkürlicher Hülfslinien. Schliessen wir demnach das Dreieck AEG, welches die Seiten AE und AG beide enthält, eben deshalb aus, so bleibt uns nur die Wahl, über AG ein zu AED congruentes, oder über AE ein zu AGB congruentes Dreieck herzustellen, da die genannten Dreiecke die einzigen schon vorhandenen sind, in denen die fraglichen Seiten vorkommen. Wir nehmen nach Willkür den ersten Fall (der zweite würde gleichfalls zum Ziele führen) und legen an $AG = AE$ den Winkel $GAH = EAD$, machen $AH = AD$ und ziehen GH; alsdann werden die Dreiecke AED und AGH congruent, und folglich kann rückwärts die Gleichung $AE = AG$ nur bestehen, wenn man hat

$$AED \equiv AGH \text{ *}). \qquad (2)$$

---

*) Das von Gauss für den arithmetischen Begriff der Congruenz eingeführte Zeichen ($\equiv$) ziehen wir auch für den geometrischen Gebrauch dem gewöhnlichen ($\cong$) vor, weil es sich leichter schreiben lässt, und obendrein beim schnellen Schreiben das gewöhnliche Zeichen sich von selbst in das erstere verwandelt. Was man sonst zur Rechtfertigung des gewöhnlichen Zeichens anzuführen pflegt, dass das Congruenzzeichen sich aus dem Gleichheitszeichen und dem Aehnlichkeitszeichen ebenso zusammensetze, wie der Begriff der Congruenz aus den Begriffen der Gleichheit und der Aehnlichkeit zusammengesetzt sei, — das ist wenig mehr als eine Spielerei, die

Jetzt führt eine Combinirung der Bedingungen (1) und (2) zu dem Schlusse der Analysis. Die Congruenz in (2) erfordert nämlich unter anderen, dass Winkel $AED = AGH$ sei; wegen des Parallelismus in (1) ist aber ausserdem Winkel $AED = ABG$, folglich $ABG = AGH$, oder

$$AGB + AGH = R,$$

und diese Bedingung ist hinreichend, um den Punkt G und damit das gesuchte Quadrat durch Construction herzustellen.

Synthesis. Man verlängere die längere Seite AB des gegebenen Rechtecks $ABCD$ um so viel, als die kürzere Seite beträgt, also um $AH = AD$, construire über BH als Durchmesser einen Halbkreis, und verlängere endlich AD, bis sie in G diesen Halbkreis trifft, so ist AG die gesuchte Quadratseite, aus welchem das Quadrat $AGFE = ADCB$ herzustellen ist. — (Hätten wir den vorhin in Klammern angedeuteten zweiten Weg verfolgt, so würde die Synthesis gelautet haben: Man verlängere die kürzere Seite des gegebenen Rechtecks um so viel, als die längere Seite beträgt u. s. w.)

Der Beweis der Synthesis (nach der treffenden Bemerkung des Herrn Oberlehrers Helmes *) gleichsam die Rechnungsprobe für die Richtigkeit des gewonnenen Resultats) ist ohne Mühe aus der Analysis zu führen. Zieht man nämlich die in der Synthesis noch nicht vorgekommenen Linien GB, GE, DB, DE, so ist in Folge der Construction Winkel $HGB = R$, folglich Winkel $AGH = ABG$. Ferner ist in Folge der Construction Dreieck $AGH \equiv AED$, folglich auch Winkel $AGH = AED$, und dies mit dem Vorigen verbunden gibt Winkel $AED = ABG$, woraus folgt $ED \parallel BG$. Aus dem letzteren Grunde aber ist Dreieck $DEG = DEB$, mithin auch Dreieck $AEG = ABD$, und endlich $AEFG = ABCD$.

Anmerkung. Wir haben diese Auflösung desshalb hier vorangestellt, weil sie sich gleichsam von selbst zuerst darbietet, obgleich aus ihr der Pythagoräische Lehrsatz keineswegs ohne weiteres hervorspringt. Dieses werden erst die beiden folgenden Auflösungen leisten.

Zweite Auflösung (Taf. V. Fig. 3.).

Analysis. Es sei $ABCD$ das gegebene Rechteck und BD eine Diagonale desselben, so kommt die gegebene Aufgabe darauf hinaus: „das Dreieck ABD in ein anderes zu verwandeln, in welchem Grundlinie und Höhe einander gleich werden." Man weiss nun, dass der Inhalt des Dreiecks ABD sich nicht ändert, wenn man den Eckpunkt D an irgend eine andere Stelle der Linie DC verlegt, z. B. nach E, wo Dreieck $ABE = ABD$

---

der Schüler nicht einmal versteht, weil er von Gleichheit und Aehnlichkeit erst viel später etwas erfährt als von Congruenz. Mit mehr Grund könnten wir dagegen sagen: Weil Congruenz mehr sagt als Gleichheit, so ziehen wir drei Striche statt zweier!

*) Jahresbericht über das Gymnasium zu Celle. 1844.

ist. Da indessen bei dieser Verwandlung Grundlinie und Höhe des Dreiecks noch immer ihre anfängliche Verschiedenheit beibehalten, so lange man nämlich *AB* als Grundlinie ansieht, so wird der beabsichtigte Zweck nur dadurch erreicht werden können, dass man eine andere Dreiecksseite, z. B. *AE*, als Grundlinie, und mithin ein aus *B* auf *AE* oder deren Verlängerung gefälltes Perpendikel *BH* als Höhe des Dreiecks gelten lässt. Alsdann wird die Forderung, dass $AE = BH$ werden solle, keinen Widerspruch in sich schliessen, sobald nur, da stets $AE > AD$ und $BH < AB$ ist, *AB* als die längere und *AD* als die kürzere Seite des gegebenen Rechtecks *ABCD* vorausgesetzt worden war.

Es werde demnach die Aufgabe als gelöst angenommen, und das Dreieck *ABE*, dessen Seite *AB* mit der längeren Seite des gegebenen Rechtecks zusammenfällt, sei das gesuchte, in welchem mithin die Grundlinie *AE* der Höhe *BH* gleich ist. Um aus dieser Bedingung $AE = BH$ weitere Schlüsse machen zu können, suchen wir, dem Geiste der geometrischen Analysis gemäss, die beiden gleichen Linien *AE* und *BH* in congruente Dreiecke zu bringen, mit möglichst geringer Zuziehung fremdartiger Hülfslinien. Dazu bieten sich zwei Wege, nämlich man kann entweder über *AE* ein dem Dreieck *BHA* congruentes, oder über *HB* ein dem Dreieck *AED* congruentes Dreieck herstellen. Wir wählen den ersten Weg (obgleich auch der zweite zum Ziele führen würde) und legen an $AE = BH$ den Winkel $AEK = BHA$, und da man von selbst schon hat Winkel $EAK = HBA$, so wird

$$AEK \cong BHA.$$

Diese Congruenz schliesst aber weiter die Bedingung

$$AK = AB$$

in sich, und da man letztere jederzeit selbstständig herzustellen im Stande ist, so hat man damit alle Erfordernisse zur Construction des Dreiecks *AEK* und folglich zur Auffindung des Punktes *E* beisammen.

Synthesis. Man verlängere die kürzere Seite *AD* des gegebenen Rechtecks *ABCD* über *D* hinaus, bis $AK = AB$ geworden ist, und construire über *AK* als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Seite *DC* in *E* schneidet, so ist *AE* die gesuchte Quadratseite, also das über *AE* construirte Quadrat $AEFG = ABCD$.

Zum Beweise der Synthesis ziehe man noch *KE* und mit ihr die Parallele *BH*, welche die Linie *AE* oder deren Verlängerung in *H* trifft. Alsdann erkennt man leicht die Congruenz der Dreiecke *AEK* und *BHA*, folglich ist $AE = BH$, und da ausserdem in Folge der Construction $AE = FE$, so hat man auch $BH = FE$, und das Dreieck *AEB* ist die Hälfte des Quadrats *AEFG* über derselben Grundlinie *AE*. Zugleich ist aber auch das Dreieck *AEB* die Hälfte des Rechtecks *ABCD* über derselben Grundlinie *AB*, folglich endlich $AEFG = ABCD$.

Folgerung. Es liegt nahe, das durch *BAK* angedeutete Quadrat *BAKL* zu vervollständigen; wendet man aber auf das

dadurch hinzukommende Rechteck $CDKL$ die vorige Synthesis an, so findet man KE als die Seite desjenigen Quadrats, welches diesem Rechteck gleich ist, woraus sodann der Pythagoräische Lehrsatz ohne Mühe hervorgeht.

Dritte Auflösung (Taf. V. Fig. 4.)

Analysis. Wenn man wie in der vorigen Auflösung darauf ausgeht, für das Dreieck ABD ein gleiches ABE an die Stelle zu setzen, in welchem die als Grundlinie betrachtete Seite AE der zugehörigen Höhe gleich wird, so ist es nicht nothwendig, den Punkt E in der Seite DC selbst anzunehmen, sondern derselbe kann auch in der Verlängerung von DC aufgesucht werden. Es sei demnach — die Aufgabe als gelöst angenommen — ABE das gesuchte Dreieck, wo E in der Verlängerung von CD liege, so wird das Kriterium für die Richtigkeit dieses Dreiecks darin bestehen, dass das aus B auf die Verlängerung von AE gefällte Perpendikel BH der Grundlinie AE gleich sei. Um diese Bedingung festhalten zu können, suchen wir, ganz wie früher, die beiden gleichen Linien AE und BH in congruente Dreiecke zu bringen. Wir wählen dazu unter den beiden möglichen Fällen, die wir hier nicht weiter anzeigen wollen, denjenigen aus, wo wir über AE das Dreieck $AEK \equiv BHA$ construiren; zur Herstellung dieses Dreiecks AEK sind sodann sämmtliche Bedingungen in der gegebenen Aufgabe enthalten.

Synthesis. Man verlängere die kürzere Seite AD des gegebenen Rechtecks $ABCD$ über D hinaus, bis $AK = AB$ geworden ist, und construire über AK als Durchmesser einen Halbkreis, welcher die Verlängerung der Seite DC in E schneidet, so ist AE die gesuchte Quadratseite, also das über AE construirte Quadrat $AEFG = ABCD$.

Diese Synthesis stimmt bis auf die mit Sperrschrift gedruckte Stelle wörtlich mit der vorigen überein, und ebenso kann auch der vorige Beweis, nebst der Folgerung, wörtlich hier wiederholt werden.

XVII.

Einige Bemerkungen über reguläre Körper.

Von
Herrn Fischer,
Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule zu Bayreuth.

Die kantenberührende Kugel bei regulären Körpern.

Diejenigen Lehrbücher der Stereometrie, welche die Lehre von den regelmässigen Polyedern ausführlich behandeln und namentlich von der um- und einbeschriebenen Kugel sprechen, sollten das Dasein einer kantenberührenden wenigstens anführen. Diese Forderung stützt sich auf folgende Gründe.

§. 1. Wie eine reguläre geradlinige Figur, entsprechend ihren zwei Dimensionen und den zwei Bedingungen, die zu ihrer Existenz erforderlich sind, zwei Kreise bedingt, die mit ihr einerlei Mittelpunkt haben; ebenso bedingt ein regulärer Körper gemäss seinen drei Dimensionen, gemäss den drei Bedingungen, die seine Definition enthält, auch drei Kugeln, die mit dem Körper einerlei Mittelpunkt haben.

§. 2. Auf der Oberfläche der $\left\{\begin{matrix}\text{umbeschriebenen}\\ \text{einbeschriebenen}\end{matrix}\right\}$ Kugel liegt der $\left\{\begin{matrix}\text{umbeschriebene Kreis}\\ \text{Mittelpunkt}\end{matrix}\right\}$ der Grenzfläche; warum soll der einbeschriebene Kreis leer ausgehen, warum soll er nicht ebenfalls seine Kugel beanspruchen dürfen? Da ein Punkt im Raume nur durch drei Forderungen bestimmt ist, so darf bei dem Mittelpunkte eines regulären Polyeders keine seiner drei Eigenschaften übergangen werden. Ein solcher Mittelpunkt gehört, ebensogut wie der einer einzelnen Grenzfläche, zu den unendlich vielen, welche, in Bezug auf letztern 1) von allen ihren Spitzen, 2) von allen ihren Seitenlinien gleichweit entfernt sind. Hiezu kommt noch als dritte unterscheidende Forderung bei dem einen Punkte, dass er in der Grenzebene selbst liegen, bei dem andern, dass er von der Grenzfläche und andern Ebenen gleichweit entfernt sein soll.

§. 3. Während man in Lehrbüchern zu zeigen sich bemüht:

> „In jedem regelmässigen Körper gibt es einen Punkt,
> „der von allen Ecken und Flächen gleichweit ent-
> „fernt ist“

beweis't man auch — ohne jedoch letztere Thatsache und insbesondere die aus derselben hervorgehende Existenz einer kantenberührenden Kugel zum wissenschaftlichen Bewusstsein zu bringen — dass derselbe Punkt von allen Kanten gleichweit entfernt ist. Die Entfernungslinie oder der Radius der kantenberührenden Kugel ist sogar, als Halbirungslinie des Neigungswinkels, eine wichtige Hilfslinie für den Beweis des genannten Lehrsatzes.

§. 4. Wenn ein Körper so beschaffen ist, dass man ihm eine kantenberührende Kugel einbeschreiben kann, so folgt schon aus dieser einzigen Eigenschaft eine grössere Annäherung seiner Gestaltung an Regelmässigkeit, als wie sie durch die Zulässigkeit von einer der beiden andern Kugeln bedingt ist. Denn in diesem Falle lassen sich offenbar allen Grenzflächen Kreise einbeschreiben, deren Berührungspunkte durchgehends paarweise in einem Punkte einer Kante zusammenkommen.

§. 5. Noch mehr zeigt sich, in wiefern die kantenberührende Kugel inniger mit regelmässigen Gestaltungen zusammenhängt, als jede der beiden andern, wenn man annimmt, dass ein Körper zwei concentrische Kugeln zulasse.

I. Wenn man einem Körper eine Kugel umbeschreiben und eine concentrische einbeschreiben kann, so folgt nur:

1) dass die Grenzebenen Figuren sind, denen sich Kreise umschreiben lassen, und

2) dass die Halbmesser dieser Kreise gleich sind.

Wohl aber können die Grenzflächen

a) unregelmässig, *b*) an Seitenzahl verschieden und *c*) ungleich zu einander geneigt sein.

Anmerkung. Hieher gehört z. B. jedes senkrechte Prisma mit regulärer Grundfläche, bei welchem der einbeschriebene Kreis der letzteren einen der Höhe des Prismas gleichen Durchmesser hat. — Jedes also beschaffene Prisma und jeder hieher gehörige Körper schliesst, wenn er nicht einer der fünf platonischen ist, die kantenberührende Kugel aus.

II. Gibt es in einem Körper einen Punkt, von dem aus eine, seine Kanten, und eine, seine Flächen berührende Kugel sich construiren lässt, so müssen

1) den Grenzfiguren sich Kreise einbeschreiben lassen von der §. 3. erwähnten Art; ferner müssen

2) die Halbmesser dieser Kreise gleich sein, es werden also auch

3) die Grenzflächen gleich zu einander geneigt sein.

Hiebei können die Grenzflächen nur *a*) unregelmässige und *b*) an Seitenzahl verschiedene Figuren sein.

Anmerkung. Der Art sind von mathematisch behandelten Körpern das Rhomboidal-Dodekaeder und das Rhomboidal-Triakontaeder (M. Hirsch, geom. Aufg. II. Berlin. 1807. Seite 192.), ausserdem mehrere Krystalle. Kein hieher gehöriger Körper lässt eine umbeschriebene Kugel zu.

III. Lässt ein ebenbegrenzter Körper eine umbeschriebene und eine concentrische kantenberührende Kugel zu, so sind die Grenzebenen Figuren, welche

1) durchaus gleiche Seitenlinien haben,
2) einen umbeschriebenen und
3) einen einbeschriebenen Kreis bestimmen, also regelmässig sind.

Diese regelmässigen Grenzflächen können aber

a) verschiedene Seitenzahl und *b*) ungleiche Neigung

zu einander haben.

Anmerkung. Alle archimedischen Körper (in der angeführten Schrift Seite 149. und 175.) besitzen die ebenerwähnten Eigenschaften. Nur zwei (ebendaselbst mit VI., VII. bezeichnet) haben auch durchgehends gleiche Flächenwinkel. — Die archimedischen Körper entbehren der flächenberührenden Kugel.

Man sieht aus den Fällen II. und III., im Vergleich zu I., dass durch die kantenberührende Kugel eine Folgerung mehr, ein Schritt weiter zur Regelmässigkeit bedingt ist.

§. 6. Der planimetrische Satz: „Wenn sich einer geradlinigen Figur ein Kreis um- und ein concentrischer einbeschreiben lässt, so ist sie regelmässig“ findet in der Stereometrie kein Analogon, so lange der in §. 3. aufgeführte Lehrsatz seine gewöhnliche Fassung behält. In dieser lässt er — als unvollstnädig — keine Umkehrung zu, wie aus §. 5. I. deutlich hervorgeht. Wird aber jener Lehrsatz so gefasst:

IV. Wenn es einen regelmässigen Körper gibt, so befindet sich in ihm ein Punkt, der von allen Ecken, Flächen und Kanten gleichweit absteht; oder: so lässt er drei concentrische, eine Ecken-, Kanten- und Flächenkugel zu;

so liefert seine gänzliche Umkehrung, deren Richtigkeit aus der Verknüpfung der Fälle I., II. und III. des §. 5. hervorgeht, in schönster Weise das gewünschte Analogon:

V. Wenn ein Polyeder die oft genannten drei concentrischen Kugeln zulässt, so ist es regelmässig.

Anmerkung 1. Wie jedes Dreieck zwei Kreise, einen Um- und einen excentrischen Innenkreis, ein gleichseitiges aber zwei concentrische zulässt, so gibt es für jede reguläre Pyramide drei

Kugeln besprochener Art, die stets excentrisch, nur beim Tetraeder concentrisch sind.

Anmerkung 2. Noch sind vielleicht folgende Umkehrungen in Beziehung auf den behandelten Gegenstand nicht ohne Interesse. Ein ebenbegrenzter Körper gehört zu den regulären, wenn er ist:

1) bei gleichgrossen Grenzflächen, concentrisch nach Ecken und Kanten;
2) bei gleichen Kanten, concentrisch nach Ecken und Flächen;
3) bei gleichen ebenen Winkeln, concentrisch nach Kanten und Flächen;
4) bei gleichgrossen Flächen und Kanten, centrisch nach den Ecken;
5) bei gleichen Kanten und ebenen Winkeln, centrisch nach den Flächen;
6) bei gleichgrossen Flächen und ebenen Winkeln, centrisch nach den Kanten.

Das Aufstellen und Beweisen solcher Umkehrungen, deren es noch mehrere gibt, dürfte eine gute Uebung für Schüler sein.

§. 7. Es handelt sich nicht um die Sucht nach Analogien; vielmehr zeigt das bisher Gesagte, und namentlich die Umkehrungen V. etc., dass die kantenberührende Kugel in nothwendigem Zusammenhange mit den regulären Körpern steht, und dass desshalb der gewöhnlich aufgestellte Lehrsatz (§. 3.) und mit ihm die ganze Lehre von den platonischen Körpern mangelhaft bleibt, so lange dieser Kugel nicht gedacht wird.

§. 8. Eben wegen des erwähnten innigen Zusammenhanges ist man genöthigt, entweder — was bei dem Dodekaeder, meines Wissens, gewöhnlich geschieht — den Halbmesser der Kantenkugel selbst zu benützen, oder denselben durch eine andere Dimension zu ersetzen, wenn die Construction der andern Kugelhalbmesser und, bei Ausschluss sphärischer Trigonometrie, die Berechnung letztgenannter Linien, des Kubikinhaltes, sowie des Neigungswinkels verlangt wird. Will man aber ein einziges, rein geometrisches Gesetz aufstellen, nach dem sich sämmtliche platonischen Polyeder berechnen lassen, so wird man bei allen am angemessensten den erwähnten Halbmesser zu Hilfe nehmen.

Ein rein geometrisches Gesetz zur gleichartigen Berechnung der wichtigsten Stücke und des Kubikinhaltes regulärer Körper.

§. 9. Wird irgend ein Körper, er sei regelmässig oder nicht, durchgehends von $n$kantigen Ecken und $m$seitigen ebenen Figuren begrenzt, und ist S die Anzahl der Grenzflächen, so folgt:

die Anzahl aller ebenen Winkel $W=mS$;

„ „ „ Körperecken $E=\frac{1}{n}.W=\frac{m}{n}S$;

„ „ „ Kanten $K=\frac{1}{2}.W=\frac{m}{2}S$;

folglich nach dem Eulerschen Lehrsatze:

$$S+E-K=S+\frac{m}{n}S-\frac{m}{2}S=2,$$

daher die Anzahl aller Grenzflächen:

$$S=\frac{4n}{2(n+m)-nm},$$

wodurch auch W, E und K bekannt sind.

Zusatz. Hat ein solcher Körper gleichgrosse Grenzflächen, und bezeichnet g den Inhalt von einer derselben, O seine Oberfläche, so ist:

$$O=\frac{4n}{2(n+m)-nm}.g.$$

§. 10. So gut sich, dem vorigen Paragraphen gemäss, insbesondere bei einem regulären Körper die Anzahl aller Seitenflächen, namentlich aber die Oberfläche nach einer und derselben Formel berechnen lässt, sobald nur die Beschaffenheit einer Grenzfläche und die Anzahl derselben um Ein Eck herum bekannt ist, ebenso gibt es ein für diese Körper allgemein gültiges Gesetz, nach welchem sich blos unter letztgenannter Voraussetzung die drei Kugelhalbmesser, der Kubikinhalt, wie auch der Neigungswinkel zwischen den Grenzflächen eines jeden, ohne Hilfe sphärischer Trigonometrie, berechnen lassen. Zugleich wird es durch dieses Gesetz überflüssig, den elementaren Berechnungen nach gewöhnlicher Weise ein Construiren oder mindestens ein Vorstellen der Gestalt eines jeden einzelnen Körpers vorausgehen zu lassen, da dasselbe nur den ebenerwähnten Eulerschen und den §. 6. IV. aufgeführten Lehrsatz in elementarer, aber allgemeiner Fassung bewiesen voraussetzt.

§. 11. Lehrsatz. Gibt es irgend einen regelmässigen Körper, dessen Ecken $n$kantig sind, so finden folgende Sätze statt:

I. Die Endpunkte der n Kanten, welche von einem Körpereck auslaufen, liegen in Einer Ebene und ihre Verbindungslinien — kleinste Diagonalen der Grenzflächen, jede $=d$ (in besonderen Fällen Seitenlinien, also $d=a$) — bilden eine regelmässige, $n$seitige Figur, Basis des Eckes genannt (auf welcher der Halbmesser des Eckes senkrecht steht).

II. Der Halbmesser R der umbeschriebenen und der Halbmesser $\mathfrak{X}$ der kantenberührenden Kugel verhalten sich

zu einander, wie die Kante a zum Halbmesser q der Eckbasis, oder es ist:

$$R : \mathfrak{R} = a : q.$$

Bew. ad I. Es bezeichne A das körperliche Eck, B, C, D.... die Endpunkte der Kanten und M den, jedenfalls vorhandenen Mittelpunkt des Körpers.

Werden MA, MB, MC, MD.... gezogen, so entstehen lauter congruente, gleichschenkelige Dreiecke, woher

$$1)\quad \angle MAB = \angle MAC = \angle MAD....$$

Werden von B, C, D.... Lothe auf MA gefällt, so wird MA in den, vielleicht noch verschiedenen Punkten F, F', F''.... getroffen. Wegen Folgerung 1) jedoch und wegen der Gleichheit der Kanten sind die neu entstandenen rechtwinkeligen Dreiecke congruent, folglich findet statt:

2) $AF = AF' = AF''$....., d. h. die Lothe treffen sich in einem einzigen Punkte F des Halbmessers MA und die Verbindungslinien der Kanten-Endpunkte bilden eine ebene, $n$seitige Figur, auf welcher MA in F senkrecht steht;

3) $BF = CF = DF =$....., d. h. die $n$seitige Figur, wovon ohnedies jede Seite $= d$ ist, lässt einen umschriebenen Kreis zu, ist also ein regelmässiges, ebenes nEck, mit der Seite $BC = d$ (oder a), dem Mittelpunkte F und dem Halbmesser $FB = q$.

Bew. ad II. Bezeichnet K den Mittelpunkt der Kante AB, so ist MK die Haupthöhe und BF eine zweite Höhe des gleichschenkeligen Dreiecks MAB, daher:

$$MA : MK = AB : BF.$$

Es ist aber $MA = R$, dann $MK = \mathfrak{R}$, ferner $AB = a$ und $BF = q$, daher:

$$\odot)\quad R : \mathfrak{R} = a : q.$$

§. 12. Aus dem Vorhergehenden folgt noch:

$$MA^2 = MK^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2,$$

oder

$$☽)\quad R^2 = \mathfrak{R}^2 + \tfrac{1}{4}a^2.$$

Aus den beiden Gleichungen $\odot$) und ☽) ergiebt sich sogleich:

I. $2R = a . \frac{a}{\sqrt{a^2 - q^2}}$ für den Durchmesser der Eckenkugel,

II. $2\mathfrak{R} = q . \frac{a}{\sqrt{a^2 - q^2}}$ für den Durchmesser der Kantenkugel.

Anmerkung. Die Gleichung D) folgt schon aus dem als bewiesen vorausgesetzten Lehrsatze §. 6. IV., hätte sonach hier keiner neuen Ableitung bedurft, wenn für gewöhnlich von der kantenberührenden Kugel die Rede wäre.

§. 13. Der Nenner $\sqrt{a^2-q^2}$ ist nichts Anderes als der Werth von AF, d. h. als die Entfernung der Spitze des körperlichen Eckes von seiner Basis. Man erhält daher aus I. den Satz:

1) Die Kante eines regulären Polyeders ist die mittlere Proportionale zwischem dem Durchmesser der umschriebenen Kugel und der genannten Entfernung AF; dagegen erhält man aus Gleichung II.:

2) Der Durchmesser der Kantenkugel verhält sich zur Kante selbst, wie der Halbmesser der Eckbasis zur Entfernung der letzteren von der Eckspitze.

Anmerkung. Wie die letzten beiden Sätze auch aus den Proportionen $MA:AK=AB:AF$ und $MK:AK=BF:AF$ folgen; so lässt sich namentlich der erstere noch mit Hilfe eines Kreises ableiten, der von M aus durch A und B geht, indem unmittelbar $2MA:AB=AB:AF$ ist. Durch diesen Satz wird es möglich, den Halbmesser der kantenberührenden Kugel für die etwaigen Berechnungen und Constructionen zu umgehen, wenn man statt seiner die wohl minder wichtige Grösse AF oder gar $(2AM-AF)$ noch ausser q in Anwendung bringt, wie solches in mehreren Lehrbüchern bei dem Ikosaeder, mitunter auch bei dem Tetraeder oder Oktaeder, aber nirgends, soweit mir bekannt, in consequenter Durchführung und ohne Rücksicht auf die besondere Gestaltung eines einzelnen Körpers geschehen ist.

§. 14. Bezeichnet r den Halbmesser des umschriebenen, ϱ den des einbeschriebenen Kreises der Grenzfläche und P den Halbmesser der einbeschriebenen Kugel, so hat man bekanntlich die Gleichung:

$$P^2=R^2-r^2 \text{ (oder } P^2=\mathfrak{R}^2-\varrho^2).$$

Setzt man hier den im vorigen Paragraphen entwickelten Werth von R (oder $\mathfrak{R}$) ein, so erhält man weiter:

$$\text{III. } 2P=a.\sqrt{\frac{a^2}{a^2-q^2}-\frac{4r^2}{a^2}} \text{ oder } =a.\sqrt{\frac{q^2}{a^2-q^2}-\frac{4\varrho^2}{a^2}} \quad \text{für den Durchmesser der einbeschriebenen Kugel.}$$

Wenn C den Kubikinhalt eines regelmässigen Körpers bezeichnet, die übrigen Buchstaben aber ihre bisherige Bedeutung behalten, so ist:

IV. $C=\frac{1}{3}O.P$ *) $=\frac{1}{3}\cdot\frac{4n}{2(n+m)-nm}\cdot g\cdot\frac{a}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{a^2-q^2}-\frac{4r^2}{a^2}}$
$=\frac{1}{6}\cdot Sga\sqrt{\frac{a^2}{a^2-q^2}-\frac{4r^2}{a^2}}.$

Zusatz. Der halbe Neigungswinkel ist spitzer Winkel eines rechtwinkeligen Dreiecks, eingeschlossen von den Halbmessern $\mathfrak{X}$ und ϱ, gegenüber dem Halbmesser P; daher:

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{P}{\mathfrak{X}},\ \sec\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{\mathfrak{X}}{\varrho},\ \tang\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{P}{\varrho}\ \text{u. s. f.}$$

§. 15. Ausserdem, dass $m>2$ und $n>2$ sein muss, kann, schon nach §. 9., wegen des Nenners der dortigen Brüche, ein Körper mit gleichnamigen Grenzfiguren und mit Ecken von gleichvielen Kanten nur dann bestehen, wenn $2(n+m)>nm$ ist; er würde undenkbar, sobald $2(n+m)\overline{\overline{<}}nm$ wäre. Daher kann es, wenn man die Körper mit convex-concaven Ecken nicht besonders zählt, überhaupt nur fünf Gattungen solcher Körper geben. Da kein Raum von lauter concaven Ecken umschlossen, ein regelmässiger Körper seinem Begriff nach nicht convex-concav sein kann, so gibt es nur fünf reguläre Körper.

In jedem dieser fünf Fälle ist auch $q<a$, wesshalb die Werthe von R, $\mathfrak{X}$, P und C reell sind. Wenn aber $2(n+m)\overline{\overline{<}}nm$ ist, so ist auch $q\overline{\overline{<}}a$, wodurch R, $\mathfrak{X}$, P, C unbestimmbar oder imaginär werden.

Anwendungen auf die fünf möglichen Fälle.

§. 16. Anwendung des in §. 11. I. enthaltenen Lehrsatzes.

1. Wird ein körperliches Eck von drei congruenten gleichseitigen Dreiecken gebildet, so ist $n=3$, daher die Basis des körperlichen Ecks ein gleichseitiges Dreieck, und zwar $d=a$, also $q=\frac{a\sqrt{3}}{3}$, $\left(\frac{q}{a}\right)^2=\frac{1}{3}$.

2. Bei einem körperlichen Eck aus vier gleichseitigen, gleich zu einander geneigten Dreiecken ist $n=4$, daher die Basis ein Quadrat mit der Seite $d=a$ und dem Halbmesser $q=a\frac{\sqrt{2}}{2}$, woher $\left(\frac{q}{a}\right)^2=\frac{1}{2}$.

---

*) $C=\frac{1}{3}O.P$ folgt unmittelbar aus §. 6. IV. als Zusatz und wird in vielen Lehrbüchern als solcher gegeben.

3. Bei einem körperlichen Eck aus fünf gleichseitigen gleich zu einander geneigten Dreiecken ist $n=5$, die Basis also ein regelmässiges Fünfeck mit der Seite $d=a$ und dem Halbmesser $q=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}=\frac{a}{10}\sqrt{5(10+2\sqrt{5})}$, woher $\left(\frac{q}{a}\right)^2=\frac{5+\sqrt{5}}{10}$.

4. Ist das körperliche Eck von drei congruenten Quadraten gebildet, so ist $n=3$, die Basis des Ecks ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $d=a\sqrt{2}$ und dem Halbmesser $q=d.\frac{\sqrt{3}}{3}=a.\frac{\sqrt{6}}{3}$, woher $\left(\frac{q}{a}\right)^2=\frac{2}{3}$.

5. Kommen endlich drei congruente regelmässige Fünfecke im Körpereck zusammen, so ist $n=3$, somit die Basis des Eckes ein gleichseitiges Dreieck mit der Seite $d=a.\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und dem Halbmesser $q=d.\frac{\sqrt{3}}{2}=a.\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{6}$, also $\left(\frac{q}{a}\right)^2=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$.

§. 17. Anwendung des Lehrsatzes §. 11. II. resp. der Formeln des §. 12.

Bezeichnet man im Allgemeinen $\frac{a^2}{a^2-q^2}=\frac{1}{1-\left(\frac{q}{a}\right)^2}$ mit f^2 oder $\frac{a}{\sqrt{a^2-q^2}}$ mit f, und nach den fünf besonderen Fällen mit f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, so erhält man:

$$f_1^2=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}, \qquad \text{also } f_1=\tfrac{1}{2}\sqrt{6};$$

$$f_2^2=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2, \qquad \text{"} \ f_2=\sqrt{2};$$

$$f_3^2=\frac{1}{1-\frac{5+\sqrt{5}}{10}}=\frac{5+\sqrt{5}}{2}, \qquad \text{"} \ f_3=\sqrt{10+2\sqrt{5}};$$

$$f_4^2=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3, \qquad \text{"} \ f_4=\sqrt{3};$$

$$f_5^2=\frac{1}{1-\frac{3+\sqrt{5}}{6}}=\frac{(1+\sqrt{5})^2.3}{4}, \qquad \text{"} \ f_5=\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{3}.$$

Für den Durchmesser der Eckenkugel erhält man sogleich $2R=af$. Ferner erhält man für den Durchmesser der Kantenkugel:

$$2\mathfrak{X}_1 = q_1 f_1 = a.\frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{\sqrt{6}}{2} = a.\tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$2\mathfrak{X}_2 = q_2 f_2 = a.\frac{\sqrt{2}}{2}.\sqrt{2} = a;$$

$$2\mathfrak{X}_3 = q_3 f_3 = a.\tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}.\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} = a.\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$2\mathfrak{X}_4 = q_4 f_4 = a.\frac{\sqrt{6}}{3}.\sqrt{3} = a\sqrt{2};$$

$$2\mathfrak{X}_5 = q_5 f_5 = a.\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{6}.\frac{(1+\sqrt{5})\sqrt{3}}{2} = a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$$

Anmerkung. Der Factor von a für $2\mathfrak{X}$ sei im Allgemeine mit v bezeichnet, so dass also $2\mathfrak{X} = av$ für alle Fälle gelte.

§. 18. Anwendung des §. 14., nämlich der Formel für den Durchmesser der Flächenkugel.

Um $2P$ zu berechnen, hat man

in den ersten drei Fällen $\frac{4r^2}{a^2} = \frac{4}{3}$;

im vierten Falle $\frac{4r^2}{a^2} = 2$, im fünften $\frac{4r^2}{a^2} = \frac{10+2\sqrt{5}}{5}$

Bezeichnet man diese Grösse mit p^2, so ist:

$$f_1^2 - p_1^2 = \tfrac{3}{2} - \tfrac{4}{3} = \tfrac{1}{6};$$

$$f_2^2 - p_2^2 = 2 - \tfrac{4}{3} = \tfrac{2}{3};$$

$$f_3^2 - p_3^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} - \tfrac{4}{3} = \frac{7+3\sqrt{5}}{6} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{12};$$

$$f_4^2 - p_4^2 = 3 - 2 = 1;$$

$$f_5^2 - p_5^2 = \frac{3(1+\sqrt{5})^2}{4} - \frac{10+2\sqrt{5}}{5} = \frac{50-22\sqrt{5}}{20}.$$

Bezeichnet man die Wurzel aus jedem dieser Ausdrücke mit w so erhält man:

$$w_1 = \tfrac{1}{6}\sqrt{6};$$

$$w_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{6};$$

$$w_3 = \frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{6};$$

$$w_4 = 1;$$

$$w_5 = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{50+22\sqrt{5}}{5}} = \tfrac{1}{10}\sqrt{5(50+22\sqrt{5})}.$$

Sogleich ist für jeden Fall $2P=av$.

§. 19. Anwendung des §. 14. oder der Formel für den Kubikinhalt.

Da ausser den bereits angeführten Grössen in den ersten drei Fällen immer $m=3$ und $g=a^2.\frac{\sqrt{3}}{4}$, im vierten $m=4$ und $g=a^2$ und im fünften $m=5$ und $g=a^2.\frac{1}{4}\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ ist, so erhält man zunächst für $S=\frac{4n}{2(n+m)-nm}$ in den einzelnen Fällen folgende Werthe:

$$S_1=\frac{4.3}{2(3+3)-3.3}=4;\quad S_2=\frac{4.4}{2(4+3)-4.3}=8;$$
$$S_3=\frac{4.5}{2(5+3)-5.3}=20;\quad S_4=\frac{4.3}{2(3+4)-3.4}=6;$$
$$S_5=\frac{4.3}{2(3+5)-3.5}=12.$$

Nun ist nach §. 14. $C=\frac{1}{6}.Sga\sqrt{\frac{a^2}{a^2-q^2}-\frac{4r^2}{a^2}}=\frac{1}{6}.S.w.g.a;$ also:

$$C_1=\tfrac{1}{6}.4.\frac{\sqrt{6}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{4}.a^3 \qquad =a^3.\tfrac{1}{12}\sqrt{2};$$
$$C_2=\tfrac{1}{6}.8.\frac{\sqrt{6}}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}.a^3 \qquad =a^3.\tfrac{1}{3}\sqrt{2};$$
$$C_3=\tfrac{1}{6}.20.\frac{(3+\sqrt{5})\sqrt{3}}{6}.\frac{\sqrt{3}}{4}.a^3 \qquad =a^3.\tfrac{5}{12}(3+\sqrt{5});$$
$$C_4=\tfrac{1}{6}.6.1.a^3 \qquad =a^3;$$
$$C_5=\tfrac{1}{6}.12.\frac{\sqrt{5(50+22\sqrt{5})}}{10}.\frac{\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}}{4}.a^3=a^3.\tfrac{1}{4}(15+7\sqrt{5}).$$

§. 20. Berechnung des Neigungswinkels zweier Grenzflächen.

Da in den ersten drei Fällen $\frac{1}{2\varrho}=\frac{1}{a}\sqrt{3}$, im vierten $\frac{1}{2\varrho}=\frac{1}{a}$ und im fünften $\frac{1}{2\varrho}=\frac{1}{a}\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ ist; so rechnet man äusserst bequem

$$\sec{}'\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{\mathfrak{X}}{\varrho}=2\mathfrak{X}.\frac{1}{2\varrho}=av.\frac{1}{2\varrho},$$

oder auch

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{P}{\varrho} = 2P \cdot \frac{1}{2\varrho} = a.w.\frac{1}{2\varrho}.$$

Man erhält:

$$\sec\tfrac{1}{2}\varphi_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_1 = \tfrac{1}{6}\sqrt{6}.\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2};$$

$$\sec\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \sqrt{3}, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_2 = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}.\sqrt{3} = \sqrt{2};$$

$$\sec\tfrac{1}{2}\varphi_3 = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\sqrt{3} \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_3 = \tfrac{1}{6}(3+\sqrt{5})\sqrt{3}.\sqrt{3} = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5})$$

$$\sec\tfrac{1}{2}\varphi_4 = \sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_4 = 1;$$

$$\left.\begin{aligned}\sec\tfrac{1}{2}\varphi_5 &= \tfrac{1}{4}(1+\sqrt{5})^2\sqrt{5-2\sqrt{5}}\\ &= \tfrac{1}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi_5 &= \tfrac{1}{10}\sqrt{5(50+22\sqrt{5})(5-2\sqrt{5})}\\ &= \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})\end{aligned}\right\}$$

Zur Probe findet man durchaus $\sec^2\frac{1}{2}\varphi - \operatorname{tg}^2\frac{1}{2}\varphi = 1$, so dass also die Werthe von v, w, sowie von f richtig sein müssen.

Anmerkung. Insofern die Berechnung von v nach §. 17. weniger Reductionen erfordert als die Berechnung von w nach §. 18, so ist jedenfalls $\sec\frac{1}{2}\varphi$ am bequemsten zu finden.

§. 21. Construction des Durchmessers der Kantenkugel.

Man sieht aus §. 17. und §. 18., dass der Durchmesser der Kantenkugel auf einen einfacheren Zahlenwerth führt, als die Durchmesser der beiden anderen Kugeln. Hieraus lässt sich auch darauf schliessen, dass dieser Durchmesser im Allgemeinen am leichtesten zu construiren ist. In der That geben aus den in §. 17. gefundenen Werthen von $2\mathfrak{X}$ folgende Sätze hervor, die sich auch einzeln für jeden Körper synthetisch und zwar ohne alle Schwierigkeit beweisen lassen:

1) Bei dem Tetraeder ist der Durchmesser $2\mathfrak{X}_1$ der kantenberührenden Kugel so gross wie die Kathete eines gleichschenklig-rechtwinkeligen Dreiecks, welches die Kante zur Hypotenuse hat.

2) Bei dem Octaeder ist $2\mathfrak{X}_2$ so gross wie die Kante.

3) Bei dem Ikosaeder ist die Grösse desselben Durchmessers bestimmt:

a) unmittelbar gemäss der Form $2\mathfrak{X}_3 = a.\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ durch die Diagonale eines regelmässigen Fünfecks, welches die Kante zur Seite hat, d. i. durch die Diagonale der Eckbasis;

b) nach der Form $2\mathfrak{X}_3 = \frac{1}{2}a(1+\sqrt{5})$ durch den Durchmesser eines regelmässigen Zehnecks, welches die halbe Kante zur Seite hat.

4) Bei dem Hexaeder ist $2\mathfrak{X}_4 =$ der Diagonale der Grenzfläche

5) Der Durchmesser der kantenberührenden Kugel bei dem Dodekaeder ist:

a) nach der Form $2\mathfrak{X}_5 = a.\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$ so gross wie die Diagonale eines regelmässigen Fünfecks, welches die Diagonale der Grenzfläche selbst wieder zur Seite hat, d. h. wie die Diagonale eines, parallel zu einer Seitenfläche geführten Schnittes, welcher durch die nächstliegenden Ecken geht;

b) nach der Form $2\mathfrak{X}_5 = \frac{a(1+\sqrt{5})}{4}.(1+\sqrt{5})$ so gross wie der Durchmesser eines regulären Zehnecks, welches die halbe Diagonale der Grenzfläche zur Seite hat, d. h. des in mehreren Lehrbüchern gebrauchten Schnittes, welcher durch den Mittelpunkt des Körpers parallel zu einer Seitenfläche geführt wird;

c) oder nach der, für die Construction bequemsten, Form $2\mathfrak{X}_5 = a(1+\frac{1+\sqrt{5}}{2})$ so gross wie die Summe aus der Kante und Diagonale der Grenzfläche.

Anmerkung. Wie leicht die andern beiden Kugelhalbmesser, sowie der halbe Neigungswinkel eines regulären Körpers durch Construction sich finden lassen, wenn $\mathfrak{X}$ bekannt ist, leuchtet von selbst ein.

§. 22. Anwendung ebener Trigonometrie auf obige Formeln.

Es sei γ der halbe Centriwinkel, α der halbe Polygonwinkel der Grenzfläche, hingegen δ der halbe Centriwinkel der Eckbasis, während die übrigen Buchstaben ihre Bedeutung behalten, so ist:

$$\gamma = \frac{\pi}{m}, \quad \alpha = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m}\right)\pi, \quad \delta = \frac{\pi}{n}.$$

Von der Grenzfläche ist:

$$r = \tfrac{1}{2}a.\mathrm{cosec}\,\gamma, \quad \varrho = \tfrac{1}{2}a.\mathrm{ctg}\,\gamma, \quad d = 2.a.\sin\alpha = 2a.\cos\gamma$$

die Zahl $p^2 = \frac{4r^2}{a^2} = \mathrm{cosec}^2\gamma$.

Von der Eckbasis ist:

$$q = \tfrac{1}{2}d.\mathrm{cosec}\,\delta = a.\sin\alpha.\mathrm{cosec}\,\delta = a.\cos\gamma.\mathrm{cosec}\,\delta$$

oder

$$\frac{q}{a} = \frac{\cos\gamma}{\sin\delta} = \frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}}.$$

Nun folgt weiter:

$$\text{I.}\quad f=\sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{q}{a}\right)^2}}=\frac{\sin\delta}{\sqrt{\sin^2\delta-\cos^2\gamma}}$$

$$=\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\pi\,.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}}.$$

Bekanntlich ist:

$R:\mathfrak{R}=a:q=\sin\delta:\cos\gamma$, also auch $f:v=\sin\delta:\cos\gamma$,

woher;

$$\text{II.}\quad v=\frac{\cos\gamma}{\sqrt{\sin^2\delta-\cos^2\gamma}}=\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sqrt{\cos\pi\,.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}}.$$

Ferner ist:

$$w^2=f^2-p^2=\frac{\sin^2\delta}{\sin^2\delta-\cos^2\gamma}-\frac{1}{\sin^2\gamma}=\operatorname{cotg}^2\gamma\cdot\frac{\cos^2\delta}{\sin^2\delta-\cos^2\gamma}$$

also

$$\text{III.}\quad w=\operatorname{cotg}\gamma\,.\frac{\cos\delta}{\sqrt{\sin^2\delta-\cos^2\gamma}}$$

$$=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}\,.\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\pi\,.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}}.$$

Nun sind die Durchmesser der drei Kugeln folgende:

$2R=a.f,\quad 2\mathfrak{R}=a.v$ und $2P=a.w.$

Der Inhalt einer Grenzfläche ist $=\frac{1}{4}ma^2.\operatorname{cotg}\gamma$. Daher:

$$\text{IV.}\quad O=\frac{mn}{2(n+m)-nm}a^2.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}$$

$$=\frac{1}{2\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)-1}.a^2.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}.$$

$$\text{V. } C=\tfrac{1}{6}.O.w.a=\tfrac{1}{6}\frac{mn}{2(n+m)-nm}.a^3.\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\pi.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}}$$

$$=\tfrac{1}{12}.\frac{1}{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{2}}.a^3.\frac{\operatorname{cotg}^2\frac{\pi}{m}.\cos\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\pi.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}}.$$

Anmerkung. Die Grössen $\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ und $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$ erleiden für Körper mit gleichnamigen Flächen und gleichviel-kantigen Ecken, umsomehr für reguläre Körper (§. 15.), folgende Beschränkungen:

$$\odot)\ \tfrac{1}{2}>\frac{1}{m}-\frac{1}{n}>-\frac{1}{2};$$

$$☽)\ 1>\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}.$$

Wegen ⊙) ist $\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)$ immer positiv, wegen ☽) ist $\cos\pi.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)$ ebenfalls immer positiv; daher

$$\sqrt{\cos\pi.\cos\left(\frac{\pi}{m}+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{\pi}{m}-\frac{\pi}{n}\right)}$$

eell, so lange namentlich die zweite Beschränkung statt findet, la die erste ohnedem da sein muss, wenn man überhaupt nur an ine Flächen- und Raumbegränzung denken will.

Die Verhältnisse zwischen den Kugelhalbmessern eines einzelnen Körpers ergeben sich in folgender Weise:

$$\text{VI. } \frac{P}{\mathfrak{R}}=\frac{w}{v}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\sin\frac{\pi}{m}},$$

$$\text{VII. } \frac{\mathfrak{R}}{R}=\frac{v}{f}=\frac{\cos\frac{\pi}{m}}{\sin\frac{\pi}{n}},$$

$$\text{VIII. } \frac{P}{R}=\frac{w}{f}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{m}.\operatorname{cotg}\frac{\pi}{n}.$$

Das Verhältniss VI. gibt zugleich $\sin\frac{1}{2}\varphi$.

Das Verhältniss VII. gibt den Sinus des Winkels zwischen dem Durchmesser der Eckenkugel und der Kante.

Das Verhältniss VIII. gibt den Sinus der Neigung vom Durchmesser der Eckenkugel zur Grenzfläche.

Weitere Betrachtungen dürften wohl hier nicht am Orte sein; wir überlassen sie daher dem Leser.

XVIII.

Ueber ein paar Doppelintegrale.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Unter den bestimmten Integralen, welche die Aufmerksamkeit der Analytiker mehrfach in Anspruch genommen haben, befindet sich eine ziemliche Reihe solcher, die unter den Formen

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\varphi(x)\,dx \text{ und } \int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}\psi(x)\,dx$$

stehen, und zwar sind dieselben desswegen von Interesse, weil es meistentheils nicht so leicht ist, convergente Reihen für ihre Berechnung aufzustellen. Es wird daher nicht ohne Interesse sein, wenn ich hier ein paar allgemeine Entwickelungen gebe, welche zeigen, dass sich die meisten jener Integrale aus den einfachsten Fällen $\varphi(x)=1$, $\psi(x)=x$, nämlich aus den sehr bekannten Formeln

$$\int_0^\infty \frac{\cos kx}{a^2+x^2}dx=\frac{\pi}{2k}e^{-ak}, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin kx}{a^2+x^2}x\,dx=\frac{\pi}{2}e^{-ak} \tag{2}$$

ableiten lassen.

Ich gehe von dem Doppelintegrale aus:

$$S=\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c f(t)\cos xt\,dt, \tag{3}$$

wenn sämmtliche Constanten als wesentlich positive Grössen angesehen werden und $f(t)$ eine beliebige, aber innerhalb der Grenzen $t=0$ bis $t=c$ endliche und continuirliche Funktion bezeichnet. Da unter diesen Voraussetzungen die Funktion zweier Variablen

$$\frac{\cos bx}{a^2+x^2}\cdot f(t)\cos xt$$

innerhalb der Integrationsgränzen $x=0$, $x=\infty$, $t=0$, $t=c$ ebenfalls endlich und stetig bleibt, so ist die Umkehrung der Integrationsfolge gestattet und demnach

$$S=\int_0^c f(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\cos bx\cos tx}{a^2+x^2}dx. \tag{4}$$

Man übersieht nun auf der Stelle, dass sich hier die Formel (1) anwenden lässt, sobald man das Cosinusprodukt in eine Cosinussumme zerlegt hat, aber man darf zugleich nicht übersehen, dass jene Formel ein wesentlich positives k voraussetzt, und diess nöthigt uns zu einer Unterscheidung. Ist nämlich erstlich $b>c$, so ist auch $b>t$ wegen der Integrationsgränzen für t, und mithin dürfen wir

$$\cos bx\cos tx=\tfrac{1}{2}\cos(b+t)x+\tfrac{1}{2}\cos(b-t)x$$

setzen, wo $b+t$ und $b-t$ zugleich positiv sind. Man bekommt dann unter Benutzung der Formel (1) für $k=b+t$ und $k=b-t$:

$$S=\int_0^c f(t)\,dt\left[\frac{\pi}{4a}e^{-a(b+t)}+\frac{\pi}{4a}e^{-a(b-t)}\right],$$

d. i. durch Vergleichung des ersten und letzten Werthes von S,

für $b>c$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c f(t)\cos xt\,dt\\ &=\frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^c [e^{at}+e^{-at}]f(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Ist zweitens $b<c$ (aber natürlich >0), so zerlege man das von 0 bis c gehende Integral in zwei andere, welche sich von 0 bis b und von b bis c erstrecken; es wird dann

$$S=\int_0^b f(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\cos bx\cos tx}{a^2+x^2}dx$$
$$+\int_b^c f(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\cos tx\cos bx}{a^2+x^2}dx.$$

Hier ist im ersten Doppelintegrale wegen der Integrationsgränzen 0 und b, zwischen denen t liegt, $b>t$ und mithin

$$\cos bx\cos tx=\tfrac{1}{2}\cos(b+t)x+\tfrac{1}{2}\cos(b-t)x;$$

im zweiten Doppelintegrale dagegen ist zufolge der Integratiogränzen b und c jederzeit $c > t > b$, und mithin muss man hi wo $t > b$ ist,

$$\cos tx \cos bx = \tfrac{1}{2}\cos(t+b)x + \tfrac{1}{2}\cos(t-b)x$$

setzen. Wendet man jetzt die Formel (1) an, so ergiebt sich der Steile

$$S = \int_0^b f(t)\,dt\left[\frac{\pi}{4a}e^{-a(b+t)} + \frac{\pi}{4a}e^{-a(b-t)}\right]$$

$$+\int_b^c f(t)\,dt\left[\frac{\pi}{4a}e^{-a(t+b)} + \frac{\pi}{4a}e^{-a(t-b)}\right],$$

und wenn man berücksichtigt, dass

$$\int_0^b f(t)dt\,e^{-a(b+t)} + \int_b^c f(t)dt\,e^{-a(t+b)}$$

$$= \int_0^c f(t)dt\,e^{-a(b+t)}$$

ist, so kann man hieraus die Form

$$S = \frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^c f(t)e^{-at}\,dt$$

$$+\frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^b f(t)\,e^{+at}\,dt + \frac{\pi}{4a}e^{+ab}\int_b^c f(t)\,e^{-at}\,dt$$

ableiten. Zerlegt man noch das dritte Integral in

$$\frac{\pi}{4a}e^{+ab}\left[\int_0^c f(t)e^{-at}\,dt - \int_0^b f(t)e^{-at}\,dt\right]$$

und vergleicht darauf die erste und letzte Form von S, so gelan man zu dem Theoreme:

für $b < c$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c f(t)\cos xt\,dt\\ &= \frac{\pi}{4a}(e^{+ab}+e^{-ab})\int_0^c e^{-at}f(t)\,dt\\ &-\frac{\pi}{4a}e^{+ab}\int_0^b e^{-at}f(t)dt + \frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^b e^{+at}f(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \;($$

Bevor wir Beispiele zu diesem nicht unwichtigen Satze gebe wollen wir erst ein Correlat dazu aufstellen.

Dasselbe ergiebt sich leicht, wenn man auf das Doppelintegı

$$S=\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}\partial x\int_0^c f(t)\sin xt dt \qquad (7)$$

ganz die vorigen Transformationen anwendet; der Unterschied besteht nur darin, dass man das in

$$S=\int_0^c f(t)\,dt\int_0^\infty \frac{\sin bx \sin tx}{a^2+x^2}dx$$

vorkommende Sinusprodukt in eine Cosinusdifferenz zerlegt, statt dass früher eine Cosinussumme vorkam. Man findet so ohne Schwierigkeit

für $b>c$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c f(t)\sin xt dt\\&=\frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^c [e^{at}-e^{-at}]f(t)\,dt;\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

ferner

für $b>c$:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c f(t)\sin xt dt\\&=\frac{\pi}{4a}(e^{+ab}-e^{-ab})\int_0^c e^{-at}f(t)\,dt\\&-\frac{\pi}{4a}e^{+ab}\int_0^b e^{-at}f(t)\,dt+\frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^b e^{+at}f(t)\,dt.\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Als erstes Beispiel benutzen wir die Substitution $f(t)=\frac{1}{t}$ in die Formeln (8) und (9); es wird dann

für $b>c$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}dx\int_0^c \frac{\sin xt}{t}dt$$

$$=\frac{\pi}{4a}e^{-ab}\left[\int_0^c \frac{dt}{t}e^{+at}-\int_0^c \frac{dt}{t}e^{-at}\right].$$

Setzt man links $xt=\tau$, so geht das nach t genommene Integral in

$$\int_0^{cx}\frac{\sin\tau}{\tau}d\tau=Si(cx)$$

über, wo Si den Integralsinus bezeichnet. Nimmt man ferner im ersten Integrale rechts $t=-\frac{u}{a}$, im zweiten $t=\frac{u}{a}$, so wird

$$\int_0^c \frac{dt}{t} e^{+at} - \int_0^c \frac{dt}{t} e^{-at}$$
$$= -\int_{-ac}^0 \frac{du}{u} e^{-u} - \int_0^{ac} \frac{du}{u} e^{-u} = -\int_{-ac}^{+ac} \frac{du}{u} e^{-u}$$
$$= \int_{ac}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} - \int_{-ac}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} = -li(e^{-ac}) + li(e^{+ac}),$$

und mittelst dieser Transformationen haben wir jetzt

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{a^2+x^2} Si(cx)\,dx = \frac{\pi}{4a} e^{-ab} \left[li(e^{+ac}) - li(e^{-ac})\right]$$
$$b > c.$$

Die Formel (9) dagegen giebt als Werth desselben Integ[rals] im Falle $b < c$:

$$\frac{\pi}{4a} e^{+ab} \left[\int_0^c \frac{dt}{t} e^{-at} - \int_0^b \frac{dt}{t} e^{-at}\right]$$
$$- \frac{\pi}{4a} e^{-ab} \left[\int_0^c \frac{dt}{t} e^{-at} - \int_0^b \frac{dt}{t} e^{+at}\right].$$

Hier geht die erste Integraldifferenz für $t = \frac{u}{a}$ über in

$$\int_0^{ac} \frac{du}{u} e^{-u} - \int_0^{ab} \frac{du}{u} e^{-u} = \int_{ab}^{ac} \frac{du}{u} e^{-u}$$
$$= \int_{ab}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} - \int_{ac}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} = -li(e^{-ab}) + li(e^{-ac}).$$

Die zweite Differenz verwandelt sich, wenn man im ersten I[nte]grale $t = \frac{u}{a}$, im zweiten $t = -\frac{u}{a}$ setzt, wie folgt:

$$\int_0^{ac} \frac{du}{u} e^{-u} + \int_{-ab}^0 \frac{du}{u} e^{-u} = \int_{-ab}^{ac} \frac{du}{u} e^{-u}$$
$$= \int_{-ab}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} - \int_{ac}^{\infty} \frac{du}{u} e^{-u} = -li(e^{+ab}) + li(e^{-ac}),$$

und vermöge dieser Transformationen wird jetzt

für $b < c$:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{a^2+x^2} Si(cx)\,dx$$
$$= \frac{\pi}{4a} \left[e^{-ab} li(e^{+ab}) - e^{+ab} li(e^{-ab})\right]$$
$$+ \frac{\pi}{4a} \left[e^{ab} - e^{-ab}\right] li(e^{-ac}).$$

Geht man noch zur Gränze für unendlich wachsende c über und erinnert sich, dass

$$\text{Lim}\, Si(cx) = Si(\infty) = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{Lim}\, li(e^{-ac}) = li(0) = 0$$

ist, so gelangt man zu der schon bekannten, für jedes positive a und b geltenden Formel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}\, dx = \frac{1}{2a}\left[e^{-ab}\, li(e^{+ab}) - e^{+ab}\, li(e^{-ab})\right].$$

Ein zweites bemerkenswerthes Beispiel liefert die Annahme $c=\infty$, $f(t)=t^{\mu-1}$, wobei die Formel

$$\int_0^\infty t^{\mu-1}\cos xt\, dt = \frac{\Gamma(\mu)\cos\frac{1}{2}\mu\pi}{x^\mu}, \quad 0<\mu<1$$

in Anwendung gebracht werden kann. Die Formel (6) giebt jetzt

$$\Gamma(\mu)\cos\tfrac{1}{2}\mu\pi \int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\cdot\frac{dx}{x^\mu}$$

$$= \frac{\pi}{4a}\left(e^{+ab}+e^{-ab}\right)\int_0^\infty t^{\mu-1}e^{-at}\, dt$$

$$-\frac{\pi}{4a}e^{+ab}\int_0^b t^{\mu-1}e^{-at}\, dt + \frac{\pi}{4a}e^{-ab}\int_0^b t^{\mu-1}e^{+at}\, dt.$$

Bezeichnen wir nun wie folgt:

$$\int_0^k u^{\mu-1}e^{+u}\, du = \Gamma_1(\mu, k),$$

$$\int_0^k u^{\mu-1}e^{-u}\, du = \Gamma_2(\mu, k);$$

so folgt für $u=at$, $k=ab$:

$$\int_0^b t^{\mu-1}e^{+at}\, dt = \frac{1}{a^\mu}\Gamma_1(\mu, ab),$$

$$\int_0^b t^{\mu-1}e^{-at}\, dt = \frac{1}{a^\mu}\Gamma_2(\mu, ab);$$

und so erhalten wir jetzt ohne Schwierigkeit

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\frac{dx}{x^\mu} = \frac{\pi}{4}\frac{e^{+ab}+e^{-ab}}{a^{\mu+1}}\sec\tfrac{1}{2}\mu\pi$$

$$+\frac{\pi}{4}\frac{\Gamma_1(\mu, ab)}{\Gamma(\mu)a^{\mu+1}}e^{-ab}\sec\tfrac{1}{2}\mu\pi - \frac{\pi}{4}\frac{\Gamma_2(\mu, ab)}{\Gamma(\mu)a^{\mu+1}}e^{+ab}\sec\tfrac{1}{2}\mu\pi,$$

wo man nun Γ_1 und Γ_2 leicht in convergirende Reihen verwandeln kann.

Die Formel (9) giebt in ähnlicher Weise

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}\frac{dx}{x^\mu}=\frac{\pi}{4}\frac{e^{+ab}-e^{-ab}}{a^{\mu+1}}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\mu\pi$$

$$+\frac{\pi}{4}\frac{\Gamma_1(\mu,ab)}{\Gamma(\mu)a^{\mu+1}}e^{-ab}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\mu\pi-\frac{\pi}{4}\frac{\Gamma_2(\mu,ab)}{\Gamma(\mu)a^{\mu+1}}e^{+ab}\operatorname{cosec}\tfrac{1}{2}\mu\pi.$$

Von besonderem Interesse ist der Fall $\mu=\frac{1}{2}$, wo $\Gamma(\mu)=\sqrt{\pi}$ wird; man hat dann

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{e^{+ab}+e^{-ab}}{4a\sqrt{a}}$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma_1(\frac{1}{2},ab)}{4a\sqrt{a}}e^{-ab}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma_2(\frac{1}{2},ab)}{4a\sqrt{a}}e^{+ab},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{a^2+x^2}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{e^{+ab}-e^{-ab}}{4a\sqrt{a}}$$

$$+\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma_1(\frac{1}{2},ab)}{4a\sqrt{a}}e^{-ab}-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot\frac{\Gamma_2(\frac{1}{2},ab)}{4a\sqrt{a}}e^{+ab}$$

Setzt man a^2, b^2, z^2, t^2 für a, b, x, u, so erhält man hieraus noch

$$\int_0^\infty \frac{\cos(b^2z^2)}{a^4+z^4}dz=\frac{\pi}{4a^3\sqrt{2}}[e^{(ab)^2}+e^{-(ab)^2}]$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3\sqrt{2}}e^{-(ab)^2}\int_0^{ab}dt\,e^{+t^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3\sqrt{2}}e^{+(ab)^2}\int_0^{ab}dt\,e^{-t^2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(b^2z^2)}{a^4+z^4}dz=\frac{\pi}{4a^3\sqrt{2}}[e^{(ab)^2}-e^{-(ab)^2}]$$

$$+\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3\sqrt{2}}e^{-(ab)^2}\int_0^{ab}dt\,e^{+t^2}-\frac{\sqrt{\pi}}{4a^3\sqrt{2}}e^{+(ab)^2}\int_0^{ab}dt\,e^{-t^2}.$$

Bemerkenswerth ist hier noch, dass die Differenz beider Integrale eine algebraische Grösse (im Sinne Abel's) darstellt.

XIX.

Untersuchungen über die Theoreme von Cotes und Moivre.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Es ist bekannt, wie man durch die Theorie der imaginären Form $\varrho(\cos\varphi+\sqrt{-1}\sin\varphi)$ zur Kenntniss der sämmtlichen imaginären Wurzeln der Gleichung $x^n+1=0$ oder $x^n-1=0$, und dadurch zur Zerlegung der Functionen x^n+1, x^n-1 in Factoren ersten Grades gelangt. Werden je zwei conjugirte imaginäre Factoren durch Multiplication zu einem reellen Factor zweiten Grades vereinigt, so erhält man eine Darstellung jener Functionen durch ein Product aus reellen Factoren des ersten und zweiten Grades. Diese Herleitung des Cotesischen Theorems ist zwar höchst einfach, aber, da sie auf imaginären Betrachtungen beruht, nichts weniger als elementar, weshalb eine Herleitung ohne Hülfe des Imaginären diesen Gegenstand dem Anfänger vielleicht zugänglicher machen dürfte; denn wenn es ihm auch keine Schwierigkeit macht, mit imaginären Formen zu rechnen, so versteht er damit doch noch nicht die Bedeutung derselben, wie wir überhaupt eine lichtvolle Theorie über das Wesen des Imaginären wohl noch zu erwarten haben. Die Darstellungsmethode, welche ich auf den Cotesischen Satz anwende, wird sich auch auf den Moivreschen Satz ausdehnen lassen; eine Herleitung des letztern ohne Hülfe des Imaginären ist übrigens von Göpel im VI. Bande des Archivs Seite 102. ff. bekannt gemacht.

§. 1.

Zerlegung der Function $X=x^n+1$.

Es sei $x^2-\alpha x+\beta$ ein trinomischer Divisor der Function x^n+1, der sich nicht in einfache reelle Factoren zerlegen lässt; dann muss, wie aus der Gleichung $x^2-\alpha x+\beta=(x-\frac{1}{2}\alpha)^2-(\frac{1}{4}\alpha^2-\beta)$

hervorgeht, β positiv und zugleich $\frac{1}{4}\alpha^2 < \beta$ sein. Um α un bestimmen, setze man

$$\frac{x^n+1}{x^2-\alpha x+\beta}=x^{n-2}+A_1x^{n-3}+A_2x^{n-4}+\ldots+A_{n-3}x+A$$

multiplicire zu beiden Seiten mit dem Nenner linker Hand, rechter Hand nach absteigenden Potenzen von x und ide beide Seiten der Gleichung; dann erhält man folgende Rela

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha,\\
A_2 &= \alpha A_1-\beta,\\
A_3 &= \alpha A_2-\beta A_1,\\
&\ldots\ldots\\
A_{n-2} &= \alpha A_{n-3}-\beta A_{n-4},\\
0 &= \alpha A_{n-2}-\beta A_{n-3},\\
1 &= \qquad \beta A_{n-2}.
\end{aligned}$$

Der Coefficient β lässt sich sogleich bestimmen, wenn zwischen je zwei auf einander folgenden Relationen elimini kommt nämlich:

$$\begin{aligned}
A_1^2-A_2 &= \beta,\\
A_2^2-A_1A_3 &= \beta(A_1^2-A_2) = \beta^2,\\
A_3^2-A_2A_4 &= \beta(A_2^2-A_1A_3) = \beta^3,\\
&\ldots\ldots\\
A^2_{n-3}-A_{n-4}A_{n-2} &= \beta^{n-3},\\
A^2_{n-2} &= \beta^{n-2},\\
1=\beta^2A^2_{n-2} &= \beta^n.
\end{aligned}$$

In Folge der letzten Gleichung muss $\beta=1$ sein, wen gerade; wenn n aber gerade, so kann es zwar sowohl $=-1$ sein, indessen hat man auch hier $\beta=1$ zu nehmen nach dem Obigen positiv ist. Es ist also $\beta=1$, folglich der Gleichung $\beta A_{n-2}=1$ auch $A_{n-2}=1$. Eliminirt man nu A_{n-2} aus den obigen Gleichungen, so erhält man

$$(1)\quad \frac{x^n+1}{x^2-\alpha x+1}=x^{n-2}+A_1x^{n-3}+A_2x^{n-4}+\ldots+A_{n-3}x+$$

$$(2)\left\{\begin{aligned}
A_1 &= \alpha,\\
A_2 &= \alpha A_1-1,\\
A_3 &= \alpha A_2-A_1,\\
&\ldots\ldots\\
A_{n-3} &= \alpha A_{n-4}-A_{n-5},\\
1 &= \alpha A_{n-3}-A_{n-4},\\
0 &= \alpha.1-A_{n-3}.
\end{aligned}\right.$$

Bestimmt man aus diesen Relationen rückwärts A_{n-3}, A_{n-4}, A_{n-5}, etc., so erhält man leicht

$$A_{n-3}=A_1,\ A_{n-4}=A_2,\ A_{n-5}=A_3,\ \text{u. s. w.},$$

und in der Reihe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots A_{n-5},\ A_{n-4},\ A_{n-3}$$

sind folglich je zwei von den Enden gleichweit abstehende Coefficienten einander gleich. Auch liegt dies ganz in der Natur der Sache; denn wenn man in (1) $x=\frac{1}{y}$ setzt, so findet man

$$\frac{y^n+1}{y^2-\alpha y+1}=y^{n-2}+A_{n-3}y^{n-3}+A_{n-4}y^{n-4}+\ldots+A_2y^2+A_1y+1,$$

und die Vergleichung dieser Relation mit (1) führt unmittelbar zu der im Vorhergehenden angezeigten Gleichheit der Coefficienten.

Die unmittelbare Bestimmung der Grössen $A_1, A_2, A_3,\ldots A_{n-3}$, α aus den Relationen (2) durch gewöhnliche Substitution führt uns jedenfalls zu einer höhern Gleichung; es lassen sich aber independente Ausdrücke für dieselben finden, wenn man $\alpha=2\cos\varphi$ setzt, was jedenfalls erlaubt ist, da nach dem Vorhergehenden $\frac{1}{4}\alpha^2<1$, folglich $\alpha^2<4$, und der absolute Werth von α kleiner als 2 ist.

Die Benutzung der bekannten Formel

$$\sin(n+1)\varphi=2\cos\varphi\sin n\varphi-\sin(n-1)\varphi$$

giebt nach und nach

$$(3)\quad\left\{\begin{aligned}
A_1&=2\cos\varphi=\frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi},\\
A_2&=\frac{2\cos\varphi\sin 2\varphi-\sin\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi},\\
A_3&=\frac{2\cos\varphi\sin 3\varphi-\sin 2\varphi}{\sin\varphi}=\frac{\sin 4\varphi}{\sin\varphi},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{n-3}&=\frac{\sin(n-2)\varphi}{\sin\varphi},\\
1&=\frac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi},\\
0&=\alpha.1-A_{n-3}=\frac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}.
\end{aligned}\right.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen ergiebt sich der Winkel φ, nämlich

$$(4)\quad \varphi=\frac{2k+1}{n}\pi,$$

wo k eine absolute ganze Zahl bedeutet. Die Rechnung giebt übrigens $\varphi = \pm \frac{2k+1}{n}\pi$, indessen hat das Vorzeichen auf $\cos\varphi$ keinen Einfluss, weshalb es weggelassen werden darf. Somit wissen wir jetzt, dass die trinomische Form

$$(5) \quad x^2 - 2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi + 1$$

ein Divisor der Function $x^n + 1$ ist, und kennen zugleich die dem Quotienten $\frac{x^n+1}{x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi+1}$ gleiche ganze Function von x, wobei noch zu bemerken, dass der Zähler in dem Ausdrucke von A_{p-1}, nämlich $\sin p\varphi = \sin\frac{2k+1}{n}p\pi$ am zweckmässigsten auf die einfachste Form gebracht wird. Um dies zu bewerkstelligen, sei ϑ der bei der gewöhnlichen Division mit n in $(2k+1)p$ bleibende Rest, so dass $(2k+1)p = qn + \vartheta$ und $\vartheta < n$; dann wird

$$\sin\frac{2k+1}{n}p\pi = \sin(q\pi + \frac{\vartheta\pi}{n}) = (-1)^q \sin\frac{\vartheta\pi}{n}.$$

Sollte $\vartheta > \frac{1}{2}n$ sein, so kann man auch $\sin\frac{(n-\vartheta)\pi}{n}$ statt $\sin\frac{\vartheta\pi}{n}$ nehmen, wo dann $n - \vartheta < \frac{1}{2}n$ ist.

Aus dem Ausdruck (5), in welchem k eine beliebige absolute ganze Zahl ist, sieht man, dass es mehrere verschiedene trinomische Divisoren von $x^n + 1$ giebt. Diese sämmtlichen Divisoren sind, wie leicht erhellet,

$$x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1,\ x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1, \ldots x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1$$

für ein gerades n, und

$$x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1,\ x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1, \ldots x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1$$

für ein ungerades n, die Anzahl derselben also im ersten Falle gleich $\frac{n}{2}$, im andern gleich $\frac{n-1}{2}$.

Demnächst ist nun die Zerlegung von $x^n + 1$ in Factoren leicht zu bewerkstelligen, wenn man nur folgenden Satz von den ganzen Functionen berücksichtigt: „Wenn, indem Z, Z', N ganze Functionen mit reellen Coefficienten bedeuten, die Bruchform $\frac{ZZ'}{N}$ eine ganze Function ist, und N und Z eine Constante zum grössten gemeinen Maasse haben, so muss $\frac{Z'}{N}$ eine ganze Function sein."

Dieser Satz, dessen Beweis ich hier übergehen darf, findet Anwendung auf das Obige.

Zuerst sei $X = x^n + 1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)X_1$, wo X_1 eine ganze Function vom $(n-2)$ten Grade ist; nun ist das Product rechter Hand durch $x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1$ theilbar, folglich X_1 durch diesen Factor theilbar. Man kann also $X_1 = (x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1)X_2$ setzen, und erhält dadurch

$$X = (x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1)X_2,$$

wo X_2 eine ganze Function vom $(n-4)$ten Grade ist. Diese Zerlegung lässt sich für ein gerades n offenbar so weit fortsetzen, bis der letzte Factor eine Constante wird, und diese muss $=1$ sein, da das höchste Glied in X die Einheit zum Coefficienten hat. Ist n ungerade, so setzt man die Zerlegung fort, bis man auf eine ganze Function des ersten Grades kommt, von der Form $x+m$, und zeigt dann leicht, dass $x+m = x+1$ sein muss. Daher hat man

$$x^n+1 = (x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1)\ldots\ldots(x^2 - 2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + 1)$$

für ein gerades n, und

$$x^n+1 = (x+1)(x^2 - 2x\cos\frac{\pi}{n} + 1)(x^2 - 2x\cos\frac{3\pi}{n} + 1)\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots(x^2 - 2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n} + 1)$$

für ein ungerades n.

§. 2.

Zerlegung der Function $X = x^n - 1$.

Man setze, um die reellen Divisoren zweiten Grades zu finden,

$$\frac{x^n - 1}{x^2 - \gamma x + \delta} = x^{n-2} + B_1 x^{n-3} + B_2 x^{n-4} + \ldots\ldots + B_{n-3}x + B_{n-2},$$

und bilde daraus die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
B_1 &= \gamma, \\
B_2 &= \gamma B_1 - \delta, \\
B_3 &= \gamma B_2 - \delta B_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
B_{n-2} &= \gamma B_{n-3} - \delta B_{n-4}, \\
0 &= \gamma B_{n-2} - \delta B_{n-3}, \\
-1 &= \delta B_{n-2}.
\end{aligned}$$

Man erhält ähnlich wie in §. 1.

$$\begin{aligned}
B_1^2 \quad &- B_2 = \delta, \\
B_2^2 \quad &- B_1 B_3 = \delta(B_1^2 - B_2) = \delta^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B^2_{n-3} &- B_{n-4} B_{n-2} = \delta^{n-3}, \\
B^2_{n-2} &= \delta^{n-2}, \\
1 &= \delta^2 B^2_{n-2} = \delta^n;
\end{aligned}$$

folglich, da δ positiv ist, $\delta = 1$; ferner, wegen der Relation $-1 = \delta B_{n-2}$, $B_{n-2} = -1$; mithin

$$1)\quad \frac{x^n - 1}{x^2 - \gamma x + 1} = x^{n-2} + B_1 x^{n-3} + B_2 x^{n-4} + \ldots + B_{n-3} x - 1,$$

$$2)\quad \begin{cases}
B_1 \quad = \gamma, \\
B_2 \quad = \gamma B_1 - 1, \\
B_3 \quad = \gamma B_2 - B_1, \\
\ldots\ldots\ldots \\
B_{n-3} = \gamma B_{n-4} - B_{n-5}, \\
-1 \quad = \gamma B_{n-3} - B_{n-4}, \\
\;\;0 \quad = \gamma . -1 - B_{n-3}.
\end{cases}$$

Bestimmt man rückwärts B_{n-3}, B_{n-4}, ..., so erhält man leicht

$$B_{n-3} = -B_1, \; B_{n-4} = -B_2, \; B_{n-5} = -B_3, \text{ etc.},$$

und in der Reihe

$$B_1, B_2, B_3, \ldots. B_{n-5}, B_{n-4}, B_{n-3}$$

ist folglich die Summe von je zwei von den Enden gleich weit abstehenden Gliedern gleich Null. Dies erhellet übrigens auch leicht dadurch, dass man die Gleichung 1) durch die Substitution $x = \frac{1}{y}$ transformirt.

Setzt man nun $\gamma = 2\cos\psi$, was erlaubt ist, so erhält man, wie in §. 1., nach und nach

$$3)\quad \begin{cases}
B_1 \quad = \dfrac{\sin 2\psi}{\sin\psi}, \\
B_2 \quad = \dfrac{\sin 3\psi}{\sin\psi}, \\
\ldots\ldots \\
B_{n-3} = \dfrac{\sin(n-2)\psi}{\sin\psi}, \\
-1 \quad = \dfrac{\sin(n-1)\psi}{\sin\psi}, \\
\;\;0 \quad = \dfrac{\sin n\psi}{\sin\psi};
\end{cases}$$

und aus den beiden letzten Gleichungen

$$4)\quad \psi=\frac{2k\pi}{n},$$

wo k eine absolute ganze Zahl mit Ausschluss der Null bedeutet. Die trinomischen Divisoren von x^n-1, welche in der Form

$$5)\quad x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1$$

begriffen sind, werden also sein

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1,\ x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1,\ldots.\ x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1$$

für ein ungerades n, und

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1,\ x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1,\ldots.\ x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1$$

für ein gerades n.

Beachtet man nun, dass im ersten Falle die binomische Form $x-1$, im andern die beiden binomischen Formen $x-1$, $x+1$ Divisoren von x^n-1 sind, so wird man leicht folgende Zerlegung erhalten:

$$x^n-1=(x-1)(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1)\ldots.$$
$$\ldots.(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1)$$

für ein ungerades n, und

$$x^n-1=(x-1)(x+1)(x^2-2x\cos\frac{2x}{n}+1)(x^2-2x\cos\frac{4\pi}{n}+1)\ldots.$$
$$\ldots.(x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+1)$$

für ein gerades n.

§. 3.

Setzt man in den Gleichungen (1) und 1) für die darin vorkommenden Grössen ihre Werthe, so erhält man zwei Formeln, welche in einer bekannten Formel als specielle Fälle enthalten sind. Diese Formel ist nämlich folgende:

$$\sin\vartheta+x\sin2\vartheta+x^2\sin3\vartheta+\ldots.+x^{n-2}\sin(n-1)\vartheta$$
$$=\frac{\sin\vartheta-x^{n-1}\sin n\vartheta+x^n\sin(n-1)\vartheta}{x^2-2x\cos\vartheta+1}.$$

Dieselbe geht nach einfachen Reductionen in (1) oder 1) über, jenachdem man $\vartheta=\frac{(2k+1)\pi}{n}$, oder $\vartheta=\frac{2k\pi}{n}$ setzt. Die vorhergehende allgemeine Gleichung, deren Herleitung ohne Hülfe des Imaginären aber wohl nicht ganz einfach sein dürfte, kann also ebenfalls zum Nachweis dienen, dass $x^2-2x\cos\frac{2k+1}{n}\pi x+1$, $x^2-2x\cos\frac{2k\pi}{n}+1$ resp. Divisoren von x^n+1, x^n-1 sind.

§. 4.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich die Lösung folgender Aufgabe:

Man soll in dem allgemeinen Ausdrucke der trinomischen Factoren

$$x^2-\alpha x+1 \text{ oder } x^2-\gamma x+1$$

von x^n+1 oder x^n-1 die sämmtlichen Werthe von α oder γ durch eine Gleichung darstellen.

In Bezug auf die Function x^n+1 muss diese Gleichung vom $\left(\frac{n}{2}\right)$ten oder vom $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ten Grade sein, jenachdem n gerade oder ungerade; in Bezug auf die Function x^n-1 aber wird sie vom $\left(\frac{n-2}{2}\right)$ten oder vom $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ten Grade sein, jenachdem n gerade oder ungerade ist.

Bestimmt man mittelst der Relationen (2) die Coefficienten A_1, A_2, A_3,.... durch gewöhnliche Substitution, so findet man

$$\begin{aligned}
A_1&=\alpha,\\
A_2&=\alpha^2-1,\\
A_3&=\alpha^3-2\alpha,\\
A_4&=\alpha^4-3\alpha^2+1,\\
A_5&=\alpha^5-4\alpha^3+3\alpha,\\
A_6&=\alpha^6-5\alpha^4+6\alpha^2-1,
\end{aligned}$$

u. s. w.

Der Gang der Entwickelung zeigt, dass bei diesen Werthen die Vorzeichen der Glieder abwechseln, und die Exponenten von α stets um 2 abnehmen; der Geübte wird ferner auch das Gesetz entdecken, welches die numerischen Coefficienten der Glieder befolgen. Es ist nämlich allgemein

$$[1]\quad A_p=\alpha^p-(p-1)_1\alpha^{p-2}+(p-2)_2\alpha^{p-4}-(p-3)_3\alpha^{p-6}+\ldots,$$

die Reihe so weit fortgesetzt, bis sie von selbst abbricht. Diese

Richtigkeit dieser Gleichung kann a posteriori durch die Bernoullische Schlussweise dargethan werden. Für $\alpha = 2\cos\varphi$ war aber nach der obigen Entwickelung $A_p = \frac{\sin(p+1)\varphi}{\sin\varphi}$, folglich hat man die Gleichung

$$[2]\ \frac{\sin(p+1)\varphi}{\sin\varphi} = \alpha^p - (p-1)_1\,\alpha^{p-2} + (p-2)_2\,\alpha^{p-4} - (p-3)_3\,\alpha^{p-6} + \ldots,$$

wo $\alpha = 2\cos\varphi$ ist.

Diese Gleichung, nach welcher die Function linker Hand nach den Potenzen von $2\cos\varphi$ entwickelt wird, ist bekannt. Man gelangt zu eben dieser Gleichung, wenn man von den Relationen 2) ausgeht und dann $\gamma = 2\cos\psi$ setzt. Für $p = \frac{n-2}{2}$, wo n gerade, wird nun in [2] $\sin(p+1)\varphi = \sin\frac{n}{2}\varphi$, und dieser Ausdruck verschwindet für $\varphi = \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots \frac{(n-2)\pi}{n}$, weshalb die sämmtlichen Werthe von α in dem trinomischen Factor $x^2 - \alpha x + 1$ von $x^n - 1$ durch folgende Gleichung vom $\left(\frac{n-2}{2}\right)$ten Grade dargestellt werden:

$$[3]\ \alpha^{\frac{n-2}{2}} - \left(\frac{n-2}{2} - 1\right)_1 \alpha^{\frac{n-2}{2}-2}$$

$$+ \left(\frac{n-2}{2} - 2\right)_2 \alpha^{\frac{n-2}{2}-4} - \left(\frac{n-2}{2} - 3\right)_3 \alpha^{\frac{n-2}{2}-6} + \ldots = 0,$$

wo n eine gerade Zahl ist.

Für $n = 10$ z. B. ist diese Gleichung $\alpha^4 - 3\alpha^2 + 1 = 0$, und ihre Wurzeln sind $2\cos\frac{1}{5}\pi$, $2\cos\frac{2}{5}\pi$, $2\cos\frac{3}{5}\pi$, $2\cos\frac{4}{5}\pi$. Die Auflösung der biquadratischen Gleichung giebt

$$\alpha = \pm\sqrt{(\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5})},$$

und folglich

$$2\cos\tfrac{1}{5}\pi = \sqrt{(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\quad \cos\tfrac{1}{5}\pi = 0{,}809;$$

$$2\cos\tfrac{2}{5}\pi = \sqrt{(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\quad \cos\tfrac{2}{5}\pi = 0{,}309;$$

$$2\cos\tfrac{3}{5}\pi = -\sqrt{(\tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\quad \cos\tfrac{3}{5}\pi = -0{,}309;$$

$$2\cos\tfrac{4}{5}\pi = -\sqrt{(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\quad \cos\tfrac{4}{5}\pi = -0{,}809.$$

Um die Gleichung zu finden, deren Wurzeln die Werthe von α in dem der Function $x^n + 1$ zugehörigen Ausdrucke für ein gerades n sind, beachte man, dass $A_p - A_{p-2} = \frac{\sin(p+1)\varphi - \sin(p-1)\varphi}{\sin\varphi} = 2\cos p\varphi$, folglich, für A_p, A_{p-2} ihre Werthe aus [1] gesetzt, wie man leicht findet,

$$[4]\ 2\cos p\varphi = \alpha^p - p\alpha^{p-2} + \tfrac{1}{2}p(p-3)_1\,\alpha^{p-4} - \tfrac{1}{3}p(p-4)_2\,\alpha^{p-6} + \ldots$$

Für $p=\frac{n}{2}$, wo n gerade, wird $\cos p\varphi=\cos\frac{n}{2}\varphi$, und diese Function verschwindet für $\varphi=\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-1)\pi}{n}$; folglich hat die Gleichung

$$[5]\ \alpha^{\frac{n}{2}}-\frac{n}{2}\alpha^{\frac{n}{2}-2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-3\right)_1\alpha^{\frac{n}{2}-4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-4\right)_2\alpha^{\frac{n}{2}-6}+\ldots=0$$

die Wurzeln

$$2\cos\frac{\pi}{n},\ 2\cos\frac{3\pi}{n},\ 2\cos\frac{5\pi}{n},\ldots 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

für ein gerades n.

Es sei z. B. $n=10$. Die Gleichung ist $\alpha^5-5\alpha^3+5\alpha=0$, oder $\alpha(\alpha^4-5\alpha^2+5)=0$, und ihre Wurzeln sind:

$$\begin{aligned}
2\cos\tfrac{1}{10}\pi &= \sqrt{(\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\\
2\cos\tfrac{3}{10}\pi &= \sqrt{(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\\
2\cos\tfrac{5}{10}\pi &= 0,\\
2\cos\tfrac{7}{10}\pi &= -\sqrt{(\tfrac{5}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5})},\\
2\cos\tfrac{9}{10}\varphi &= -\sqrt{(\tfrac{5}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})}.
\end{aligned}$$

Ist ferner n ungerade, so ist nach dem Obigen $A_{\frac{n-3}{2}}=A_{\frac{n-1}{2}}$; die Gleichung $A_{\frac{n-1}{2}}-A_{\frac{n-3}{2}}=0$ wird nach [1] vom $\left(\frac{n-1}{2}\right)$ten Grade, und sie wird daher alle Werthe von α in dem der Function x^n+1 zugehörenden trinomischen Factor enthalten. In der That wird $A_{\frac{n-1}{2}}-A_{\frac{n-3}{2}}=\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi-\sin\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\varphi}=\dfrac{\cos\frac{n}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi}$, und dieser Ausdruck verschwindet für $\varphi=\frac{\pi}{n}, \frac{3\pi}{n}, \ldots \frac{(n-2)\pi}{n}$. Die Wurzeln der Gleichung

$$[6]\ \left.\begin{aligned}
&\alpha^{\frac{n-1}{2}}-\left(\frac{n-1}{2}-1\right)_1\alpha^{\frac{n-1}{2}-2}+\left(\frac{n-1}{2}-2\right)_2\alpha^{\frac{n-1}{2}-4}-\ldots\\
&-\alpha^{\frac{n-1}{2}-1}+\left(\frac{n-3}{2}-1\right)_1\alpha^{\frac{n-1}{2}-3}-\left(\frac{n-3}{2}-2\right)_2\alpha^{\frac{n-1}{2}-5}+\ldots
\end{aligned}\right\}=0$$

sind folglich

$$2\cos\frac{\pi}{n},\ 2\cos\frac{3\pi}{n},\ 2\cos\frac{5\pi}{n},\ldots 2\cos\frac{(n-2)\pi}{n},$$

wenn n ungerade.

Für $n=5$ z. B. ist die Gleichung $\alpha^2-\alpha-1=0$, und ihre Wurzeln sind

$$2\cos\tfrac{1}{5}\pi=\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$
$$2\cos\tfrac{3}{5}\pi=\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Diese Ausdrücke eignen sich übrigens am besten zur geometrischen Eintheilung des Kreisumfangs in 10 gleiche Theile.

Für $n=7$ ist $\alpha^3-\alpha^2-2\alpha+1=0$, und die Wurzeln sind $2\cos\frac{1}{7}\pi$, $2\cos\frac{3}{7}\pi$, $2\cos\frac{5}{7}\pi$.

Endlich ist für die Function x^n-1 nach dem Obigen

$$B_{\frac{n-1}{2}}+B_{\frac{n-3}{2}}=0;\ \text{ferner}\ B_{\frac{n-1}{2}}+B_{\frac{n-3}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi+\sin\frac{n-1}{2}\varphi}{\sin\varphi}$$
$$=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi},$$

und die Gleichung

$$[7]\quad \left.\begin{aligned} &\alpha^{\frac{n-1}{2}}-\left(\tfrac{n-1}{2}-1\right)_1\alpha^{\frac{n-1}{2}-2}+\left(\tfrac{n-1}{2}-2\right)_2\alpha^{\frac{n-1}{2}-4}-\ldots\\ &+\alpha^{\frac{n-1}{2}-1}-\left(\tfrac{n-3}{2}-1\right)_1\alpha^{\frac{n-1}{2}-3}+\left(\tfrac{n-3}{2}-2\right)_2\alpha^{\frac{n-1}{2}-5}-\ldots\end{aligned}\right\}=0$$

hat folglich die Wurzeln

$$2\cos\frac{2\pi}{n},\ 2\cos\frac{4\pi}{n},\ldots 2\cos\frac{(n-1)\pi}{n},$$

wenn n ungerade.

Z. B. für $n=5$ kommt die Gleichung $\alpha^2+\alpha-1=0$, deren Wurzeln

$$2\cos\tfrac{2}{5}\pi=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5},$$
$$2\cos\tfrac{4}{5}\pi=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

§. 5.

Ueber den Moivreschen Satz.

Moivre hat den Cotesischen Lehrsatz auf die dreitheilige Function $x^{2n}-2px^n+q$ erweitert (s. Miscellanea Analytica. p. 22. 23.). Für $x^n=y$ geht diese Function über in die folgende $y^2-2py+q=(y-p)^2-(p^2-q)$, welche, wenn q negativ, oder wenn q positiv und zugleich $p^2>q$ ist, sich in die reellen einfachen Factoren $y-p+\sqrt{p^2-q}$, $y-p-\sqrt{p^2-q}$ zerlegt. Ist also p^2-q eine positive Grösse, so hat die Function $x^{2n}-2px^n+q$

die reellen Factoren $x^n-(p-\sqrt{p^2-q})$, $x^n-(p+\sqrt{p^2-q}$ welche nach dem Vorhergehenden leicht in reelle binomische und trinomische Factoren zerlegt werden.

Wenn nun aber q positiv, $p^2<q$, also $\sqrt{p^2-q}$ imaginär, sei $x=q^{\frac{1}{2n}}z$, also

$$x^{2n}-2px^n+q=qz^{2n}-2pq^{\frac{1}{2}}z^n+q=q(z^{2n}-\frac{2p}{\sqrt{q}}z^n+1);$$

man setze ferner $\frac{p}{\sqrt{q}}=\cos g$, was wegen $p^2<q$ stets erlaubt is so kommt $x^{2n}-2px^n+q=q(z^{2n}-2\cos gz^n+1)$, und wir habe uns also mit der Function

$$X=x^{2n}-2\cos gx^n+1$$

zu beschäftigen.

Es sei $x^2-\alpha x+\beta$ ein trinomischer Divisor der Function, dass β positiv und $\frac{1}{4}\alpha^2<\beta$ ist, und man setze

$$\frac{x^{2n}-2\cos gx^n+1}{x^2-\alpha x+\beta}$$

$$=x^{2n-2}+A_1x^{2n-3}+A_2x^{2n-4}+\ldots+A_{2n-3}x+A_{2n-2}.$$

Man erhält hier folgende Relationen zwischen den unbestimmten Coefficienten:

$$\begin{aligned}
A_1 &= \alpha,\\
A_2 &= \alpha A_1-\beta,\\
A_3 &= \alpha A_2-\beta A_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{n-1} &= \alpha A_{n-2}-\beta A_{n-3},\\
A_n &= \alpha A_{n-1}-\beta A_{n-2}-2\cos g,\\
A_{n+1} &= \alpha A_n-\beta A_{n-1},\\
A_{n+2} &= \alpha A_{n+1}-\beta A_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A_{2n-2} &= \alpha A_{2n-3}-\beta A_{2n-4},\\
0 &= \alpha A_{2n-2}-\beta A_{2n-3},\\
1 &= \beta A_{2n-2}.
\end{aligned}$$

Nun lässt sich zunächst der Werth von β dadurch finden, d man, die Relationen von Unten nach Oben hin benutzend, Grössen A_{2n-2}, A_{2n-3}, A_{2n-4},.... successiv bestimmt. Es kom nämlich

$$A_{2n-2}=\frac{1}{\beta},$$

$$A_{2n-3}=\frac{\alpha A_{2n-2}}{\beta}=\frac{\alpha}{\beta^2}=\frac{A_1}{\beta^2},$$

$$A_{2n-4}=\frac{\alpha A_{2n-3}}{\beta}-\frac{A_{2n-2}}{\beta}=\frac{\alpha A_1-\beta}{\beta^3}=\frac{A_2}{\beta^3},$$

$$A_{2n-5}=\frac{\alpha A_{2n-4}}{\beta}-\frac{A_{2n-3}}{\beta}=\frac{\alpha A_2-\beta A_1}{\beta^4}=\frac{A_3}{\beta^4},\quad \text{u. s. w.}$$

Auf diese Weise kommt man zuletzt auf die Gleichung

$$A_{n-1}=\frac{A_{n-1}}{\beta^n},\ \text{oder}\ A_{n-1}(\beta^n-1)=0,$$

folglich $\beta^n-1=0$, daher, weil β positiv ist, $\beta=1$. Wegen der Gleichung $1=\beta A_{2n-2}$ ist daher auch $A_{2n-2}=1$. Eliminirt man jetzt β, A_{2n-2} aus den obigen Gleichungen, so erhält man

$$(a)\quad \frac{x^{2n}-2\cos gx^n+1}{x^2-\alpha x+1}=x^{2n-2}+A_1x^{2n-3}+A_2x^{2n-4}+\ldots+A_{2n-3}x+1,$$

$$(b)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1\ \ =\alpha, \\ A_2\ \ =\alpha A_1-1, \\ A_3\ \ =\alpha A_2-A_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1}=\alpha A_{n-2}-A_{n-3}, \\ A_n\ \ =\alpha A_{n-1}-A_{n-2}-2\cos g, \\ A_{n+1}=\alpha A_n-A_{n-1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \quad 1=\alpha A_{2n-3}-A_{2n-4}, \\ \quad 0=\alpha.1-A_{2n-3}; \end{array}\right.$$

ferner $A_1=A_{2n-3}$, $A_2=A_{2n-4}$, ... $A_{n-2}=A_n$; d. h. es sind in der Reihe

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ldots A_{2n-5},\ A_{2n-4},\ A_{2n-3}$$

je zwei von den Enden gleich weit abstehende Glieder einander gleich. Um diese Coefficienten, so wie α zu bestimmen, setzen wir $\alpha=2\cos\varphi$; dann erhalten wir zuerst wie bei dem Cotesischen Lehrsatze:

$$(c)\quad \left\{\begin{array}{l} A_1\ \ =\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}, \\ A_2\ \ =\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{n-1}=\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}; \end{array}\right.$$

$$(d)\begin{cases} A_n = \dfrac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g, \\ A_{n+1} = \dfrac{\sin(n+2)\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g\dfrac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}, \\ A_{n+2} = \dfrac{\sin(n+3)\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g\dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{2n-3} = \dfrac{\sin(2n-2)\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g\dfrac{\sin(n-2)\varphi}{\sin\varphi}, \end{cases}$$

$$(e)\begin{cases} 1 = \dfrac{\sin(2n-1)\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g\dfrac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}, \\ 0 = \dfrac{\sin 2n\varphi}{\sin\varphi} - 2\cos g\dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi}. \end{cases}$$

Die letzte Gleichung reducirt sich auf

$$(f)\quad \cos n\varphi - \cos g = 0,$$

und da in Folge dieser Gleichung auch die vorletzte der Gleichungen (e) erfüllt wird, wie man leicht findet, so kann φ aus (f) bestimmt werden, und es folgt daraus, dass

$$\frac{x^{2n} - 2\cos n\varphi x^n + 1}{x^2 - 2\cos\varphi x + 1}$$

stets eine ganze Function ist. Auch hat man für die letztere folgenden Ausdruck:

$$x^{2n-2} + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x^{2n-3} + \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}x^{2n-4} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}x^2 + \frac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}x + 1.$$

Löst man jetzt die Gleichung (f) auf, so kommt

$$n\varphi = \pm g + 2k\pi,\quad \varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n};$$

folglich sind sämmtliche trinomische Divisoren der Function $x^{2n} - 2\cos g x^n + 1$ in dem Ausdrucke

$$(g)\quad x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi \pm g}{n} + 1$$

enthalten. Es ist vorstehend nachgewiesen, dass $A_n = A_{n-2}$, $A_{n+1} = A_{n-3}$, u. s. w., und in der That findet man leicht, dass die Ausdrücke (d) bei der Annahme $\varphi = \dfrac{2k\pi \pm g}{n}$ der Reihe nach

...t den $n-2$ ersten in (c) zusammenfallen. Deshalb kann man ...n Quotienten der Division so darstellen:

$$(h)\quad \frac{x^{2n}-2x^n\cos g+1}{x^2-2x\cos\frac{2k\pi\pm g}{n}+1}$$

$$=x^{2n-2}+A_1x^{2n-3}+\ldots+A_{n-1}\,x^{n-1}+\ldots+A_1x+1,$$

...o A_{n-1} der mittlere Quotient, und

$$(i)\quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\sin 2\varphi}{\sin\varphi}, \\ A_2 = \dfrac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}, \\ \quad\ldots\ldots\ldots \\ A_{n-2} = \dfrac{\sin(n-1)\varphi}{\sin\varphi}, \\ A_{n-1} = \dfrac{\sin n\varphi}{\sin\varphi} = \pm\dfrac{\sin g}{\sin\varphi}, \\ \varphi = \dfrac{2k\pi\pm g}{n}. \end{cases}$$

Die sämmtlichen Divisoren sind ($k=0,\ 1,\ 2,\ldots$ gesetzt) für ...n ungerades n:

$$x^2-2x\cos\frac{g}{n}+1;$$

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{2\pi-g}{n}+1;$$

$$x^2-2x\cos\frac{4\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{4\pi-g}{n}+1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi-g}{n}+1;$$

...r ein gerades n:

$$x^2-2x\cos\frac{g}{n}+1;$$

$$x^2-2x\cos\frac{2\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{2\pi-g}{n}+1;$$

$$x^2-2x\cos\frac{4\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{4\pi-g}{n}+1;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi+g}{n}+1,\quad x^2-2x\cos\frac{(n-2)\pi-g}{n}+1;$$

$$x^2-2x\cos\frac{n\pi+g}{n}+1=x^2+2x\cos\frac{g}{n}+1.$$

Aehnlich wie bei dem Cotesischen Satze zeigt man au dass in dem einen oder andern Falle die Function $x^{2n}-2x^{n}$ dem Producte sämmtlicher Divisoren gleich ist.

XX.

Ueber die allgemeine Brennlinie Kreises.

Von
dem Herausgeber.

§. 1.

Die Gleichung der Brennlinie des Kreises für den gewöhnlichen Zurückwerfung, wenn nämlich der Einfa und der Reflexionswinkel einander gleich gesetzt werden, rechtwinkligen Coordinaten, ist bekanntlich zuerst von de St. Laurent gefunden worden. Dagegen ist es nicht möglich gewesen, die Gleichung der Brennlinie des für den Fall der Brechung, oder vielmehr die Gleichung gemeinen Brennlinie des Kreises, wenn man nämlich auf Weise das Gesetz der Zurückwerfung und das Gesetz der I auf einen diese beiden Gesetze umfassenden allgemein druck bringt, zwischen recktwinkligen Coordinaten, zu nur einige besondere Fälle dieses allgemeinen Falls hat de St. Laurent erledigt, worüber man, so wie über die der Brennlinien und Brennflächen überhaupt, u. A. der Caustische Flächen und Linien. 30 ff. in meinen S menten zu dem Mathematischen Wörterbuche na kann. Meine mehrfachen Untersuchungen über diesen v und interessanten Gegenstand haben mich zu der Uebe geführt, dass, wenn man auch dazu gelangen sollte, die G der allgemeinen Brennlinie des Kreises zwischen rechtw Coordinaten in völlig entwickelter Form darzustellen, diese so complicirt ausfallen würde, dass ein wirklicher Gebra derselben bei der Construction der allgemeinen Brennli Kreises oder bei der Entwickelung der Eigenschaften dies zu machen nicht leicht möglich sein möchte, wobei m

bemerken kann, dass schon die Gleichung der Brennlinie des Kreises im Falle der gewöhnlichen Zurückwerfung zwischen rechtwinkligen Coordinaten bis zum sechsten Grade steigt, wie man sich ebenfalls aus dem angeführten Artikel des Mathematischen Wörterbuchs (18.) überzeugen kann, wenn sich auch diese Gleichung immer noch in ziemlich einfacher und eleganter Form darstellen lässt. Ich habe daher versucht, bei der allgemeinen Brennlinie des Kreises, deren Kenntniss in vielen Beziehungen von Wichtigkeit ist, ein Mittel in Anwendung zu bringen, welches schon bei vielen anderen Curven, z. B. bei den Cycloiden und Epicycloiden, mit grossem Vortheil angewandt worden ist, so dass man nämlich die Natur der Curve nicht bloss durch eine, sondern vielmehr durch zwei Gleichungen ausdrückt, und bin dadurch zu Resultaten gelangt, welche ich der Mittheilung nicht unwerth halte, weil dieselben namentlich eine gar keinen analytischen Schwierigkeiten unterliegende, ganz unzweideutige Berechnung der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte der allgemeinen Brennlinie des Kreises, und dadurch also auch eine leichte Construction derselben gestatten, so wie ich auch überhaupt der Meinung bin, dass die Gleichungen, welche ich im Folgenden entwickeln werde, die meiste Bequemlichkeit darbieten, wenn man der allgemeinen Brennlinie des Kreises zu irgend einem praktischen Zwecke bedarf. Dass sich aber die zwei in Rede stehenden Gleichungen der allgemeinen Brennlinie des Kreises auch zur Entwickelung der Eigenschaften dieser Curve auf ganz ähnliche Art anwenden lassen, wie man z. B. die Eigenschaften der Cycloide aus deren beiden bekannten Gleichungen abzuleiten pflegt, versteht sich von selbst, welches jedoch eine Untersuchung ist, die ich, um die vorliegende Abhandlung für jetzt nicht zu sehr auszudehnen, späteren besondern Aufsätzen vorbehalte, indem, wie gesagt, meine Absicht für jetzt nur darauf gerichtet ist, die beiden, die Natur der allgemeinen Brennlinie des Kreises ausdrückenden Gleichungen zu gewinnen. Sollten auf diese beiden Gleichungen gegründete Untersuchungen über die Berührenden, über den Krümmungskreis, über die Evolution, über Quadratur, Rectification u. s. w. der allgemeinen Brennlinie des Kreises von anderen Mathematikern mir mitgetheilt werden, bevor meine eigenen Untersuchungen über alle diese Gegenstände geschlossen sind, so würde ich für diese Mittheilungen nicht bloss sehr dankbar sein, sondern dieselben auch, ohne alle Rücksicht auf meine eignen Arbeiten, sehr gern und sogleich in dem Archive abdrucken lassen.

§. 2.

Den Mittelpunkt des gegebenen Kreises wollen wir als Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems der xy annehmen, und die Coordinaten des die auf den gegebenen Kreis fallenden Strahlen aussendenden strahlenden Punktes in diesem Systeme durch p, q bezeichnen. Der Halbmesser des gegebenen Kreises, indem man denselben als positiv oder als negativ betrachtet, jenachdem die von dem strahlenden Punkte auf den Kreis fallenden Strahlen dessen concave oder convexe Seite treffen, sei R. Durch den strahlenden Punkt (pq) denke man sich ein dem primitiven Systeme der xy paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichne

den von einem beliebigen, von dem Punkte (pq) ausgehenden Strahle mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems eingeschlossenen Winkel, indem man denselben von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Systems an durch dessen Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° zählt, durch φ. Das im Falle der Reflexion als positiv, im Falle der Refraction als negativ betrachtete reciproke Ablenkungsverhältniss sei μ, und dessen absoluter oder numerischer Werth werde durch (μ) bezeichnet. Ferner seien p_1, q_1 die Coordinaten des Einfallspunktes des von dem Punkte (pq) ausgegangenen Strahls auf dem gegebenen Kreise in dem Systeme der xy; und denkt man sich nun durch den Punkt (p_1q_1) ein dem Systeme der xy paralleles Coordinatensystem gelegt, so soll der Winkel, welchen der als von dem Punkte (p_1q_1) ausgehend gedachte abgelenkte Strahl mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses Systems einschliesst, indem man denselben von dem positiven Theile der ersten Axe des in Rede stehenden Systems an durch dessen Coordinatenwinkel hindurch von 0 bis 360° zählt, durch φ_1 bezeichnet werden.

Dies vorausgesetzt, haben wir nun nach den in meinen Optischen Untersuchungen. Theil II. Leipzig. 1847. S. 12 für die Ablenkung bei dem Kreise entwickelten Formeln *) zur Bestimmung der Grössen p_1, q_1, φ_1 die folgenden Formeln:

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}
K&=-p\cos\varphi-q\sin\varphi,\\
L&=-p\sin\varphi+q\cos\varphi;\\
\sin\Theta&=\frac{L}{R};\\
p_1&=p+(K+R\cos\Theta)\cos\varphi,\\
q_1&=q+(K+R\cos\Theta)\sin\varphi;\\
\frac{\cos\varphi_1}{(\mu)}&=\cos\varphi-\cos(\varphi+\Theta)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),\\
\frac{\sin\varphi_1}{(\mu)}&=\sin\varphi-\sin(\varphi+\Theta)(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2});
\end{aligned}\right.$$

bei denen man zu beachten hat, dass K, L Hülfsgrössen sind, und dass der absolute Werth des Winkels Θ, welcher positiv und negativ sein kann, nie grösser als 90° zu nehmen ist.

Lassen wir aber den Winkel φ in φ' übergehen, so mögen die Grössen K, L, Θ, p_1, q_1, φ_1 respective in K', L', Θ', p_1', q_1', φ_1' übergehen, und wir erhalten nach dem Vorhergehenden die folgenden Gleichungen:

---

*) Man kann diese Formeln auch ohne Schwierigkeit aus den in meiner Abhandlung Archiv. Theil IV. Nr. XX. entwickelten allgemeinen Formeln ableiten, worauf daher den Leser hier der Kürze wegen zu verweisen erlaubt sein mag.

$$
2)\left\{\begin{aligned}
&K'=-p\cos\varphi'-q\sin\varphi',\\
&L'=-p\sin\varphi'+q\cos\varphi';\\
&\sin\Theta'=\frac{L'}{R};\\
&p_1'=p+(K'+R\cos\Theta')\cos\varphi',\\
&q_1'=q+(K'+R\cos\Theta')\sin\varphi';\\
&\frac{\cos\varphi_1'}{(\mu)}=\cos\varphi'-\cos(\varphi'+\Theta')(\cos\Theta'+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta'^2}),\\
&\frac{\sin\varphi_1'}{(\mu)}=\sin\varphi'-\sin(\varphi'+\Theta')(\cos\Theta'+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta'^2}).
\end{aligned}\right.
$$

Die Gleichungen der geraden Linien, in denen die den Winkeln φ und φ' entsprechenden abgelenkten Strahlen liegen, sind, wie auf der Stelle erhellet:

$$
3)\left\{\begin{aligned}
y-q_1&=(x-p_1)\tang\varphi_1,\\
y-q_1'&=(x-p_1')\tang\varphi_1'
\end{aligned}\right.
$$

oder

$$
4)\left\{\begin{aligned}
x-p_1&=(y-q_1)\cot\varphi_1,\\
x-p_1'&=(y-q_1')\cot\varphi_1'.
\end{aligned}\right.
$$

Bestimmt man aus diesen Gleichungen x, y als unbekannte Grössen, so sind bekanntlich x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden geraden Linien, in denen die den Winkeln φ und φ' entsprechenden abgelenkten Strahlen liegen. Aus 3) und 4) erhält man aber durch Subtraction

$$
q_1'-q_1=x(\tang\varphi_1-\tang\varphi_1')-(p_1\tang\varphi_1-p_1'\tang\varphi_1'),
$$

$$
p_1'-p_1=y(\cot\varphi_1-\cot\varphi_1')-(q_1\cot\varphi_1-q_1'\cot\varphi_1');
$$

also

$$
(q_1'-q_1)\cos\varphi_1\cos\varphi_1'+(p_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1'-p_1'\cos\varphi_1\sin\varphi_1')
=x\sin(\varphi_1-\varphi_1'),
$$

$$
(p_1'-p_1)\sin\varphi_1\sin\varphi_1'+(q_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1'-q_1'\sin\varphi_1\cos\varphi_1')
=-y\sin(\varphi_1-\varphi_1');
$$

folglich

$$
5)\left\{\begin{aligned}
x&=\frac{(q_1'-q_1)\cos\varphi_1\cos\varphi_1'+(p_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1'-p_1'\cos\varphi_1\sin\varphi_1')}{\sin(\varphi_1-\varphi_1')},\\
y&=\frac{(p_1'-p_1)\sin\varphi_1\sin\varphi_1'+(q_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1'-q_1'\sin\varphi_1\cos\varphi_1')}{\sin(\varphi_1'-\varphi_1)}.
\end{aligned}\right.
$$

§. 3.

Man denke sich nun, dass φ sich um $\Delta\varphi$ ändere, und dass dadurch die Veränderungen

$$\Delta K,\ \Delta L,\ \Delta\Theta,\ \Delta p_1,\ \Delta q_1,\ \Delta\varphi_1$$

von

$$K,\ L,\ \Theta,\ p_1,\ q_1,\ \varphi_1$$

herbeigeführt werden, so hat man im vorhergehenden Paragraphen

$$\begin{aligned}
K' &= K + \Delta K,\\
L' &= L + \Delta L,\\
\Theta' &= \Theta + \Delta\Theta,\\
p_1' &= p_1 + \Delta p_1,\\
q_1' &= q_1 + \Delta q_1,\\
\varphi_1' &= \varphi_1 + \Delta\varphi_1
\end{aligned}$$

zu setzen, und erhält dadurch aus 5) mittelst leichter Rechnung:

$$x = -\frac{\cos\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta q_1 - \{p_1\sin\Delta\varphi_1 + \cos\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta p_1\}}{\sin\Delta\varphi_1},$$

$$y = \frac{\sin\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta p_1 + \{q_1\sin\Delta\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta q_1\}}{\sin\Delta\varphi_1}$$

oder, wenn man im Zähler und Nenner dieser Brüche durch $\Delta\varphi_1$ dividirt:

$$x = -\frac{\cos\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\dfrac{\Delta q_1}{\Delta\varphi_1} - \{p_1\dfrac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1} + \cos\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\dfrac{\Delta p_1}{\Delta\varphi_1}\}}{\dfrac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}},$$

$$y = \frac{\sin\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\dfrac{\Delta p_1}{\Delta\varphi_1} + \{q_1\dfrac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1} - \sin\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\dfrac{\Delta q_1}{\Delta\varphi_1}\}}{\dfrac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}},$$

Die Coordinaten der Punkte der allgemeinen Brennlinie des Kreises sind offenbar die Gränzen, denen die Brüche auf den rechten Seiten der beiden vorhergehenden Gleichungen sich nähern, wenn $\Delta\varphi$ sich der Null nähert. Ueberlegt man nun, dass, wenn $\Delta\varphi$ sich der Null nähert, sich natürlich auch $\Delta\varphi_1$ der Null nähert, und bezeichnet der Kürze wegen von jetzt an die Coordinaten der Punkte der allgemeinen Brennlinie des Kreises durch x, y selbst; so erhält man aus den beiden vorhergehenden Gleichungen nach bekannten Sätzen der Differentialrechnung auf der Stelle:

$$6)\left\{\begin{array}{l} x=-\cos\varphi_1{}^2\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_1}+(p_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi_1}),\\ y=\quad\sin\varphi_1{}^2\frac{\partial p_1}{\partial\varphi_1}+(q_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_1}); \end{array}\right.$$

oder

$$7)\left\{\begin{array}{l} x=-\cos\varphi_1{}^2\left(\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)+\{p_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1\left(\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)\},\\ y=\quad\sin\varphi_1{}^2\left(\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)+\{q_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1\left(\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}:\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)\}. \end{array}\right.$$

§. 4.

Um nun die beiden Gleichungen 7) weiter zu entwickeln, ergiebt sich zuerst aus den beiden bekannten Gleichungen

$$K=-p\cos\varphi-q\sin\varphi,$$
$$L=-p\sin\varphi+q\cos\varphi$$

durch Differentiation nach φ:

$$\frac{\partial K}{\partial\varphi}=p\sin\varphi-q\cos\varphi=-L,$$
$$\frac{\partial L}{\partial\varphi}=-p\cos\varphi-q\sin\varphi=K;$$

und aus der bekannten Gleichung

$$\sin\Theta=\frac{L}{R}$$

erhält man also

$$\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}=\frac{K}{R},\quad\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}=\frac{K}{R\cos\Theta}.$$

Ferner erhält man aus den beiden bekannten Gleichungen

$$p_1=p+(K+R\cos\Theta)\cos\varphi,$$
$$q_1=q+(K+R\cos\Theta)\sin\varphi$$

durch Differentiation nach φ:

$$\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}=-(K+R\cos\Theta)\sin\varphi+\left(\frac{\partial K}{\partial\varphi}-R\sin\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}=(K+R\cos\Theta)\cos\varphi+\left(\frac{\partial K}{\partial\varphi}-R\sin\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\varphi}\right)\sin\varphi;$$

also nach dem Vorhergehenden:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -(K + R\cos\Theta)\sin\varphi - (L + K\tang\Theta)\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = (K + R\cos\Theta)\cos\varphi - (L + K\tang\Theta)\sin\varphi;$$

oder, wenn man

$$L = R\sin\Theta$$

setzt:

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -K\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\cos\Theta} - R\sin(\varphi+\Theta),$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = K\frac{\cos(\varphi+\Theta)}{\cos\Theta} + R\cos(\varphi+\Theta);$$

oder auch

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -K\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\cos\Theta} - L\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\Theta},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = K\frac{\cos(\varphi+\Theta)}{\cos\Theta} + L\frac{\cos(\varphi+\Theta)}{\sin\Theta};$$

oder

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = -\left(\frac{K}{\cos\Theta} + \frac{L}{\sin\Theta}\right)\sin(\varphi+\Theta),$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = \left(\frac{K}{\cos\Theta} + \frac{L}{\sin\Theta}\right)\cos(\varphi+\Theta).$$

Führt man aber in diese Gleichungen für K und L ihre au Obigen bekannten Werthe ein, so erhält man ohne Schwier

$$\frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta) - q\cos(\varphi+\Theta)\},$$

$$\frac{\partial q_1}{\partial \varphi} = -\frac{\cos(\varphi+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta) - q\cos(\varphi+\Theta)\}.$$

Endlich folgt aus den beiden Gleichungen

$$\frac{\cos\varphi_1}{(\mu)} = \cos\varphi - \cos(\varphi+\Theta)\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right),$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{(\mu)} = \sin\varphi - \sin(\varphi+\Theta)\left(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}\right)$$

leicht

$$\sin(\varphi - \varphi_1 + \Theta) = (\mu)\sin\Theta,$$

und folglich, wenn man nach φ differentiirt:

$$\cos(\varphi - \varphi_1 + \Theta).\left(1 - \frac{\partial \varphi_1}{\partial \varphi} + \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi}\right) = (\mu)\cos\Theta\frac{\partial \Theta}{\partial \varphi},$$

l. i. nach dem Obigen

$$\left(\frac{K+R\cos\Theta}{R\cos\Theta}-\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}\right)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)=(\mu)\frac{K}{R},$$

ılso

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}=1+\frac{K}{R}\left\{\frac{1}{\cos\Theta}-\frac{(\mu)}{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\right\}.$$

Die Gleichungen 7) kann man auch auf folgende Art ausırücken:

$$\frac{x-p_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}=\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}-\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi},$$

$$\frac{y-q_1}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}=\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}-\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi};$$

ıd nach dem Vorhergehenden ist offenbar

$$\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi}-\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi}$$

$$=\frac{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta)-q\cos(\varphi+\Theta)\};$$

so ist

$$\frac{x-p_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}=\frac{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta)-q\cos(\varphi+\Theta)\},$$

$$\frac{y-q_1}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi}=\frac{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta)-q\cos(\varphi+\Theta)\};$$

ler

$$x=p_1+\cos\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta)-q\cos(\varphi+\Theta)\},$$

$$y=q_1+\sin\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}\{p\sin(\varphi+\Theta)-q\cos(\varphi+\Theta)\}.$$

Setzen wir aber der Kürze wegen von nun an, was offenbar verstattet ist, $q=0$, so erhalten die vorhergehenden Formeln die folgende einfachere Gestalt:

$$x=p_1+p\cos\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta},$$

$$y=q_1+p\sin\varphi_1\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta\cos\Theta}.$$

Für $q=0$ ist aber nach dem Obigen

$$K=-p\cos\varphi,\quad L=-p\sin\varphi;$$

lso

$$\sin\Theta = -\frac{p}{R}\sin\varphi,\quad \frac{p}{R} = -\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi},\quad p = -R\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi}.$$

Folglich ist

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = 1 - \frac{p}{R}\cos\varphi\left\{\frac{1}{\cos\Theta} - \frac{(\mu)}{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\right\}$$

oder

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = 1 + \cot\varphi\sin\Theta\left\{\frac{1}{\cos\Theta} - \frac{(\mu)}{\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\right\},$$

woraus sich nach leichter Rechnung

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\varphi} = \frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta) - (\mu)\cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta}{\sin\varphi\cos\Theta\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}$$

ergiebt. Führt man dies in die obigen Ausdrücke von x, y und setzt zugleich

$$p = -R\frac{\sin\Theta}{\sin\varphi};$$

so erhält man

$$8)\quad \begin{cases} x = p_1 - R\cos\varphi_1\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1 \ldots}{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)-(\mu)\mathrm{co}\ldots} \\ y = q_1 - R\sin\varphi_1\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1 \ldots}{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)-(\mu)\mathrm{cos}\ldots} \end{cases}$$

Weil aber nach dem Obigen

$$(\mu) = \frac{\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\Theta}$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} &\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta) - (\mu)\cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta \\ &= \sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta) - \cos\varphi\cos\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta) \\ &= \cos\Theta\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1) - \sin\Theta\sin(\varphi+\Theta)\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &\quad - \cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos\varphi\cos\Theta\cos\Theta\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &= \sin\varphi\cos\Theta^2\cos(\varphi-\varphi_1) + \cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta\cos(\varphi-\varphi_1) \\ &\quad - \cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta\cos(\varphi-\varphi_1) \\ &\quad - \sin\varphi\sin\Theta\cos\Theta\sin(\varphi-\varphi_1) - \cos\varphi\sin\Theta^2\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &\quad - \cos\varphi\cos\Theta^2\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &= \sin\varphi\cos\Theta^2\cos(\varphi-\varphi_1) - (\cos\varphi + \sin\varphi\sin\Theta\cos\Theta)\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &= \sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1) - \cos\varphi\sin(\varphi-\varphi_1) \\ &\quad - \sin\varphi\sin\Theta\{\sin(\varphi-\varphi_1)\cos\Theta + \cos(\varphi-\varphi_1)\sin\Theta\} \\ &= \sin\varphi_1 - \sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta), \end{aligned}$$

ind folglich nach dem Obigen:

$$) \begin{cases} x=p_1-R\cos\varphi_1\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}, \\ y=q_1-R\sin\varphi_1\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}; \end{cases}$$

der auch

$$10) \begin{cases} x=p_1-R\cos\varphi_1\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}, \\ y=q_1-R\sin\varphi_1\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}. \end{cases}$$

Für $q=0$ werden die Gleichungen 1):

$$11) \begin{cases} \sin\Theta=-\dfrac{p}{R}\sin\varphi; \\ p_1=p-(p\cos\varphi-R\cos\Theta)\cos\varphi, \\ q_1=\quad-(p\cos\varphi-R\cos\Theta)\sin\varphi; \\ \dfrac{\cos\varphi_1}{(\mu)}=\cos\varphi-\cos(\varphi+\Theta)(\cos\Theta+\dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}), \\ \dfrac{\sin\varphi_1}{(\mu)}=\sin\varphi-\sin(\varphi+\Theta)(\cos\Theta+\dfrac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}); \end{cases}$$

d nach dem Obigen hat man auch die Gleichung

$$12)\quad \sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)=(\mu)\sin\Theta.$$

Die Coordinaten p_1, q_1 können auch auf folgende Art ausgeückt werden:

$$13) \begin{cases} p_1=p+R\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}\cos\varphi, \\ q_1=\quad R\dfrac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}\sin\varphi; \end{cases}$$

er

$$14) \begin{cases} p_1=p+R\sin(\varphi+\Theta)\cot\varphi, \\ q_1=\quad R\sin(\varphi+\Theta). \end{cases}$$

Wie man diese Formeln zur Bestimmung der Coordinaten x, y r Punkte der allgemeinen Brennlinie des Kreises anzuwenden t, wird einer weiteren Erläuterung hier nicht bedürfen. Wollte n die Gleichung der allgemeinen Brennlinie des Kreises zwischen n rechtwinkligen Coordinaten x, y haben, so müsste man den inkel φ aus den beiden Gleichungen 10) eliminiren, was aber erdings in nicht geringe Weitläufigkeiten zu führen scheint.

Für $\mu = 1$ ist

$$\cos\varphi_1 = \cos\varphi - 2\cos\Theta\cos(\varphi+\Theta),$$
$$\sin\varphi_1 = \sin\varphi - 2\cos\Theta\sin(\varphi+\Theta);$$

also, wie man leicht findet:

$$15)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = -\cos(\varphi+2\Theta), \\ \sin\varphi_1 = -\sin(\varphi+2\Theta); \end{cases}$$

folglich

$$\begin{aligned}\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta) &= \cos(\varphi+\Theta)\cos\varphi_1 + \sin(\varphi+\Theta)\sin\varphi_1 \\ &= -\cos(\varphi+\Theta)\cos(\varphi+2\Theta) - \sin(\varphi+\Theta)\sin(\varphi+2 \\ &= -\cos\Theta,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta) &= \sin(\varphi+\Theta)\cos\varphi_1 - \cos(\varphi+\Theta)\sin\varphi_1 \\ &= -\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi+2\Theta) + \cos(\varphi+\Theta)\sin(\varphi+2 \\ &= \sin\Theta.\end{aligned}$$

Daher ist in diesem Falle nach dem Obigen

$$16)\quad \begin{cases} x = p_1 - R\cos(\varphi+2\Theta)\dfrac{\cos\Theta^2\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi\sin\Theta^2+\sin(\varphi+2\Theta)}, \\ y = q_1 - R\sin(\varphi+2\Theta)\dfrac{\cos\Theta^2\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi\sin\Theta^2+\sin(\varphi+2\Theta)}. \end{cases}$$

Aber

$$\begin{aligned} &\sin\varphi\sin\Theta^2 + \sin(\varphi+2\Theta) \\ &= \sin\varphi(\sin\Theta^2+\cos 2\Theta) + \cos\varphi\sin 2\Theta \\ &= \sin\varphi\cos\Theta^2 + 2\cos\varphi\sin\Theta\cos\Theta \\ &= \cos\Theta(\sin\varphi\cos\Theta + 2\cos\varphi\sin\Theta) \\ &= \cos\Theta\{\cos\varphi\sin\Theta + \sin(\varphi+\Theta)\} \\ &= -\tfrac{1}{2}\cos\Theta\{\sin(\varphi-\Theta) - 3\sin(\varphi+\Theta)\}; \end{aligned}$$

also

$$17)\quad \begin{cases} x = p_1 + 2R\cos(\varphi+2\Theta)\dfrac{\cos\Theta\sin(\varphi+\Theta)}{\sin(\varphi-\Theta)-3\sin(\varphi+\Theta)}, \\ y = q_1 + 2R\sin(\varphi+2\Theta)\dfrac{\cos\Theta\sin(\varphi+\Theta)}{\sin(\varphi-\Theta)-3\sin(\varphi+\Theta)}. \end{cases}$$

§. 5.

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes (xy) der allge meinen Brennlinie des Kreises von dem leuchtenden Punkte durc ϱ; so ist

$$\varrho^2 = (x-p)^2 + y^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden, wie man leicht findet:

$$18)\quad \frac{\varrho^2}{R^2}=\{\cos\varphi\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}-\cos\varphi_1\frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\}^2$$
$$+\{\sin\varphi\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}-\sin\varphi_1\frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\}^2$$

oder

19)

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2.\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\Theta)}\right\}^2=\{\cos\varphi-\cos\varphi_1\frac{\sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\}^2$$
$$+\{\sin\varphi-\sin\varphi_1\frac{\sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)}\}^2.$$

Dies ist die Polargleichung der allgemeinen Brennlinie des Kreises in Bezug auf den leuchtenden Punkt als Pol und die von demselben nach dem Mittelpunkte des gegebenen Kreises gezogene gerade Linie als Axe.

Setzen wir

$$20)\quad \tang\Omega=\frac{\sin\varphi\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1-\sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)},$$

so wird, wie man leicht findet:

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2.\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\Theta)}\right\}^2=1-2\cos(\varphi-\varphi_1)\tang\Omega+\tang\Omega^2$$
$$=\sec\Omega^2-2\cos(\varphi-\varphi_1)\tang\Omega$$
$$=\frac{1-\cos(\varphi-\varphi_1)\sin2\Omega}{\cos\Omega^2},$$

und folglich, wenn

$$21)\quad \cos2\Omega_1=-\cos(\varphi-\varphi_1)\sin2\Omega$$

gesetzt wird:

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2.\left\{\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi+\Theta)}\right\}^2=2\left(\frac{\cos\Omega_1}{\cos\Omega}\right)^2.$$

Also ist

$$22)\quad \varrho=\pm R.\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}.\frac{\cos\Omega_1}{\cos\Omega}.\sqrt{2},$$

wo man das Zeichen immer so zu nehmen hat, dass ϱ positiv wird.

§. 6.

Bezeichnet man die Entfernung des Punktes (xy) der allgemeinen Brennlinie des Kreises von dem Einfallspunkte (p_1q_1) durch r', so ist

$$r'^2 = (x-p_1)^2 + (y-q_1)^2,$$

und folglich nach dem Obigen offenbar

$$23)\quad r'^2 = R^2 \left\{ \frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos(\varphi-\varphi_1+\Theta)^2}{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\sin\Theta\sin(\varphi-\varphi_1+\Theta)} \right\}^2,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$24)\quad \Theta' = \varphi - \varphi_1 + \Theta$$

gesetzt wird:

$$25)\quad r' = \pm R \frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'^2}{\sin\varphi_1 - \sin\varphi\sin\Theta\sin\Theta'},$$

wo man das Zeichen immer so nehmen muss, dass r' positiv ...

Weil nun aber nach 24)

$$\varphi_1 = \varphi + \Theta - \Theta'$$

ist, so ist

$$\begin{aligned} &\sin\varphi_1 - \sin\varphi\sin\Theta\sin\Theta' \\ &= \sin(\varphi+\Theta-\Theta') - \sin\varphi\sin\Theta\sin\Theta' \\ &= \sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta' + \cos\varphi\sin(\Theta-\Theta'), \end{aligned}$$

also

$$r' = \pm R \frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'^2}{\sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta' + \cos\varphi\sin(\Theta-\Theta')},$$

und folglich

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\Theta-\Theta')}{R} &= \pm\frac{\sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'^2}{r'\cos\varphi} - \frac{\sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta'}{R\cos\varphi} \\ &= \pm\frac{\sin\Theta\cos\Theta'^2}{r'} \pm \operatorname{tang}\varphi\cos\Theta\cos\Theta'\left(\frac{\cos\Theta'}{r'} \mp \frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Nach dem Vorhergehenden ist aber

$$\begin{aligned} &\frac{\cos\Theta'}{r'} \mp \frac{1}{R} \\ &= \pm\frac{\sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta' + \cos\varphi\sin(\Theta-\Theta')}{R\sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'} \mp \frac{1}{R} \\ &= \pm\frac{\sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta' + \cos\varphi\sin(\Theta-\Theta') - \sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'}{R\sin(\varphi+\Theta)\cos\Theta'}, \end{aligned}$$

woraus man nach leichter Rechnung erhält:

$$\frac{\cos\Theta'}{r'} \mp \frac{1}{R} = \mp\frac{\cos\varphi\cos\Theta^2\sin\Theta'}{R(\sin(\varphi+\Theta)}.$$

Also ist nach dem Obigen

$$26)\quad \frac{\sin(\Theta-\Theta')}{R}=\pm\frac{\sin\Theta\cos\Theta'^2}{r'}-\frac{\sin\varphi\sin\Theta'\cos\Theta^2}{R\sin(\varphi+\Theta)},$$

in welcher Gleichung man das Zeichen so zu nehmen hat, dass r' positiv wird.

Bezeichnen wir ferner die Entfernung des leuchtenden Punktes von dem Einfallspunkte (p_1q_1) durch r, so ist

$$r^2=(p_1-p)^2+q_1^2,$$

also nach dem Obigen

$$27)\quad r^2=R^2\left\{\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}\right\}^2,$$

und folglich

$$28)\quad r=\pm R\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi},$$

wo man das Zeichen so zu nehmen hat, dass r positiv wird, d. h. man muss das obere oder untere Zeichen nehmen, jenachdem

$$R\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}$$

positiv oder negativ ist. Setzen wir nun

$$r=(\pm)R\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi},$$

so wird nach 26)

$$29)\quad \frac{\sin(\Theta-\Theta')}{R}=\pm\frac{\sin\Theta\cos\Theta'^2}{r'}-(\pm)\frac{\sin\Theta'\cos\Theta^2}{r},$$

wo man in $(\pm)$ das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem

$$R\frac{\sin(\varphi+\Theta)}{\sin\varphi}$$

positiv oder negativ ist, was sich immer leicht beurtheilen lassen wird, und dann in $\pm$ das Zeichen so zu nehmen hat, dass r' positiv wird. Bei einer weiteren Betrachtung der merkwürdigen Gleichung 29) will ich mich jetzt nicht aufhalten, weil dieselbe schon bekannt und zuerst von Petit gefunden ist. Ich habe dieselbe hier hauptsächlich nur deshalb entwickelt, um die Richtigkeit meiner eignen oben entwickelten Formeln an einer schon anderweitig bekannten Gleichung zu prüfen, ohne mich jetzt auf eine weitere Betrachtung dieser letzteren Gleichung selbst einlassen zu wollen. Ueberhaupt gilt diese letztere Gleichung bekanntlich nicht bloss für die Brennlinie des Kreises, sondern für alle Brennlinien allgemein, wie man in dem angeführten Artikel des Mathematischen Wörterbuchs sehen kann.

Die Gleichung 22) kann man wegen der Gleichung 28 auf folgende Art ausdrücken:

$$30)\quad \varrho = \pm r.\frac{\cos\Omega_1}{\cos\Omega}.\sqrt{2},$$

wo das Zeichen immer so zu nehmen ist, dass ϱ positiv w

Auch hat man nach 20) und dem Vorhergehenden die

$$31)\quad \tang\Omega = \frac{\sin\varphi\cos\Theta'^2}{\sin\varphi\cos\Theta\cos\Theta' + \cos\varphi\sin(\Theta-\Theta')},$$

wo nach 12) und 24)

$$32)\quad \sin\Theta' = (\mu)\sin\Theta$$

ist.

§. 7.

Den Fall, wenn die einfallenden Strahlen sämmtlich einander parallel sind, wollen wir nun noch einer besondere trachtung unterwerfen.

Den Mittelpunkt des gegebenen Kreises nehmen wir als den Anfang eines rechtwinkligen Coordinatensystems d an, lassen jetzt aber, was offenbar verstattet ist, die Axe den einfallenden Strahlen parallel sein, und nehmen den po Theil der Axe der x von dem Anfange der xy oder dem punkte des gegebenen Kreises an nach der Richtung der gung der einfallenden Parallelstrahlen hin. Dann ist für einfallenden Strahl, den wir uns wieder von dem Punkte (pq gehend denken, in den Gleichungen 1) der Winkel $\varphi =$ setzen, wodurch wir erhalten:

$$33)\left\{\begin{array}{l} \sin\Theta = \frac{q}{R};\\ p_1 = R\cos\Theta,\quad q_1 = q;\\ \frac{\cos\varphi_1}{(\mu)} = 1 - \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),\\ \frac{\sin\varphi_1}{(\mu)} = \quad -\sin\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}). \end{array}\right.$$

Lassen wir nun, indem wir, was offenbar verstattet ist, alle einfallenden Strahlen p als constant betrachten, q in q' i gehen, so mögen Θ, p_1, q_1, φ_1 respective in Θ', p_1', q_1', übergehen, und wir erhalten aus den vorhergehenden Gleichun

$$34)\quad \begin{cases} \sin\Theta' = \frac{q'}{R}; \\ p_1' = R\cos\Theta',\quad q_1' = q'; \\ \frac{\cos\varphi_1'}{(\mu)} = 1 - \cos\Theta'(\cos\Theta' + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta'^2}), \\ \frac{\sin\varphi_1'}{(\mu)} = \quad -\sin\Theta'(\cos\Theta' + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta'^2}). \end{cases}$$

Die Gleichungen der geraden Linien, in denen die den durch die Punkte (pq) und (pq') gehenden einfallenden Strahlen entsprechenden abgelenkten Strahlen liegen, sind

$$35)\quad \begin{cases} y - q_1 = (x - p_1)\tan\varphi_1, \\ y - q_1' = (x - p_1')\tan\varphi_1' \end{cases}$$

oder

$$36)\quad \begin{cases} x - p_1 = (y - q_1)\cot\varphi_1, \\ x - p_1' = (y - q_1')\cot\varphi_1'; \end{cases}$$

woraus man, wenn wieder x, y die Coordinaten des Durchschnittspunkts der beiden in Rede stehenden geraden Linien bezeichnen, auf ganz dieselbe Art wie in §. 2. erhält:

$$37)\quad \begin{cases} x = \frac{(q_1'-q_1)\cos\varphi_1\cos\varphi_1' + (p_1\sin\varphi_1\cos\varphi_1' - p_1'\cos\varphi_1\sin\varphi_1')}{\sin(\varphi_1 - \varphi_1')}, \\ y = \frac{(p_1'-p_1)\sin\varphi_1\sin\varphi_1' + (q_1\cos\varphi_1\sin\varphi_1' - q_1'\sin\varphi_1\cos\varphi_1')}{\sin(\varphi_1' - \varphi_1)}. \end{cases}$$

§. 8.

Man denke sich nun, dass q sich um Δq verändere, und dass dadurch die Veränderungen

$$\Delta\Theta,\ \Delta p_1,\ \Delta q_1,\ \Delta\varphi_1$$

von

$$\Theta,\ p_1,\ q_1,\ \varphi_1$$

herbeigeführt werden, so hat man im vorhergehenden Paragraphen

$$\Theta' = \Theta + \Delta\Theta,$$

$$p_1' = p_1 + \Delta p_1,$$

$$q_1' = q_1 + \Delta q_1,$$

$$\varphi_1' = \varphi_1 + \Delta\varphi_1$$

zu setzen, und erhält dadurch aus 37):

$$x=-\frac{\cos\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta q_1-\{p_1\sin\Delta\varphi_1+\cos\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta p_1\}}{\sin\Delta\varphi_1},$$

$$y=\frac{\sin\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta p_1+\{q_1\sin\Delta\varphi_1-\sin\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\Delta q_1\}}{\sin\Delta\varphi_1};$$

oder, wenn man in den Zählern und Nennern dieser Brüche mit $\Delta\varphi_1$ dividirt:

$$x=-\frac{\cos\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\frac{\Delta q_1}{\Delta\varphi_1}-\{p_1\frac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}+\cos\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\frac{\Delta p_1}{\Delta\varphi_1}\}}{\frac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}},$$

$$y=\frac{\sin\varphi_1\sin(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\frac{\Delta p_1}{\Delta\varphi_1}+\{q_1\frac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}-\sin\varphi_1\cos(\varphi_1+\Delta\varphi_1)\frac{\Delta q_1}{\Delta\varphi_1}\}}{\frac{\sin\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_1}}.$$

Lässt man nun Δq sich der Null nähern und geht zu den Gränzen über, so sind die dadurch hervorgehenden Werthe von x, y die Coordinaten der Punkte der Brennlinie des Kreises, und man erhält aus dem Vorhergehenden

$$38)\quad \begin{cases} x=-\cos\varphi_1{}^2\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_1}+(p_1+\sin\varphi_1\cos\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi_1}),\\ y=\sin\varphi_1{}^2\frac{\partial p_1}{\partial\varphi_1}+(q_1-\sin\varphi_1\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_1}); \end{cases}$$

oder

$$39)\quad \frac{x-p_1}{\cos\varphi_1}=\frac{y-q_1}{\sin\varphi_1}=\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial\varphi_1}-\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial\varphi_1},$$

oder

$$40)\quad \frac{x-p_1}{\cos\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}=\frac{y-q_1}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial q}=\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial q}-\cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial q}.$$

Aus der Gleichung

$$\sin\Theta=\frac{q}{R}$$

folgt

$$\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial q}=\frac{1}{R},\quad \frac{\partial\Theta}{\partial q}=\frac{1}{R\cos\Theta}.$$

Aus der Gleichung

$$p_1=R\cos\Theta$$

folgt

$$\frac{\partial p_1}{\partial q}=-R\sin\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial q}=-\tang\Theta.$$

Aus der Gleichung

$$q_1 = q$$

folgt

$$\frac{\partial q_1}{\partial q} = 1.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{\cos\varphi_1}{(\mu)} = 1 - \cos\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\frac{\sin\varphi_1}{(\mu)} = \quad -\sin\Theta(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

folgt leicht

$$\frac{\cos(\varphi_1-\Theta)}{(\mu)} = -\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

$$\frac{\sin(\varphi_1-\Theta)}{(\mu)} = -\sin\Theta;$$

und aus der zweiten dieser beiden Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{\cos(\varphi_1-\Theta)}{(\mu)}\cdot\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} - \frac{\partial\Theta}{\partial q}\right) = -\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial q} = -\frac{1}{R},$$

also

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} = \frac{\partial\Theta}{\partial q} - \frac{(\mu)}{R\cos(\varphi_1-\Theta)} = \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{\cos\Theta} - \frac{(\mu)}{\cos(\varphi_1-\Theta)}\right\},$$

folglich nach dem Vorhergehenden

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} = \frac{1}{R}\left\{\frac{1}{\cos\Theta} + \frac{\mu}{\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}\right\},$$

oder

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} = \frac{\mu\cos\Theta + \sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{R\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}},$$

oder auch

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial q} = \frac{\mu}{R}\cdot\frac{\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}.$$

Weil nun, wie man leicht findet,

$$\sin\varphi_1\frac{\partial p_1}{\partial q} - \cos\varphi_1\frac{\partial q_1}{\partial q} = \frac{(\mu)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\mu\cos\Theta}$$

ist, so ist nach dem Obigen

$$\frac{x-R\cos\Theta}{(\mu)(\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}\cdot\frac{\mu}{R}\cdot\frac{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

$$=-\frac{y-q}{(\mu)\sin\Theta(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}\cdot\frac{\mu}{R}\cdot\frac{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

$$=\frac{(\mu)\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\mu\cos\Theta},$$

also

$$41)\quad \frac{x-R\cos\Theta}{R}\cdot\frac{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

$$=-\frac{y-q}{R\sin\Theta}=1-\mu^2\sin\Theta^2,$$

oder

$$42)\quad \frac{x-R\cos\Theta}{R}\cdot\frac{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

$$=-\frac{y-R\sin\Theta}{R\sin\Theta}=1-\mu^2\sin\Theta^2.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{x-R\cos\Theta}{R}\cdot\frac{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}{\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}$$

$$=1-\mu^2\sin\Theta^2$$

erhält man nun zuvörderst ohne alle Schwierigkeit

$$x=R\frac{1-\mu^2\sin\Theta^2(\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}.$$

Es ist aber

$$(\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}$$

$$=\frac{1}{\mu}-\mu(\sin\Theta^2-\frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}),$$

also

$$\mu^2 (\sin\Theta^2 - \frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$= 1-\mu(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2},$$

und folglich

$$1-\mu^2\sin\Theta^2(\sin\Theta^2 - \frac{1}{\mu}\cos\Theta\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})$$

$$= \cos\Theta^2 + \mu\sin\Theta^2(\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}.$$

Daher ist nach dem Obigen

$$x = R\{\mu\sin\Theta^2\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2} + \frac{\cos\Theta^2}{\cos\Theta + \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}\}$$

$$= R\{\mu\sin\Theta^2\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2} + \frac{\cos\Theta^2(\cos\Theta - \frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2})}{1-\frac{1}{\mu^2}}\},$$

woraus man ferner ohne alle Schwierigkeit

$$43)\quad x = \frac{\mu^2}{\mu^2-1}R\{\cos\Theta^3 - \frac{1}{\mu}(1-\mu^2\sin\Theta^2)^{\frac{3}{2}}\}$$

oder

$$44)\quad x + \frac{\mu^2}{1-\mu^2}R\cos\Theta^3 = \frac{\mu}{1-\mu^2}R(1-\mu^2\sin\Theta^2)^{\frac{3}{2}}$$

erhält.

Aus der Gleichung

$$-\frac{y-R\sin\Theta}{R\sin\Theta} = 1-\mu^2\sin\Theta^2$$

folgt leicht

$$45)\quad y = \mu^2 R\sin\Theta^3.$$

Also ist

$$\sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{y}{\mu^2 R}} = \frac{1}{\mu}\sqrt[3]{\frac{\mu y}{R}},$$

und folglich

$$\mu^2\sin\Theta^2 = \sqrt[3]{\frac{\mu^2 y^2}{R^2}}.$$

Ferner ist

$$\cos\Theta = \sqrt{\{1-\frac{1}{\mu^2}\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{R^2}}\}},$$

wobei man zu beachten hat, dass der absolute Werth von Θ nie 90^0 übersteigt, folglich $\cos\Theta$ stets positiv ist. Also ist

$$\cos\Theta^3 = (1-\frac{1}{\mu^2}\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{R^2}})^{\frac{3}{2}},$$

und daher nach 43):

$$46)\quad x = \frac{\mu^2}{\mu^2-1}R\{(1-\frac{1}{\mu^2}\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{R^2}})^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{\mu}(1-\sqrt[3]{\frac{\mu^2y^2}{R^2}})^{\frac{3}{2}}\},$$

welches die Gleichung der allgemeinen Brennlinie des Kreises für parallel einfallende Strahlen ist.

§. 8.

Den Fall, wenn $\mu=1$ ist, d. h. den Fall der gewöhnlichen Zurückwerfung, müssen wir nun aber noch besonders betrachten.

In diesem Falle erhalten wir aus der aus dem Obigen bekannten Gleichung

$$x = R\{\mu\sin\Theta^2\sqrt[2]{1-\mu^2\sin\Theta^2} + \frac{\cos\Theta^2}{\cos\Theta+\frac{1}{\mu}\sqrt{1-\mu^2\sin\Theta^2}}\}$$

leicht

$$x = R(\sin\Theta^2\cos\Theta + \tfrac{1}{2}\cos\Theta),$$

d. i.

$$47)\quad x = \tfrac{1}{2}R\cos\Theta(1+2\sin\Theta^2),$$

und nach 45) ist

$$48)\quad y = R\sin\Theta^3.$$

Also ist

$$\sin\Theta = \sqrt[3]{\frac{y}{R}},\ \sin\Theta^2 = \sqrt[3]{\frac{y^2}{R^2}};$$

olglich

$$\cos\Theta = \sqrt{(1-\sqrt[3]{\frac{y^2}{R^2}})}.$$

Daher ist nach 47):

$$49)\quad x=\tfrac{1}{2}R\left(1+2\sqrt[3]{\frac{y^2}{R^2}}\right)\sqrt{\left(1-\sqrt[3]{\frac{y^2}{R^2}}\right)}.$$

Aus der Gleichung 47) folgt aber, wenn man quadrirt:

$$4x^2=R^2\cos\Theta^2(1+4\sin\Theta^2+4\sin\Theta^4),$$

also, wenn man

$$\cos\Theta^2=1-\sin\Theta^2$$

setzt, wie man nach leichter Rechnung findet:

$$4x^2=R^2(1+3\sin\Theta^2-4\sin\Theta^6),$$

und folglich, weil nach 48)

$$\sin\Theta^6=\frac{y^2}{R^2}$$

ist:

$$\frac{4(x^2+y^2)}{R^2}=1+3\sin\Theta^2,$$

oder

$$\frac{4(x^2+y^2)-R^2}{R^2}=3\sin\Theta^2;$$

also ist

$$\left\{\frac{4(x^2+y^2)-R^2}{R^2}\right\}^3=27\sin\Theta^6,$$

d. i. nach dem Vorhergehenden:

$$\left\{\frac{4(x^2+y^2)-R^2}{R^2}\right\}^3=\frac{27y^2}{R^2}.$$

Also ist

$$50)\quad \{4(x^2+y^2)-R^2\}^3=27R^4y^2$$

die Gleichung der Brennlinie des Kreises im Falle der gewöhnlichen Zurückwerfung für parallel einfallende Strahlen.

XXI.

Ein einfacher Beweis des Fundamentaltheorems in der Theorie der algebraischen Gleichungen.

Von dem

Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Der in der Ueberschrift bezeichnete Satz, nämlich:

> dass jeder algebraischen Gleichung mit Einer Unbekannten durch einen complexen Werth dieser Unbekannten Genüge geleistet werden könne,

hat zwar seit dem Vorgange von Gauss schon so mannigfaltige und von so verschiedenen Principien ihren Auslauf nehmende Beweise erfahren, dass eine Vermehrung dieser Beweise kaum noch von Interesse sein dürfte; worüber wir auf den Artikel XLVI. S. 411. im VII. Bande des Archivs zu verweisen uns erlauben, welcher eine Zusammenstellung der hauptsächlichsten dieser Beweise enthält. Indessen wird man zugleich nicht in Abrede stellen können, dass alle jene Beweise, vom Standpunkte des Anfängers angesehen, theils so verwickelte Betrachtungen erfordern, theils aber auch so fremdartige Hülfen zur Benutzung herbeiziehen, dass man sich für die Zwecke des Unterrichts nicht selten, je nach der Stellung, welche man der allgemeinen Theorie der Gleichungen geben will, mit dem Beweise des in Rede stehenden Satzes hinsichtlich dessen, was man voraussetzen oder nicht voraussetzen darf, in einiger Verlegenheit befinden wird; und stellt man nun obendrein noch die Forderung, der Beweis solle auf einem einfachen und naturgemässen Wege aus der Betrachtung der Sache selbst genetisch hervorgehen, so wird nicht leicht einer der vorhandenen Beweise allen diesen Anforderungen gleichzeitig zu genügen im Stande sein.

In dieser Beziehung dürfte vielleicht der nachfolgende Beweis der öffentlichen Mittheilung nicht unwerth sein, welcher an Einfachheit, so wie an naturgemässer Entstehung, kaum etwas zu wünschen übrig lässt. Er beruhet der Hauptsache nach auf einer Vereinfachung des Beweises von Deahna (s. d. angef. Artikel Seite 416).

1.

Als zugestanden dürfen wir voraussetzen, dass die Theorie der Gleichungen diejenige besondere Aufgabe einer allgemeinen Functionentheorie zu ihrem Gegenstande hat, alle Werthe einer unabhängigen Veränderlichen anzugeben, für welche eine gegebene Function derselben zu Null wird. Insbesondere also im vorliegenden Falle handelt es sich darum, alle Werthe einer unabhängigen Veränderlichen anzugeben, für welche eine gegebene algebraische Function derselben zu Null wird. Sei nun diese Function von der bekannten Form

$$y=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\dots+a_n, \qquad (1)$$

so hat man zunächst, bevor jene Aufgabe überhaupt gestellt werden kann, die Möglichkeit derselben nachzuweisen, d. h. zu zeigen, dass es wirklich Werthe von x geben müsse, für welche y zur Null werde; und da man sich bei dieser Nachweisung offenbar noch vor der Theorie der Gleichungen, nämlich innerhalb der allgemeinen Functionentheorie befindet, so erscheint es auch am natürlichsten, die Function selbst noch in ihrer Eigenschaft als Function, also ihrer ganzen Erstreckung nach von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ ins Auge zu fassen und nachzusehen, ob dabei Werthe von x, für welche y zu Null wird, vorkommen müssen oder nicht.

Nun ist es bekannt genug, dass, so lange man sich auf das Gebiet der reellen Zahlen beschränkt, diese Frage nicht allgemein bejaht werden kann; im Gegentheil lassen sich der Functionen unzählige anführen (z. B. $y=x^2+4$), welche, wenn man x alle reellen Werthe von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$ durchlaufen lässt, für keinen dieser Werthe zu Null werden, so dass mithin Gleichungen wie $x^2+4=0$ innerhalb des Gebietes der reellen Zahlen völlig ohne Sinn bleiben. Indessen da man in so einfachen Fällen, wie das hier beispielsweise angeführte $x^2+4=0$, immer sofort Wurzeln der Gleichung anzugeben im Stande ist, sobald man die Erweiterung des Zahlenbegriffs auf das Gebiet der imaginären Zahlen in die Betrachtung hineinzieht, so entsteht die Vermuthung, dass sich die obige Frage mit Zuziehung dieser Erweiterung vielleicht allgemein bejahend werde zur Entscheidung bringen lassen. Damit sind wir auf dem gewöhnlichen Standpunkte, von welchem diese Frage pflegt vorgelegt zu werden, angelangt.

2.

Es sei x eine complexe Veränderliche von der Form

$$x=\varrho(\cos\varphi+i\sin\varphi), \qquad (2)$$

wo ϱ nur positiv sein kann, und i, wie gewöhnlich, die positive imaginäre Einheit bezeichnet; und durch Substitution derselben in die obige Function (1) nehme y die Gestalt an

$$y = P(\cos\Phi + i\sin\Phi),$$

so wird man für die in Rede stehende Betrachtung die Veränderliche x alle möglichen complexen Werthe durchlaufen lassen, und dabei fortwährend die zugehörigen complexen Werthe von y ins Auge fassen, mit der beständigen Rücksicht, ob nicht unter den letzteren auch der Werth $y=0$ vorkomme. Die Veränderlichkeit von x aber ist an diejenige sowohl von ϱ als von φ gebunden, und um alle Werthe von x zum Vorschein kommen zu lassen, wird man nicht nur ϱ durch alle Werthe von $\varrho=0$ bis $\varrho=\infty$ hindurchführen, sondern es wird zugleich daneben auch φ alle Werthe von einem beliebigen Werthe $\varphi=\varphi_0$ ausgehend bis $\varphi=\varphi_0+2\pi$ zu durchlaufen haben.

Hält man zunächst und für einen Augenblick einen beliebigen, jedoch von den beiden äussersten Gränzen $\varrho=0$ und $\varrho=\infty$ verschiedenen Werth von ϱ, welcher $=\varrho_0$ sei, fest, und setzt dabei zugleich $\varphi=\varphi_0$, so hat man vermöge der Gleichung (1) sofort einen bestimmten gehörigen Werth von y, $y=y_0$, welcher in der Ebene der complexen Zahlen irgend einen gleichviel wo liegenden Punkt repräsentiren wird. Lässt man nun φ continuirlich sich ändern, jedoch noch immer unter Festhaltung jenes Werthes $\varrho=\varrho_0$, so wird auch vermöge der Continuität der Function (1) der Werth von y continuirlich ein anderer werden, und folglich der dadurch repräsentirte Punkt in der Ebene der complexen Zahlen eine krumme Linie beschreiben, welche sich mit dem Werthe $\varphi=\varphi_0+2\pi$ in sich selbst abschliesst, indem hier wieder der anfängliche Werth $y=y_0$ zum Vorschein kommt. Wenn man nun endlich auch ϱ sich ändern lässt, so wird jedem andern Werthe von ϱ eine andere Curve der so eben beschriebenen Art zugehören, ferner wird ein continuirliches Wachsen von ϱ zugleich auch einen continuirlichen Uebergang von Curve zu Curve zur Folge haben; und wenn man demnach jetzt die gesammte Succession dieser Curven von $\varrho=0$ bis $\varrho=\infty$ ins Auge fasst, so wird sich's dabei entscheiden müssen, ob unter ihnen auch mindestens eine vorkommt, die durch den Nullpunkt der Ebene hindurchgeht und mithin den Werth $y=0$ in sich enthält.

3.

Man betrachte abgesondert die beiden äussersten Gränzfälle, welche den Werthen $\varrho=0$ und $\varrho=\infty$ entsprechen.

1) Für $\varrho=0$ reducirt sich der Werth der Function (1) auf

$$y = a_n,$$

mithin degenerirt hier die in Rede stehende Curve zu einem Punkte, dessen Lage in der Ebene durch die von Null verschiedene complexe Zahl a_n festgestellt wird. Dieser Punkt bildet mithin den Ausgangspunkt für die mit wachsenden Werthen von ϱ zu Stande kommenden Curven.

2) Für $\varrho=\infty$ wird man zu dem entsprechenden Resultate am leichtesten gelangen, wenn man zuvor die Gleichung (1) auf die Form bringt

$$\frac{y}{x^n}=1+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\dots+\frac{a_n}{x^n},$$

woraus man für $\varrho=\infty$ schliesst

$$\lim\left(\frac{y}{x^n}\right)=1. \qquad (3)$$

Diese Gleichung spricht den in der Theorie der Gleichungen auch sonst vielfach zur Anwendung kommenden Satz aus, dass die Function (1) desto näher mit ihrem höchsten Gliede zusammenfällt, je grösser der Modulus ϱ der Veränderlichen x angenommen wird; welcher Satz mithin, da er an sich schon jedenfalls in der Theorie der Gleichungen bewiesen werden müsste, hier um so unbedenklicher benutzt werden darf.

Statt dieser Gleichung (3) kann man auch schreiben

$$\frac{y}{x^n}=1+\varepsilon,$$

wo ε eine für $\varrho=\infty$ verschwindende complexe Zahl bezeichnet; und daraus hat man

$$y=x^n(1+\varepsilon),$$

oder vermöge der Gleichung (2):

$$y=\varrho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)(1+\varepsilon). \qquad (4)$$

Dieser Ausdruck führt nun sofort zur Kenntniss der näheren Beschaffenheit der oben bezeichneten Curven für denjenigen Fall, wo ϱ selbst ohne Gränzen zunimmt. Wie nämlich auch ϱ beschaffen sein mag, so liefert jedenfalls der erste Factor des Ausdrucks (4), nämlich der Ausdruck

$$\varrho^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

stets, für einen bestimmten Werth von ϱ, einen aus dem Nullpunkte der Ebene als Mittelpunkt beschriebenen Kreis, dessen Halbmesser $=\varrho^n$ ist und dessen Peripherie $n$mal nach einander durchlaufen wird, während φ von $\varphi=\varphi_0$ bis $\varphi=\varphi_0+2\pi$ sich ändert. Dieser Kreis ist nun zwar noch nicht selbst die hier in Frage kommende Curve, indem vielmehr zu deren Herstellung, vermöge des Ausdrucks (4), sämmtliche Punkte einer jeden einzelnen Umdrehung des Kreises zuvor noch eine Correction durch den von der Einheit verschiedenen Factor $1+\varepsilon$, gleichsam eine Verschiebung in der Ebene, zu erleiden haben. Indessen da ε eine mit den wachsenden Werthen von ϱ unendlich abnehmende Zahl bezeichnet, also der Factor $1+\varepsilon$ gegen die Einheit convergirt, so kommt eben deshalb die fragliche Curve einem aus dem Nullpunkt der Ebene als Mittelpunkt beschriebenen Kreise desto näher, je grösser ϱ angenommen wird, und fällt endlich — falls

man diese Ausdrucksweise noch zulassen will — für $\varrho=\infty$ mit einem solchen Kreise selbst zusammen.

4.

Ueberblickt man von dem hier gewonnenen Standpunkte aus das System aller den verschiedenen Werthen von ϱ entsprechenden Curven; von dem Punkte für $\varrho=0$ einerseits, bis zu dem Kreise für $\varrho=\infty$ andererseits, und nimmt überdies auf die Continuität der Function (I) Rücksicht, so gelangt man leicht zu dem hier endlich beabsichtigten Schlusse.

Alle Curven nämlich, welche sehr kleinen Werthen von ϱ entsprechen, werden sich ihrer ganzen Erstreckung nach in der Nähe des für $\varrho=0$ geltenden Punktes halten, und mithin, da dieser Punkt von dem Nullpunkte der Ebene verschieden ist, den genannten Nullpunkt ausser sich lassen. Alle Curven dagegen, welche sehr grossen Werthen von ϱ zugehören, werden der für $\varrho=\infty$ stattfindenden Kreisform nahe kommen, und mithin, da dieser Kreis den Nullpunkt der Ebene zu seinem Mittelpunkte hat, diesen Nullpunkt gleichfalls in sich einschliessen. Von den Curven der ersten Art zu den Curven der zweiten Art muss es also, wegen der Continuität der Function, nothwendig mindestens eine Uebergangs-Curve geben, welche durch den Nullpunkt der Ebene selbst hindurchgeht; und hierin ist laut dem Obigen das vorliegende Theorem bewiesen.

Man erkennt leicht, dass dieser Beweis völlig unabhängig von der Beschaffenheit der Coefficienten a_1, $a_2, \ldots a_n$ ist, die demnach beliebige reelle oder selbst complexe Werthe haben dürfen. Nur der Fall $a_n=0$ musste ausgeschlossen bleiben, in welchem Falle übrigens die Richtigkeit des Satzes auf der Hand liegt.

Zu weiteren Folgerungen über die Natur der Wurzeln oder Mitteln zur Berechnung derselben dürfte indessen der hier eingeschlagene Weg schon deshalb keinen Beitrag liefern, weil in ihm die unabhängige Veränderliche selbst gar nicht sichtbar hervorgetreten ist.

XXII.

Uebungsaufgaben für Schüler.

Von dem Herrn Doctor T. Wittstein zu Hannover.

Nicht allein den richtigen Weg zu lehren, sondern auch zu zeigen wie man es nicht machen darf, und damit den Schü-

ler vor nahe liegenden Fehlern zu hüten, scheint eine Hauptaufgabe des Lehrers zu sein. In diesem Sinne möchten sich Fragen wie die folgenden zweckmässig zu Aufgaben für Schüler eignen.

1. Aus der Gleichung

$$x^2-2ax+a^2=a^2-2ax+x^2$$

zieht man durch Wurzelausziehung

$$x-a=a-x,$$

woraus folgt

$$x=a,$$

während die gegebene Gleichung auch für jeden von a verschiedenen Werth des x Gültigkeit behält. Wo liegt der Fehlschluss?

2. Aus der Gleichung

$$a-\sqrt{x}=b$$

erhält man

$$-\sqrt{x}=b-a$$
$$x=(b-a)^2;$$

die Probe aber gibt statt der identischen Gleichung, die sie liefern müsste, die folgende:

$$a-\sqrt{(b-a)^2}=b,$$
$$a-(b-a)\quad=b,$$
$$a=b.$$

Wo liegt der Fehlschluss?

3. Wenn man die Gleichung

$$x-a=0$$

auf beiden Seiten durch $x-a$ dividirt, so erhält man

$$\frac{x-a}{x-a}=\frac{0}{x-a}$$

oder

$$1=0.$$

Wo liegt der Fehlschluss?

Anmerkung. Der Widerspruch wird dem Schüler in der Regel noch sichtbarer, wenn man für die Buchstaben bestimmte Zahlen setzt. So z. B. wenn man in der zweiten Aufgabe als gegeben annimmt

$$3-\sqrt{x}=7,$$

so erhält man $x=16$, und die Probe liefert [illegible]ruch $-1=7$.

Von dem Herrn Doctor **Dienger** zu Sinsheim bei Heidelberg.

I.

$$\frac{1}{3}\frac{m\cos\varphi}{1}-\frac{1}{5}\frac{m^3\cos3\varphi}{1.2.3}+\frac{1}{7}\frac{m^5\cos5\varphi}{1.2....5}-....$$

$$....(-1)^r\frac{1}{2r+3}\frac{m^{2r+1}\cos(2r+1)\varphi}{1.2....(2r+1)}-....$$

$$=\frac{e^{-m\sin\varphi}+e^{m\sin\varphi}}{2m^2}\sin(m\cos\varphi).\cos2\varphi$$

$$+\frac{e^{m\sin\varphi}-e^{-m\sin\varphi}}{2m^2}\cos(m\cos\varphi).\sin2\varphi$$

$$-\frac{e^{-m\sin\varphi}+e^{m\sin\varphi}}{2m}\cos(m\cos\varphi).\cos\varphi$$

$$-\frac{e^{-m\sin\varphi}-e^{m\sin\varphi}}{2m}\sin(r\cos\varphi).\sin\varphi.$$

II.

$$\frac{1}{3}\frac{m\sin\varphi}{1}-\frac{1}{5}\frac{m^3\sin3\varphi}{1.2.3}+\frac{1}{7}\frac{m^5\sin5\varphi}{1.2....5}-....$$

$$=\frac{e^{m\sin\varphi}-e^{-m\sin\varphi}}{2m^2}\cos.(m\cos\varphi)\cos2\varphi$$

$$-\frac{e^{-m\sin\varphi}+e^{m\sin\varphi}}{2m^2}\sin(r\cos\varphi).\sin2\varphi$$

$$+\frac{e^{-m\sin\varphi}+e^{m\sin\varphi}}{2m}\cos(r\cos\varphi).\sin\varphi$$

$$-\frac{e^{-m\sin\varphi}-e^{m\sin\varphi}}{2m}\sin(r\cos\varphi).\cos\varphi,$$

wenn $m>0$ und φ beliebig ist.

III.

$$(r+1).\frac{1}{2}+11r.\frac{1}{2^2.4}+21(r-1).\frac{1^2}{2^2.4^2.6}+31(r-2).\frac{1^2.3^2}{2^2.4^2.6^2.8}$$

$$+....+(10r+1).1.\frac{1^2.3^2....(2r-3)^2}{2^2.4^2.6^2....(2r^2)(2r+2)}$$

$$=\frac{1^2.3^2.5^2....(2r-1)^2(2r+1)^2(2r+1)}{2^2.4^2.6^2....(2r)^2(2r+2)}.$$

XXIII.

Miscellen.

Bemerkungen zur sphärischen Trigonometrie.

Von dem Herausgeber.

Wir wollen uns ein gleichschenkliges rechtwinkliges sphäri-
es Dreieck denken, dessen Hypotenuse a ist und dessen ein-
er gleiche Katheten b, b sind. Bezeichnen wir den Flächen-
alt dieses sphärischen Dreiecks durch $\varDelta$, so ist nach einer
annten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\operatorname{tang}\varDelta=\frac{\sin^2 b}{2\cos b}=\frac{1-\cos^2 b}{2\cos b},$$

$$\cos^2 b+2\operatorname{tang}\varDelta\cos b=1.$$

st man nun diese quadratische Gleichung in Bezug auf $\cos b$
unbekannte Grösse auf, so erhält man

$$(\cos b+\operatorname{tang}\varDelta)^2=1+\operatorname{tang}^2\varDelta=\sec^2\varDelta,$$

$$\cos b+\operatorname{tang}\varDelta=\pm\sec\varDelta,$$

hieraus

$$\cos b=-\operatorname{tang}\varDelta\pm\sec\varDelta=\pm\frac{1\mp\sin\varDelta}{\cos\varDelta},$$

sich nun frägt, welche Zeichen man zu nehmen hat. Wenn aber

$$0<b<90^0$$

, so ist nach den Principien der sphärischen Trigonometrie auch

$$0 < B < 90^0,$$

folglich

$$0 < 2B < 180^0;$$

weil nun bekanntlich

$$\varDelta = 2B - 90^0$$

ist, so ist offenbar

$$0 < \varDelta < 90^0,$$

und $\cos b$, $\cos\varDelta$ sind daher beide positiv. Wenn ferner

$$90^0 < b < 180^0$$

ist, so ist nach den Principien der sphärischen Trigonomet

$$90^0 < B < 180^0,$$

folglich

$$180^0 < 2B < 360^0;$$

weil nun bekanntlich

$$\varDelta = 2B - 90^0$$

ist, so ist offenbar

$$90^0 < \varDelta < 270^0,$$

und $\cos b$, $\cos\varDelta$ sind daher beide negativ Also habe cos$\varDelta$ stets gleiche Vorzeichen, und weil nun $1 \mp \sin\varDelta$ j positiv ist, so muss man in der Gleichung

$$\cos b = \pm \frac{1 \mp \sin\varDelta}{\cos\varDelta}$$

offenbar die obern Zeichen nehmen, d. h. man muss

$$1) \quad \cos b = \frac{1 - \sin\varDelta}{\cos\varDelta}$$

setzen.

Haben wir nun ein beliebiges rechtwinkliges sphärisch eck, dessen Hypotenuse a ist und dessen Katheten b, c s wollen wir uns über den drei Seiten dieses sphärischen D sphärische Quadrate beschrieben denken, und deren I welche offenbar gleichschenklige rechtwinklige sphärische D sind, respective durch $\varDelta_a$, $\varDelta_b$, $\varDelta_c$ bezeichnen. Dann ist

$$\cos a = \frac{1 - \sin\varDelta_a}{\cos\varDelta_a},$$

$$\cos b = \frac{1 - \sin\varDelta_b}{\cos\varDelta_b},$$

$$\cos c = \frac{1 - \sin\varDelta_c}{\cos\varDelta_c}.$$

Weil aber nach einer bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\cos a = \cos b \cos c$$

ist, so ist

$$2)\quad \frac{1-\sin \varDelta_a}{\cos \varDelta_a} = \frac{(1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c)}{\cos \varDelta_b \cos \varDelta_c}.$$

Da nun

$$\sin \varDelta_a = \pm \sqrt{1-\cos^2 \varDelta_a}$$

ist, so ist

$$\frac{1 \mp \sqrt{1-\cos^2 \varDelta_a}}{\cos \varDelta_a} = \frac{(1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c)}{\cos \varDelta_b \cos \varDelta_c},$$

folglich

$$1 - \frac{(1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c)}{\cos \varDelta_b \cos \varDelta_c} \cos \varDelta_a = \pm \sqrt{1-\cos^2 \varDelta_a},$$

also, wenn man quadrirt und aufhebt, was sich aufheben lässt:

$$\frac{(1-\sin \varDelta_b)^2(1-\sin \varDelta_c)^2 + \cos^2 \varDelta_b \cos^2 \varDelta_c}{\cos^2 \varDelta_b \cos^2 \varDelta_c} \cos \varDelta_a$$
$$= \frac{2(1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c)}{\cos \varDelta_b \cos \varDelta_c},$$

oder, weil

$$\cos^2 \varDelta_b \cos^2 \varDelta_c = (1-\sin^2 \varDelta_b)(1-\sin^2 \varDelta_c)$$
$$= (1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c).(1+\sin \varDelta_b)(1+\sin \varDelta_c)$$

ist:

$$\{(1-\sin \varDelta_b)(1-\sin \varDelta_c) + (1+\sin \varDelta_b)(1+\sin \varDelta_c)\} \cos \varDelta_a$$
$$= 2 \cos \varDelta_b \cos \varDelta_c,$$

woraus sich leicht

$$(1+\sin \varDelta_b \sin \varDelta_c) \cos \varDelta_a = \cos \varDelta_b \cos \varDelta_c,$$

folglich

$$3)\quad \cos \varDelta_a = \frac{\cos \varDelta_b \cos \varDelta_c}{1+\sin \varDelta_b \sin \varDelta_c}$$

ergiebt.

Ferner ist

$$\cos \varDelta_a = \pm \sqrt{1-\sin^2 \varDelta_a},$$

und folglich nach 2):

$$\pm\frac{1-\sin\varDelta_a}{\sqrt{1-\sin^2\varDelta_a}}=\frac{(1-\sin\varDelta_b)(1-\sin\varDelta_c)}{\cos\varDelta_b\cos\varDelta_c},$$

also

$$(1-\sin\varDelta_a)^2=\frac{(1-\sin\varDelta_b)^2(1-\sin\varDelta_c)^2}{\cos^2\varDelta_b\cos^2\varDelta_c}(1-\sin^2\varDelta_a)$$

oder

$$(1-\sin\varDelta_a)^2=\frac{(1-\sin\varDelta_b)^2(1-\sin\varDelta_c)^2}{(1-\sin^2\varDelta_b)(1-\sin^2\varDelta_c)}(1-\sin^2\varDelta_a),$$

d. i.

$$1-\sin\varDelta_a=\frac{(1-\sin\varDelta_b)(1-\sin\varDelta_c)}{(1+\sin\varDelta_b)(1+\sin\varDelta_c)}(1+\sin\varDelta_a),$$

oder

$$\frac{1-\sin\varDelta_a}{1+\sin\varDelta_a}=\frac{(1-\sin\varDelta_b)(1-\sin\varDelta_c)}{(1+\sin\varDelta_b)(1+\sin\varDelta_c)}.$$

Also ist

$$\sin\varDelta_a=\frac{(1+\sin\varDelta_b)(1+\sin\varDelta_c)-(1-\sin\varDelta_b)(1-\sin\varDelta_c)}{(1+\sin\varDelta_b)(1+\sin\varDelta_c)+(1-\sin\varDelta_b)(1-\sin\varDelta_c)},$$

woraus leicht

$$4)\quad \sin\varDelta_a=\frac{\sin\varDelta_b+\sin\varDelta_c}{1+\sin\varDelta_b\sin\varDelta_c}$$

erhalten wird.

Aus 3) und 4) folgt sogleich

$$5)\quad \tang\varDelta_a=\frac{\sin\varDelta_b+\sin\varDelta_c}{\cos\varDelta_b\cos\varDelta_c}$$

oder

$$6)\quad \tang\varDelta_a=\tang\varDelta_b\sec\varDelta_c+\tang\varDelta_c\sec\varDelta_b.$$

Aus 3) ergiebt sich auch leicht

$$1-\cos\varDelta_a=\frac{1-\cos(\varDelta_b+\varDelta_c)}{1+\sin\varDelta_b\sin\varDelta_c},$$

$$1+\cos\varDelta_a=\frac{1+\cos(\varDelta_b-\varDelta_c)}{1+\sin\varDelta_b\sin\varDelta_c};$$

d. i.

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varDelta_a=\frac{\sin^2\frac{1}{2}(\varDelta_b+\varDelta_c)}{1+\sin\varDelta_b\sin\varDelta_c},$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}\varDelta_a=\frac{\cos^2\frac{1}{2}(\varDelta_b-\varDelta_c)}{1+\sin\varDelta_b\sin\varDelta_c};$$

also

$$7)\quad \operatorname{tang}^2\tfrac{1}{2}\Delta_a = \frac{\sin^2\tfrac{1}{2}(\Delta_b + \Delta_c)}{\cos^2\tfrac{1}{2}(\Delta_b - \Delta_c)}.$$

Nach 3) ist auch

$$8)\quad \sec\Delta_a = \sec\Delta_b \sec\Delta_c + \operatorname{tang}\Delta_b \operatorname{tang}\Delta_c.$$

Die weitere Ausführung dieser Betrachtungen, zu denen der Versuch, einen dem pythagoräischen Lehrsatze analogen Satz für rechtwinklige sphärische Dreiecke zu finden, Veranlassung gegeben hat, möge dem Leser überlassen bleiben.

Bemerkungen zur ebenen Trigonometrie.

Von dem Herausgeber.

Die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks kann man aus dem sehr leicht zu beweisenden Satze, dass in jedem ebenen Dreiecke die Seiten sich wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten, analytisch auf folgende Art ableiten.

Weil in jedem ebenen Dreiecke

$$A + B + C = 180^0$$

ist, so ist

$$\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C,$$
$$\cos A = -\cos(B + C) = -\cos B \cos C + \sin B \sin C.$$

Nach dem angeführten ersten trigonometrischen Hauptlehrsatze ist aber

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c},$$

folglich

$$\sin B = \frac{b}{a}\sin A = bx,$$

$$\sin C = \frac{c}{a}\sin A = cx;$$

wenn wir der Kürze wegen

$$x = \frac{\sin A}{a}$$

setzen. Also ist

$$\cos B = \sqrt{1 - b^2x^2},\ \cos C = \sqrt{1 - c^2x^2};$$

wenn man nur die Quadratwurzeln

$$\sqrt{1 - b^2x^2},\ \sqrt{1 - c^2x^2}$$

positiv oder negativ nimmt, jenachdem respective die Winkel B, C

spitz oder stumpf sind. Unter dieser Voraussetzung ist daher nach dem Obigen

$$\sin A = bx\sqrt{1-c^2x^2} + cx\sqrt{1-b^2x^2},$$

$$\cos A = bcx^2 - \sqrt{1-b^2x^2}\,.\,\sqrt{1-c^2x^2};$$

also

$$\sin^2 A = b^2x^2(1-c^2x^2) + c^2x^2(1-b^2x^2) + 2bcx^2\sqrt{1-b^2x^2}\,.\,\sqrt{1-c^2x^2},$$

$$\sqrt{1-b^2x^2}\,.\,\sqrt{1-c^2x^2} = bcx^2 - \cos A;$$

folglich

$$\sin^2 A = b^2x^2(1-c^2x^2) + c^2x^2(1-b^2x^2) + 2bcx^2(bcx^2 - \cos A)$$
$$= (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)x^2$$
$$= (b^2 + c^2 - 2bc\cos A)\frac{\sin^2 A}{a^2};$$

also

$$\frac{b^2 + c^2 - 2bc\cos A}{a^2} = 1,$$

oder

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

welches die bekannte Relation zwischen den drei Seiten und einem Winkel eines ebenen Dreiecks ist, welche wir hier beweisen wollten.

Eine andere Behandlung dieses ganz elementaren Gegenstandes s. m. Archiv. Thl. II. S. 215.

Ueber den Verlust an Elektrizität durch die Luft.

Von dem Herrn Doctor Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Da die elektrischen Körper bekanntlich ihre Elektrizität durch die Luft nach und nach verlieren, so nimmt man bei den Untersuchungen mittelst der Drehwage gewöhnlich das arithmetische Mittel zwischen zwei Intensitäten, die man an der gleichen Stelle, aber zu verschiedenen Zeiten, erhielt. (Man sehe z. B. Müller, Lehrbuch der Physik und Meteorologie, II. Bd. S. 86.)

Es scheint diess aber ganz genau nicht zu sein, vielmehr die Berechnung auf folgende Art geschehen zu müssen:

Es sei die in einer unendlich kleinen Zeit τ abgegangene Elektrizität proportional dieser Zeit und der ganzen Ladung im Anfang dieser Zeit, was darauf zurückkommt, diese Ladung während der Zeit τ als konstant zu betrachten. Heisst also A die Ladung, so ist der Verlust in der Zeit τ gleich $mA\tau$, wenn m eine konstante Grösse ist, die von dem Zustande der Luft abhängt,

Demnach ist die Ladung zu Anfang der zweiten Zeit τ: $A(1-m\tau)$, während der Verlust in dieser Zeit wieder $A(1-m\tau)m\tau$, also die Ladung am Ende der Zeit 2τ noch $A(1-m\tau)^2$ ist. Geht man so fort, so findet man, dass die Ladung am Ende der Zeit $n\tau$ noch $A(1-m\tau)^n$ ist. Nun ist

$$(1-m\tau)^n=[(1-m\tau)^{-\frac{1}{m\tau}}]^{-mt},$$

wenn $n\tau=t$ eine endliche Zeit bedeutet. In dieser Voraussetzung ist n unendlich gross, während τ unendlich klein ist. Nach Cauchy, Differentialrechnung Seite 4., ergiebt sich, dass für τ unendlich klein $(1-m\tau)^{-\frac{1}{m\tau}}=e$, also für n unendlich gross

$$(1-m\tau)^n=e^{-mt}$$

st. Demnach ist die Ladung am Ende der Zeit t, wenn sie zu Anfang derselben A war, noch $A.e^{-mt}$. Heisst B_2 also die Ladung am Ende der Zeit $2t$, B_1 die am Ende der Zeit t, so ist

$$B_1=Ae^{-mt},\quad B_2=Ae^{-2mt},$$

lemnach

$$B_1=\sqrt{AB_2},$$

l. h. um die Ladung am Ende der Zeit t zu finden, wenn man lie zu Anfang dieser Zeit und die zu Ende der Zeit $2t$ kennt, immt man aus diesen letztern zwei das geometrische Mittel.

Heisst allgemein A die Ladung zu Anfang, A_n die zu Ende ler Zeit nt, A_{n+1} zu Ende der Zeit $(n+1)t$, A_{n+2} zu Ende der Zeit $(n+2)t$, so ist:

$$A_n=Ae^{-mnt},$$
$$A_{n+1}=Ae^{-m(n+1)t},$$
$$A_{n+2}=Ae^{-m(n+2)t};$$

oraus folgt:

$$A_{n+1}=\sqrt{A_n.A_{n+2}}.$$

Hiernach müssen also die Formeln, wie sie z. B. Lamé in dem ours de Physique de l'Ecole polyt. §. 686. aufstellt, modiizirt werden. Setzt man m als klein voraus, so könnte man auch aben:

$$A_n=A(1-mnt+\ldots.),$$
$$A_{n+1}=A(1-m(n+1)t+\ldots.),$$
$$A_{n+2}=A(1-m(n+2)t+\ldots.);$$

lso, wenn man die höhern Potenzen als die erste von m vernachlässigt:

$$A_{n+1}=\frac{A_n+A_{n+2}}{2}$$

ach der gewöhnlichen Rechnungsweise.

Zur Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche.

Von dem Herrn Doctor Dienger zu Sinsheim bei Heidelberg.

Da ich mich nicht erinnere, gelesen zu haben, wie man die Anzahl der Dezimalstellen bestimmt, die sich ergeben, wenn man einen gewöhnlichen Bruch in einen Dezimalbruch verwandelt, so will ich hier diese Bestimmung andeuten. Dabei setze ich immer Brüche voraus, die sich nicht mehr abkürzen lassen.

1) Alle gemeinen Brüche, deren Nenner bloss aus den einfachen Faktoren 2 und 5 besteht, lassen sich genau in Dezimalbrüche verwandeln. Diese Faktoren können jeder vielmal vorkommen, entweder beide Arten zugleich oder nur eine allein.

2) Um zu unterscheiden, wie viele Stellen (nach der Stelle der Ganzen) der entstehende Dezimalbruch habe, müssen wir folgende Fälle unterscheiden:

a) Der Nenner enthält bloss den Faktor 2; alsdann enthält der aus dem Bruche entstehende Dezimalbruch so viele Stellen, als der Nenner Faktoren 2.

b) Das Gleiche gilt, wenn man in *a*) statt 2 setzt 5.

c) Der Nenner enthält sowohl den Faktor 2, als den 5.

α) Er enthält mehr 2 als 5; alsdann erhält der Dezimalbruch so viel Stellen, als der Nenner Faktoren 2.

β) Er enthält mehr 5 als 2; alsdann erhält der Dezimalbruch so viel Stellen, als der Nenner Faktoren 5.

3) Alle gemeinen Brüche, deren Nenner nicht einzig die einfachen (Prim-) Faktoren 2 und 5 enthält, lassen sich nicht genau in Dezimalbrüche verwandeln. Sie geben unendliche, periodische Dezimalbrüche.

4) Enthält der Nenner nebst anderen einfachen Faktoren noch die Faktoren 2 und 5, so hat man die vier Fälle von No. 2) zu unterscheiden. Alsdann enthält der Dezimalbruch so viele sich nicht wiederholende Stellen nach dem Komma, als der Dezimalbruch im Ganzen Stellen erhalten würde, wenn die den Faktoren 2 und 5 fremden Faktoren nicht vorhanden wären.

Multiplizirt man alle einfachen, von 2 und 5 verschiedenen Faktoren, so enthält der Dezimalbruch nach den sich nicht wiederholenden Stellen höchstens so viele sich wiederholende Stellen, als diess Produkt Einheiten enthält, wenn 1 davon abgezogen wird.

Diese letzte Regel gilt auch für den Fall, dass der Nenner weder den Faktor 2, noch den Faktor 5 enthält; alsdann wiederholt sich nothwendig die erste Stelle nach dem Komma. *)

*) Man vergleiche den Aufsatz in dem Archiv. Thl. I. Nr. XVI. von dem Herrn Dr. J. A. Arndt zu Torgau.

XXIV.

Ueber die Complanation des elliptischen und hyperbolischen Paraboloides.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Die Gleichungen des elliptischen und hyperbolischen Parabo-
des lassen sich bekanntlich in den Formen

$$1.\quad \frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

$$2.\quad \frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$$

rstellen, und hier kann man die constanten geraden Linien a, b, c
e Achsen der Paraboloide nennen, eine Bezeichnung, welche
it der beim Ellipsoide gebräuchlichen, wo

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$$

t, sehr gut übereinstimmt. Will man jene Achsen selbst sehen,
braucht man die in Rede stehenden Flächen nur durch eine
bene zu schneiden, welche der Coordinatenebene xy in der Ent-
nung $z=c$ parallel läuft. Die Gleichungen der entstehenden
chnitte sind dann

$$1=\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2,$$

$$1=\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2$$

d folglich die Schnitte selbst eine Ellipse und eine Hyperbel
it den Halbachsen a und b.

Um nun die gedachten Flächen zu complaniren, benutzei die allgemeine Formel

$$3.\quad \Omega=\iint dxdy\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2},$$

und haben nach No. 1. für den Fall eines elliptischen Parabol

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{2c}{a^2}x,\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=\frac{2c}{b^2}y;$$

und für den Fall eines hyperbolischen Paraboloides

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)=\frac{2c}{a^2}x,\quad \left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{2c}{b^2}y.$$

Substituiren wir diess in die Formel 3., so ist in jedem Fa

$$4.\quad \Omega=\iint dxdy\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^4}x^2+\frac{4c^2}{b^4}y^2},$$

wo die Integrationsgränzen noch zu bestimmen sind. Wir bet ten nun folgende zwei Fälle. In Taf. VI. Fig. 1. seien OA, und OC die drei Achsen a, b, c der Fläche (hier eines el schen Paraboloides), so wollen wir die Grösse derjenigen St ihres Mantels bestimmen, deren Projektion auf die Ebene xy weder das Dreieck OAB oder den Ellipsenquadranten OA ausmachen. Sind nun $OM=x$ und $MN=y$ die Coordinaten ir eines Punktes in der Ebene xy, so müssen im ersten Falle Gränzen für x und y so gewählt werden, dass der Punkt N Punkte im Innern des Dreiecks OAB aber keine ausserhalb selben liegenden betritt. Da M unter dieser Bedingung zwis O und A beliebig liegen darf, so ergeben sich hieraus für x Gränzen

$$x=0,\quad x=OA=a.$$

Hat man nun dem x irgend einen individuellen Werth OM in halb dieses Intervalles gegeben, so steht jetzt dem $y=MN$ der Spielraum $y=0$ bis $y=MN'$ offen, da N beliebig zwische und N' liegen darf. Bestimmt man MN' aus der Propor $OA:OB=MA:MN'$, so sind die Gränzen für y:

$$y=0,\quad y=b(1-\frac{x}{a}).$$

Substituiren wir diess in No. 4. und nennen P die Fläche OUR deren Projektion auf die Ebene xy das Dreieck OAB ausma so ist

$$5.\quad P=\int_0^a dx\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} dy\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^4}x^2+\frac{4c^2}{b^4}y^2}.$$

Wollen wir dagegen die Fläche $OUSVO$ berechnen, deren
'rojektion auf xy der Ellipsenquadrant $OAN''B \cong CUSV$ ist, so
üssen die Gränzen für x und y so gewählt werden, dass der
unkt N alle Punkte innerhalb dieses Ellipsenquadranten, aber
eine anderen Punkte der Ebene xy betritt. Die Gränzen für x
nd y sind daher

$$x=0,\ x=OA;\ y=0,\ y=MN'';$$

h.

$$x=0,\ x=a;\ y=0,\ y=b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2};$$

eil OM und MN'' die Gleichung der Ellipse $CUSV=OAN''B$
friedigen müssen. Nennen wir Q die Fläche $OUSVO$, so ist
tzt:

$$6.\quad Q=\int_0^a dx\int_0^{b\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}} dy\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^4}x^2+\frac{4c^2}{b^4}y^2}.$$

Man kann diese Integrale noch etwas vereinfachen, wenn man
e Substitutionen $x=a\xi$, $y=b\eta$ vornimmt. Setzt man nämlich
No. 5. zunächst $x=a\xi$, so wird $dx=ad\xi$, und die Integrations-
[illegible] für ξ bestimmen sich jetzt aus den Gleichungen $x=0$,
$=a$ oder $a\xi=0$, $a\xi=a$; es wird daher zunächst

$$P=a\int_0^1 d\xi\int_0^{b(1-\xi)} dy\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^2}\xi^2+\frac{4c^2}{b^4}y^2}.$$

bstituirt man nun $y=b\eta$, so erhält man ebenso leicht

$$P=ab\int_0^1 d\xi\int_0^{1-\xi} d\eta\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^2}\xi^2+\frac{4c^2}{b^2}\eta^2}.$$

ie Gleichung 6. geht durch dieselben Substitutionen in die fol-
nde über:

$$Q=ab\int_0^1 d\xi\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\eta\sqrt{1+\frac{4c^2}{a^2}\xi^2+\frac{4c^2}{b^2}\eta^2}.$$

Da es in einem bestimmten Integrale gleichgültig ist, mit
lchem Buchstaben man die Variable der Integration bezeichnet,
darf man auch wieder x und y für ξ und η schreiben; wird
ch zur Abkürzung

$$7.\quad \frac{4c^2}{a^2}=\alpha,\quad \frac{4c^2}{b^2}=\beta$$

setzt, so ist nun

$$8.\quad P=ab\int_0^1 dx\int_0^{1-x} dy\sqrt{1+\alpha x^2+\beta y^2}$$

und

$$9.\quad Q=ab\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy\sqrt{1+\alpha x^2+\beta y^2}.$$

Es hätte zwar keine Schwierigkeit, die Integrationen n auszuführen, indem man die bekannte Formel für

$$\int dy\sqrt{h+ky^2}$$

für $h=1+\alpha x^2$, $k=\beta$ in Anwendung brächte, man würde abe bei auf logarithmische Funktionen kommen und sich die übrig bleibende Integration in Bezug auf x in eine sehr unbeq Form stellen. Wir schlagen daher einen anderen Weg ein, cher auf dem folgenden Theoreme beruht: wenn $\varphi(r,x)$ ein $x=r$ sich annullirende Funktion bezeichnet, so gilt die Glei

$$10.\quad \int_0^1 dx\int_0^{\varphi(1,x)} dy f(x,y)$$
$$=\int_0^1 dr\int_0^r f[x,\varphi(r,x)]\left(\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right)dx,$$

worin die Differenziation von $\varphi(r,x)$ in Bezug auf r partiell zuführen ist *).

I. Um hiernach das Integral in No. 8. zu reduziren, setze

$$\varphi(r,x)=r-x,\quad f(x,y)=\sqrt{1+\alpha x^2+\beta y^2};$$

es ist dann

$$\varphi(1,x)=1-x,\quad \left(\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right)=1;$$
$$f[x,\varphi(r,x)]=\sqrt{1+\alpha x^2+\beta(r-x)^2};$$

und nach Substitution dieser Ausdrücke

$$P=ab\int_0^1 dr\int_0^r dx\sqrt{1+\alpha x^2+\beta(r-x)^2}.$$

Durch die Substitution $x=rz$ ergiebt sich hieraus zunächst

$$P=ab\int_0^1 rdr\int_0^1 dz\sqrt{1+\alpha r^2z^2+\beta r^2(1-z)^2};$$

ferner durch die Substitution $r^2=\varrho$

$$P=\tfrac{1}{2}ab\int_0^1 d\varrho\int_0^1 dz\sqrt{1+\alpha\varrho z^2+\beta\varrho(1-z)^2},$$

und durch Umkehrung der Integrationsordnung

---

*) M. s. mein Handbuch der Differenzial- und Integ rechnung. II. S. 154.

$$P=\frac{1}{2}ab\int_0^1 dz\int_0^1 d\varrho\sqrt{1+\alpha z^2\varrho+\beta(1-z)^2\varrho},$$

ı zur Abkürzung

$$11.\quad \alpha z^2+\beta(1-z)^2=u$$

möge, so dass einfacher oder wenigstens compendiöser

$$P=\frac{1}{2}ab\int_0^1 dz\int_0^1 d\varrho\sqrt{1+u\varrho}$$

Man übersieht nun auf der Stelle, dass sich hier die Inte- ›n nach ϱ ausführen lässt; dieselbe giebt

$$P=\frac{1}{3}ab\int_0^1 dz\frac{\sqrt{(1+u)^3}-1}{u},$$

un statt u sein Werth aus der Gleichung 11. zu substituiren Man kann aber auch u sogleich als neue Variable ansehen ımgekehrt z durch u ausdrücken. Es ist dann aus No. 11.:

$$z=\frac{\beta\pm\sqrt{(\alpha+\beta)u-\alpha\beta}}{\alpha+\beta},$$

$$dz=\pm\frac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta)u-\alpha\beta}}.$$

Venn ferner $z=0$ und $z=1$ geworden ist, hat u die entsprechen- Werthe $u=\beta$, $u=\alpha$ angenommen, und daher ist

$$P=\pm\frac{1}{6}ab\int_\beta^\alpha\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta)u-\alpha\beta}}\frac{\sqrt{(1+u)^3}-1}{u}.$$

Velches Vorzeichen hier zu nehmen sei, entscheidet sich aus Verhältnisse von α und β zu einander. Setzen wir z. B. vor- dass a die grösste unter den Achsen a, b, c sei, so ist $\alpha<\beta$, die obere Integrationsgränze kleiner als die untere, und, wie : zu sehen ist, wird dadurch das Integral an sich (d. h. ab- ıen von $\pm\frac{1}{6}ab$) negativ. Da aber P seiner Natur nach posi- ein muss, so muss das Minuszeichen genommen werden; es ist, wenn man die Integrationsgränzen vertauscht,

$$12.\quad P=\frac{1}{6}ab\int_\alpha^\beta\frac{du}{\sqrt{(\alpha+\beta)u-\alpha\beta}}\frac{\sqrt{(1+u)^3}-1}{u}.$$

)urch diese elegante Formel reduzirt sich die Complanation auf blosse Quadratur, die man bekanntlich immer, wenn auch ıäherungsweis, ausführen kann.

I. Um zweitens die Formel 10. auf das Integral in No. 9. ınden zu können, setzen wir

$$\varphi(r,x)=\sqrt{r^2-x^2}, \quad f(x,y)=\sqrt{1+\alpha x^2+\beta y^2};$$

es wird dann

$$\varphi(1,x)=\sqrt{1-x^2}, \quad \left(\frac{d\varphi(r,x)}{dr}\right)=\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}};$$

$$f[x,\varphi(r,x)]=\sqrt{1+\alpha x^2+\beta(r^2-x^2)};$$

und mithin nach Formel 10. und 9.

$$Q=ab\int_0^1 dr\int_0^r \frac{rdx}{\sqrt{r^2-x^2}}\sqrt{1+\alpha x^2+\beta(r^2-x^2)}.$$

Daraus ergiebt sich zunächst für $x=rz$, wo z die neue Vari bezeichnet,

$$Q=ab\int_0^1 rdr\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1+\alpha r^2z^2+\beta r^2(1-z^2)};$$

ferner durch die Substitution $r^2=\varrho$

$$Q=\tfrac{1}{2}ab\int_0^1 d\varrho\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\sqrt{1+\alpha\varrho z^2+\beta\varrho(1-z^2)},$$

und durch Umkehrung der Integrationsordnung

$$Q=\tfrac{1}{2}ab\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\int_0^1 d\varrho\sqrt{1+\alpha z^2\varrho+\beta(1-z^2)\varrho}$$

$$=\tfrac{1}{2}ab\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\int_0^1 d\varrho\sqrt{1+u\varrho},$$

wenn nämlich zur Abkürzung

$$13. \quad u=\alpha z^2+\beta(1-z^2)$$

gesetzt wird. Führt man nun die Integration in Beziehung aus, so ist

$$Q=\tfrac{1}{3}ab\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}\,\frac{\sqrt{(1+u)^3}-1}{u}.$$

Behalten wir u als neue Variable bei und drücken z durch aus, so wird nach No. 13., wenn $a>b$, also $\alpha<\beta$ ist,

$$z=\sqrt{\frac{\beta-u}{\beta-\alpha}},$$

und daraus findet man sogleich

$$dz=-\tfrac{1}{2}\frac{du}{\sqrt{\beta-\alpha}\sqrt{\beta-u}},$$

$$\sqrt{1-z^2}=\sqrt{\frac{u-\alpha}{\beta-\alpha}}.$$

Wenn ferner $z=0$ und $z=1$ geworden ist, hat u die entsprechenlen Werthe β und α angenommen; so erhalten wir dann

$$Q=-\tfrac{1}{6}ab\int_{\beta}^{\alpha}\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+u)^2}-1}{u},$$

der durch Vertauschung der Integrationsgränzen, wodurch das ntegral positiv wird,

$$14.\quad Q=\tfrac{1}{6}ab\int_{\alpha}^{\beta}\frac{du}{\sqrt{(u-\alpha)(\beta-u)}}\cdot\frac{\sqrt{(1+u)^2}-1}{u},$$

as nicht minder elegant ist als die vorhin für P gefundene Formel.

XXV.

Theorie der Aberration.

Von

dem Herausgeber.

Einleitung.

In den ausführlichern Lehr- und Handbüchern der Astronomie rd die Lehre von der Aberration hauptsächlich nur mit Rücksht auf ihren praktischen Gebrauch in dieser Wissenschaft darstellt, und das Augenmerk vorzüglich bloss auf die Entwickeng möglichst bequemer Näherungsformeln zur Bestimmung des nflusses, welchen die Aberration in den verschiedenen Fällen f die astronomischen Beobachtungen ausübt, gerichtet. Abgehen hiervon hat aber diese Lehre jedenfalls auch für sich ein deutendes theoretisches und rein wissenschaftliches Interesse, d bietet namentlich auch manche interessante geometrische sichtspunkte dar, was mich veranlasst hat, dieselbe in dieser handlung einmal von dieser mehr theoretischen Seite ohne un-

mittelbare Rücksicht auf ihren praktischen Gebrauch in der Astronomie zu entwickeln, indem ich zugleich der Meinung bin, dass eine solche mehr theoretische oder geometrische Darstellung auch sehr geeignet ist, eine recht deutliche Einsicht in die eigentliche Natur des Gegenstandes zu vermitteln, und daher auch für den eigentlichen Astronomen von Nutzen sein wird. Ich bin also in dieser Abhandlung absichtlich zunächst und ganz vorzüglich auf die Entwickelung ganz genauer Formeln, nicht blosser Näherungsformeln, und mit aller Strenge richtiger geometrischer Gesetze ausgegangen, habe jedoch dann auch noch gezeigt, wie sich aus diesen ganz genauen Formeln auch mit Leichtigkeit bequemere Näherungsformeln für den praktischen Gebrauch herleiten lassen, bemerke aber nochmals, dass man diese ganze Abhandlung durchaus mehr von der theoretischen als von der praktischen Seite aufzufassen hat, weshalb ich mich für jetzt auch bloss auf die Bewegung der Erde um die Sonne und auf die Fixsterne beschränkt, die Bewegung der Erde um ihre Axe und die Planeten und Cometen dagegen einstweilen unberücksichtigt gelassen habe, späterhin aber vielleicht noch einmal auf diesen interessanten Gegenstand zurückkommen werde. Uebrigens hoffe ich, dass die von mir in dieser Abhandlung entwickelten neuen Formeln wegen ihrer Eleganz, sowie überhaupt auch die ganze in ähnlicher Weise früher noch nicht gegebene Darstellung, wohl die Aufmerksamkeit des Lesers einigermassen in Anspruch zu nehmen geeignet sein werden.

§. 1.

In Taf. VI. Fig. 2. sei S ein Fixstern, der also seinen Ort selbst nicht verändert, und E_0 sei ein Ort der sich in ihrer elliptischen Bahn um die Sonne bewegenden, hier als ein Punkt betrachteten Erde. Wenn nun die Geschwindigkeit des Lichts gegen die Geschwindigkeit der Erde nicht unendlich gross ist, sondern zu derselben ein bestimmtes, endliches, messbares Verhältniss hat, wie wir bekanntlich nach Römer's höchst merkwürdiger Entdeckung in der That anzunehmen berechtigt sind, so wird der Beobachter sein Fernrohr, wenn er dasselbe nach dem Sterne S richten und diesen Stern wirklich in dem Fernrohre zu Gesicht bekommen will, offenbar, indem er sich in E_0 befindet, nicht direct nach dem Sterne S richten oder in die Lage der von E_0 nach dem Sterne S gerichteten geraden Linie E_0S bringen dürfen, weil ja, wenn er dies thun wollte, wegen der schnell in ihrer Bahn forteilenden Erde, da das Licht das Rohr des Fernrohrs nicht in einer völlig als verschwindend zu betrachtenden Zeit durchläuft, dasselbe in der That gar nicht bis zum Auge des Beobachters gelangen könnte, sondern durch die Wände des mit dem Beobachter zugleich schnell forteilenden Rohrs aufgehalten und in seinem geradlinigen Laufe unterbrochen werden würde, was nothwendig in jedem Punkte der Bahn der Erde der Fall sein muss, so dass also der Beobachter den Stern überhaupt gar nicht zu Gesicht bekommen könnte, wenn er das Fernrohr direct nach dem Sterne richten oder genau in die Lage der von seinem Auge nach dem Sterne gerichteten geraden Linie bringen wollte, was aber, wie gesagt, Alles nur unter der Annahme oder Voraus-

etzung seine Richtigkeit hat, dass die Geschwindigkeit des Lichts egen die Geschwindigkeit der Erde nicht unendlich gross ist, ondern zu derselben ein bestimmtes, endliches, genau messbares 'erhältniss hat. Vielmehr muss der Beobachter, wenn er den tern wirklich zu Gesicht bekommen will, sein Fernrohr, indem r sich in E_0 befindet, in eine solche Lage E_0F_0 bringen, dass in von dem Sterne S ausgegangenes und bei F_0 durch das Ob-:ctivglas in das Fernrohr tretendes Lichttheilchen, indem das ı E_0 in die Lage E_0F_0 gebrachte Fernrohr von dem mit der ırde in ihrer Bahn forteilenden Beobachter parallel mit sich selbst ırtgeführt wird, seinen geradlinigen Weg in dem Rohre, ohne gend eine Hinderung von den Wänden desselben zu erfahren, öllig ungestört verfolgen, und mit dem Beobachter zugleich in inem gewissen Punkte E der Erdbahn anlangen kann. Es muss lso in E_0 das Fernrohr in eine solche Lage E_0F_0 gebracht weren, dass das Licht die Linie F_0E als einen Theil seiner geradnigen Bahn genau in derselben Zeit durchläuft, in welcher die ırde den Theil E_0E ihrer Bahn, den wir hier seiner Kleinheit 'egen ohne allen merklichen Fehler gleichfalls als eine gerade inie betrachten können, zurücklegt, oder es muss die Lage E_0F_0, in welche der Beobachter, um den Stern S wirklich zu esicht zu bekommen, in E_0 sein Fernrohr zu bringen genöthigt it, so beschaffen sein, dass die hier beide als geradlinig betrachıten Theile E_0E und EF_0 der Bahnen der Erde und des Lichts ich eben so zu einander verhalten, wie sich die Geschwindigkeit er Erde in dem Punkte E_0 oder E ihrer Bahn, — wobei man ur, was überhaupt nöthig ist, wenn diese ganze Theorie in allen ıren Theilen mit völliger Deutlichkeit und Bestimmtheit aufgefasst nd verstanden werden soll, nicht unbeachtet lassen darf, dass ier alle in Betracht kommenden Grössen, absolut genommen oder n sich, ausserordentlich klein sind, und dass es hier überall nur ıf endliche, völlig bestimmte, und eben deshalb mit vollkommeer Genauigkeit messbare und angebbare Verhältnisse ankommt, — ı der Geschwindigkeit des Lichts verhält. Dann wird das ichttheilchen mit dem sein Fernrohr nun ohne alle weitere Verückung der Lage desselben parallel mit sich selbst fortführenden eobachter zugleich in dem Punkte E anlangen, der Beobachter ird in diesem Punkte der Erdbahn den Stern in dem Fernrohre irklich zu Gesicht bekommen, wird ihn aber, da wir annehmen, ıss das Fernrohr parallel mit sich selbst fortgeführt worden sei, cht an seiner wahren Stelle oder nach der geraden Linie ES blicken, sondern nach der Richtung des Fernrohrs EF, welche ɜr Linie E_0F_0 parallel ist, zu sehen glauben, und seinen Ort am immel natürlich auch nach dieser Lage des Fernrohrs beurtheien und bestimmen, wodurch, da das Fernrohr des sich in E findenden und den Stern im Fernrohre wirklich zu Gesicht beımmenden Beobachters keineswegs wirklich nach dem Sterne gerichtet ist, nothwendig Fehler in der Lagenbestimmung der estirne am Himmel entstehen müssen, auf welche der Astronom ıabweislich gehörig Rücksicht zu nehmen hat, so dass er dielben bei allen seinen Rechnungen als ein besonderes Rechnungsement in Ansatz bringt, wenn die aus seinen am Himmel angeellten Beobachtungen und Messungen auf dem Wege der Rechıng gezogenen Resultate auf diejenige Sicherheit und Genauigkeit

sollen Anspruch machen dürfen, welche die Astronomie namentlich bei ihrem gegenwärtigen Zustande der höchsten theoretischen und praktischen Ausbildung jedenfalls zu fordern vollkommen berechtigt ist.

Die so eben ausführlich besprochene Abweichung des Fernrohrs von seiner richtigen Lage bei den astronomischen Beobachtungen nennt man in der Astronomie im Allgemeinen die Aberration oder Abirrung, und zwar, wie es mir scheint, mit sehr gutem Grunde und völlig richtig, namentlich in neuerer Zeit meistens ohne allen weiteren Beisatz; denn von einer Aberration oder Abirrung des Lichts zu sprechen, wie namentlich von den Physikern und in den physikalischen Lehrbüchern fast durchgängig geschieht, scheint, wenigstens bei der obigen, sich aber jedenfalls in sehr vielen Beziehungen, insbesondere durch ihre grosse Einfachheit, gewiss ganz besonders empfehlenden Auffassungsweise der Sache, der Natur derselben nicht recht gemäss zu sein, indem man offenbar in der That weit eher von einer Aberration oder Abirrung des Fernrohrs als von einer Aberration oder Abirrung des Lichts sprechen könnte, wenn man absichtlich die Weitläufigkeit der Ausdrucksweise durch Beifügung eines besonderen Zusatzes zu dem schlichten Worte Aberration oder Abirrung zu erhöhen beabsichtigte. Freilich werden mir hierin die Anhänger anderer Ansichten über diesen Gegenstand nicht beistimmen. Andere Auffassungsweisen desselben zu besprechen, gehört aber jetzt um so weniger zu meinem Zwecke und entspricht meiner Absicht, weil ich schon in der Einleitung erklärt habe, dass mich bei der vorliegenden Behandlung und Darstellung dieser Lehre vorzugsweise das in derselben enthaltene geometrische Element interessirt, und ich will daher hier nur noch ganz in der Kürze bemerken, dass der obigen Auffassungsweise ausser ihrer grossen Einfachheit jedenfalls auch noch der, — nach meinen Ansichten über diese Dinge sehr grosse, — Vorzug vor allen übrigen Auffassungsweisen gebührt, dass sie von einer hypothetischen Voraussetzung über die physische Beschaffenheit des Lichts ganz unabhängig ist, und eben deshalb eine völlig strenge, rein geometrische Behandlung gestattet.

Den durch die Lage EF des Fernrohrs bestimmten, also von der Aberration oder Abirrung afficirten Ort des Sterns S nennt man in der Astronomie den scheinbaren Ort desselben, zum Unterschiede von seinem durch die wirklich nach ihm gerichtete Gesichtslinie ES bestimmten, von der Aberration oder Abirrung nicht afficirten, wahren Orte, Alles natürlich bezogen auf den Zeitpunkt, wo die Erde sich in dem Punkte E ihrer Bahn befindet, und wo in diesem Punkte der Erdbahn der Stern dem Beobachter in seinem Fernrohre wirklich zu Gesicht kommt, d. h. wo die Beobachtung des Sterns angestellt worden ist, oder kurz auf die Zeit der Beobachtung, in was für Zeiteinheiten man dieselbe auch angeben mag, was uns für jetzt nicht weiter angeht. Die dem wahren und scheinbaren Orte des Sterns entsprechenden astronomischen Coordinaten des Sterns, auf welche Ebenen im Raume dieselben nun auch bezogen werden mögen, heissen beziehungsweise seine wahren Coordinaten und seine scheinbaren Coordinaten, und die Ableitung jener aus diesen, oder dieser aus jenen, macht überhaupt den Hauptinhalt der ganzen

Aberrationstheorie aus, und gehört zu den Hauptgeschäften des rechnenden Astronomen bei der Anwendung dieser Theorie.

Da der Einfluss der Aberration, wie ihr Entdecker, der grosse englische Astronom Bradley, zuerst dargethan hat, auf alle astronomischen Beobachtungen sehr merklich ist, und deshalb als eine besondere Fehlerquelle bei allen astronomischen Rechnungen in Ansatz gebracht werden muss, alles Obige aber nur auf der Voraussetzung beruhet, dass die Geschwindigkeit des Lichts gegen die Geschwindigkeit der Erde in den verschiedenen Punkten ihrer Bahn nicht unendlich gross ist, sondern vielmehr zu derselben ein bestimmtes, endliches, messbares Verhältniss hat, so sind wir nun auch aus der, aus allen astronomischen Beobachtungen sich unzweideutig ergebenden Aberration, indem dieselben nur dadurch, dass man die Aberration auf eine strenge Weise in Rechnung bringt, gehörig zur Uebereinstimmung mit einander gebracht werden können, a posteriori zu schliessen berechtigt, dass die in Rede stehende Annahme rücksichtlich der Geschwindigkeit des Lichts richtig ist, d. h. dass dieselbe zur Geschwindigkeit der Erde in den verschiedenen Punkten ihrer Bahn wirklich in einem endlichen, genau messbaren und bestimmt angebbaren Verhältnisse steht, was bekanntlich auch schon Römer noch vor Bradley aus den Verfinsterungen der Jupiterstrabanten geschlossen hatte, und auf diesem Wege selbst schon zu einer genauen Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts gelangt war, deren Richtigkeit späterhin durch die Aberrationstheorie auf die überraschendste und schönste Weise bestätigt worden ist. Auf der anderen Seite liefert aber auch die Aberrationstheorie, welche in der Voraussetzung einer wirklichen progressiven Bewegung der Erde um die Sonne ihre hauptsächlichste Grundlage hat, den deutlichsten und einleuchtendsten Beweis, dass die Erde wirklich eine progressiv fortschreitende Bewegung um die Sonne besitzt, und dass nicht die Sonne, wie es scheinbar der Fall ist, sich um die Erde bewegt. Denn aus der vorhergehenden Theorie ist mit völliger Deutlichkeit ersichtlich, dass die Erscheinungen der in den astronomischen Beobachtungen auf völlig unzweideutige Weise sich kund gebenden Aberration nur dann sich genügend erklären lassen, wenn wir dem Beobachter auf der Erde mit derselben zugleich eine progressiv fortschreitende Bewegung beilegen, und dass im Gegentheil diese Erscheinungen nothwendig ganz wegfallen würden, wenn wir den Beobachter uns in absoluter Ruhe denken wollten; ja es würden sich selbst die Verhältnisse der verschiedenen Dimensionen der Erdbahn unter einander aus den durch Beobachtung bestimmten und auf bestimmte Maasse zurückgeführten Erscheinungen der Aberration ableiten lassen. Und da es jedenfalls keinen mehr einleuchtenden und überzeugenden Beweis für das wirkliche Stattfinden einer progressiven Bewegung der Erde um die Sonne als diesen giebt, so kann man in der That sagen, dass wir, eben so wie bekanntlich die rotatorische Bewegung der Erde um ihre Axe, auch ihre progressiv fortschreitende Bewegung um die Sonne erst haben am Himmel aufsuchen müssen, um uns von ihrer wirklichen Existenz vollständig zu überzeugen, welches nicht das kleinste der vielen grossen Verdienste ist, durch welche sich Bradley ein unvergängliches Denkmal in

den Annalen der Geschichte der Astronomie und der Naturwissenschaften überhaupt gesetzt hat.

Was wir hier bis jetzt bloss in allgemeinen Grundzügen dem Leser vor die Augen geführt haben, wollen wir nun in den folgenden Paragraphen mit der Kraft der mathematischen Analyse verfolgen, und unserer Darstellung dieses Gegenstandes, was ein Hauptzweck der vorliegenden Abhandlung ist, wenigstens zuerst, ohne uns eine Vernachlässigung irgend einer Art zu gestatten, den Charakter vollkommener geometrischer Strenge zu verleihen suchen, was gewiss besonders geeignet ist, eine völlig deutliche Einsicht in die eigentliche Natur desselben zu bewirken und zu vermitteln.

§. 2.

Zu dem Ende legen wir zuvörderst ganz im Allgemeinen ein völlig beliebiges festes rechtwinkliges Coordinatensystem der xyz zum Grunde, auf welches wir die Lage aller Punkte im Raume beziehen. Die Coordinaten der Punkte E_0 und E in Bezug auf dieses System seien respective X_0, Y_0, Z_0 und X, Y, Z. Die von der von dem Punkte E, als ihrem Anfangspunkte, ausgehend gedachten Linie EE_0, welche wir der Kürze wegen im Folgenden durch R bezeichnen wollen, mit den positiven Theilen dreier, durch den Punkt E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel seien α, β, γ. Ferner seien φ, ψ, χ die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche die als von dem Punkte E ausgehend gedachte wahre, nach dem Sterne S gezogene Gesichtslinie ES mit den positiven Theilen dreier auf dieselbe Weise wie vorher durch den Punkt E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst. Die Länge E_0F_0 oder EF des Fernrohrs sei L, und φ_1, ψ_1, χ_1 seien die 180° nicht übersteigenden Winkel, welche von den einander parallelen, als von den Punkten E_0, E ausgehend gedachten Linien E_0F_0, EF mit den positiven Theilen dreier, respective durch die Punkte E_0, E gelegter, den primitiven Axen der x, y, z paralleler Axen eingeschlossen werden. Im Allgemeinen sind also nach dem vorhergehenden Paragraphen φ, ψ, χ die sogenannten wahren, dagegen φ_1, ψ_1, χ_1 die sogenannten scheinbaren Coordinaten des Sterns S.

Nach den Principien der analytischen Geometrie wird die Linie ES, oder vielmehr die ganze gerade Linie, von welcher die von dem Punkte E als ihrem Anfangspunkte ausgehend gedachte Linie ES ein Theil ist, in Bezug auf das zum Grunde gelegte Coordinatensystem der xyz durch die Gleichungen

$$1)\quad \frac{x-X}{\cos\varphi}=\frac{y-Y}{\cos\psi}=\frac{z-Z}{\cos\chi}$$

charakterisirt. Die Coordinaten des Punktes F_0 sind offenbar in völliger Allgemeinheit

$$X_0+L\cos\varphi_1,\ Y_0+L\cos\psi_1,\ Z_0+L\cos\chi_1;$$

und weil nun dieser Punkt in der Linie ES liegt, so haben wir nach 1) die folgenden Gleichungen:

$$2)\quad \frac{X_0-X+L\cos\varphi_1}{\cos\varphi}=\frac{Y_0-Y+L\cos\psi_1}{\cos\psi}=\frac{Z_0-Z+L\cos\chi_1}{\cos\chi}.$$

Weil aber nach den Principien der analytischen Geometrie offenbar

$$3)\quad \begin{cases} X_0-X=R\cos\alpha, \\ Y_0-Y=R\cos\beta, \\ Z_0-Z=R\cos\gamma \end{cases}$$

ist, so erhalten die Gleichungen 2) die folgende Form:

$$4)\quad \frac{R\cos\alpha+L\cos\varphi_1}{\cos\varphi}=\frac{R\cos\beta+L\cos\psi_1}{\cos\psi}=\frac{R\cos\gamma+L\cos\chi_1}{\cos\chi}.$$

Verhält sich nun die Geschwindigkeit des Lichts zu der Geschwindigkeit der Erde in dem Punkte E wie $1:i$, so muss nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$EF_0:EE_0=1:i,$$

und folglich, da $EE_0=R$, und nach dem Obigen und den Principien der analytischen Geometrie

$$EF_0=\sqrt{(X_0-X+L\cos\varphi_1)^2+(Y_0-Y+L\cos\psi_1)^2+(Z_0-Z+L\cos\chi_1)^2}$$

oder

$$EF_0=\sqrt{(R\cos\alpha+L\cos\varphi_1)^2+(R\cos\beta+L\cos\psi_1)^2+(R\cos\gamma+L\cos\chi_1)^2}$$

ist,

$$5)\quad (\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1)^2+(\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1)^2+(\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1)^2=\frac{1}{i^2}$$

sein.

Wenn man zu den drei Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1}{\cos\varphi}=\frac{\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1}{\cos\psi}=\frac{\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1}{\cos\chi},$$

$$(\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1)^2+(\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1)^2+(\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1)^2=\frac{1}{i^2}$$

noch die aus der analytischen Geometrie bekannte Gleichung

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

nimmt, so kann man, wie wir jetzt zuerst zeigen wollen, aus den als bekannt angenommenen Grössen

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1$$

die vier Grössen

$$\frac{L}{R},\ \varphi,\ \psi,\ \chi$$

finden.

Aus der dritten Gleichung erhält man, weil nach den Principien der analytischen Geometrie bekanntlich auch

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$
$$\cos\varphi_1{}^2+\cos\psi_1{}^2+\cos\chi_1{}^2=1$$

ist, nach gehöriger Entwickelung derselben leicht

$$1+2(\cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1+\cos\gamma\cos\chi_1)\frac{L}{R}+\left(\frac{L}{R}\right)^2=\frac{1}{i^2}.$$

Bezeichnen wir aber den, von den als von dem Punkte E ausgehend gedachten Linien EE_0 und EF eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Θ_1, so ist nach einem bekannten Satze der analytischen Geometrie

$$6)\quad \cos\Theta_1=\cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1+\cos\gamma\cos\chi_1,$$

wo also, weil

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ \varphi_1,\ \psi_1,\ \chi_1$$

als bekannt angenommen worden sind, natürlich auch Θ_1 eine bekannte Grösse ist, und folglich nach dem Obigen

$$1+2\cos\Theta_1.\frac{L}{R}+\left(\frac{L}{R}\right)^2=\frac{1}{i^2}.$$

Bestimmt man aus dieser Gleichung des zweiten Grades die Grösse $\frac{L}{R}$ auf bekannte Weise, so erhält man

$$7)\quad \frac{L}{R}=-\cos\Theta_1\pm\frac{1}{i}\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}$$

oder

$$8)\quad \frac{L}{R}=-\cos\Theta_1\pm\sqrt{\left(\frac{1}{i}\right)^2-\sin\Theta_1{}^2},$$

wo nun noch vorzüglich eine Bestimmung nöthig ist, welches Zeichen man in dieser Formel zu nehmen hat, die auf folgende Art gegeben werden kann.

Das Product der beiden Werthe von $\frac{L}{R}$, welche die vorhergehende Formel liefert, ist

$$\cos\Theta_1{}^2-\left\{\left(\frac{1}{i}\right)^2-\sin\Theta_1{}^2\right\}=1-\left(\frac{1}{i}\right)^2=-\frac{1-i^2}{i^2},$$

und folglich, wenn wir nur annehmen, dass i kleiner als die Einheit ist, stets eine negative Grösse. Also haben die beiden Werthe von $\frac{L}{R}$, unter der rücksichtlich des i so eben gemachten Voraussetzung, immer entgegengesetzte Vorzeichen. Ist nun $\cos\Theta_1$ positiv, so giebt das untere Zeichen in der Gleichung 8) für $\frac{L}{R}$ einen negativen Werth, und man muss also in diesem Falle, da $\frac{L}{R}$ seiner Natur nach positiv ist, in dieser Gleichung das obere Zeichen nehmen; ist dagegen $\cos\Theta_1$ negativ, so giebt das obere Zeichen in der Gleichung 8) für $\frac{L}{R}$ einen positiven Werth, und man muss also, da nach dem Vorhergehenden das untere Zeichen einen negativen Werth für diese Grösse liefert, indem immer beide Werthe dieser Grösse entgegengesetzte Vorzeichen haben, auch in diesem Falle das obere Zeichen nehmen. Man muss also immer das obere Zeichen nehmen, d. h. man muss immer

$$9)\quad \frac{L}{R}=-\cos\Theta_1+\frac{1}{i}\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}$$

setzen. Wir sind hierbei von dem allein in der Natur vorkommenden Falle, wenn i kleiner als die Einheit ist, ausgegangen, und wollen uns hier für jetzt der Kürze wegen einer weiteren Betrachtung des in der Natur nicht vorkommenden Falls, wenn i der Einheit gleich oder grösser als die Einheit ist, enthalten.

Mittelst der Gleichungen

$$\frac{\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1}{\cos\varphi}=\frac{\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1}{\cos\psi}=\frac{\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1}{\cos\chi}$$

und

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

erhält man nun ferner leicht, mit Beziehung der obern und untern auf einander:

10)

$$\cos\varphi=\pm\frac{\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1}{\sqrt{(\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1)^2+(\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1)^2+(\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1)^2}},$$

$$\cos\psi=\pm\frac{\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1}{\sqrt{(\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1)^2+(\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1)^2+(\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1)^2}},$$

$$\cos\chi=\pm\frac{\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1}{\sqrt{(\cos\alpha+\frac{L}{R}\cos\varphi_1)^2+(\cos\beta+\frac{L}{R}\cos\psi_1)^2+(\cos\gamma+\frac{L}{R}\cos\chi_1)^2}};$$

also nach dem Obigen mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander:

$$11)\quad \begin{cases} \cos\varphi = \pm i(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi_1), \\ \cos\psi = \pm i(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi_1), \\ \cos\chi = \pm i(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi_1); \end{cases}$$

wo sich nun wieder frägt, welche Zeichen in diesen Formeln zu nehmen sind, worüber man auf folgende Art zu einer völlig bestimmten Entscheidung gelangen kann.

Die Coordinaten des Punktes F_0 in dem zum Grunde gelegten Coordinatensysteme der xyz sind nach dem Obigen

$$X_0 + L\cos\varphi_1,\quad Y_0 + L\cos\psi_1,\quad Z_0 + L\cos\chi_1;$$

und die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf ein durch den Punkt E gelegtes, dem primitiven Coordinatensysteme der xyz paralleles System sind also nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten:

$$X_0 - X + L\cos\varphi_1,\quad Y_0 - Y + L\cos\psi_1,\quad Z_0 - Z + L\cos\chi_1;$$

oder nach dem Obigen:

$$R\cos\alpha + L\cos\varphi_1,\quad R\cos\beta + L\cos\psi_1,\quad R\cos\gamma + L\cos\chi_1;$$

oder

$$R(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi_1),\quad R(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi_1),\quad R(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi_1).$$

Die Coordinaten des Punktes S in Bezug auf dasselbe System sind, wenn wir der Kürze wegen $ES = \mathfrak{X}$ setzen:

$$\mathfrak{X}\cos\varphi,\quad \mathfrak{X}\cos\psi,\quad \mathfrak{X}\cos\chi;$$

d. i. nach dem Vorhergehenden, wenn man für

$$\cos\varphi,\quad \cos\psi,\quad \cos\chi$$

ihre Werthe aus 11) setzt:

$$\pm \mathfrak{X}i(\cos\alpha + \frac{L}{R}\cos\varphi_1),$$

$$\pm \mathfrak{X}i(\cos\beta + \frac{L}{R}\cos\psi_1),$$

$$\pm \mathfrak{X}i(\cos\gamma + \frac{L}{R}\cos\chi_1);$$

muss.

uch

durch unsere Aufgabe

Um diese

die Grössen

zu finden, hat man nach

gesetzt wird:

Theil VI.

also, wenn man quadrirt und addirt, weil

$$\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2 = 1,$$
$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

ist:

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = 1 + i_1{}^2 - 2i_1(\cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi$$

Bezeichnen wir aber den von den Linien EE_0 und ES, d uns wie früher beide als von E ausgehend denken, einge senen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so is den Principien der analytischen Geometrie

$$16)\quad \cos\Theta = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi + \cos\gamma\cos\chi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2 = 1 + i_1{}^2 - 2i_1\cos\Theta,$$

oder

$$17)\quad \frac{L}{R} = \sqrt{1 + i_1{}^2 - 2i_1\cos\Theta},$$

oder

$$18)\quad \frac{L}{R} = \frac{1}{i}\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$19)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1 = \dfrac{\cos\varphi - i\cos\alpha}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta}}, \\ \cos\varphi_1 = \dfrac{\cos\psi - i\cos\beta}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta}}, \\ \cos\chi_1 = \dfrac{\cos\chi - i\cos\gamma}{\sqrt{1 + i^2 - 2i\cos\Theta}}; \end{cases}$$

wodurch unsere Aufgabe wieder gelöst ist.

§. 3.

Wir wollen nun den Mittelpunkt der elliptischen Erdbal Anfang der xyz, die Ebene der Erdbahn als Ebene der xy die Hauptaxe der Erdbahn als Axe der x annehmen. Da im Vorhergehenden offenbar $\gamma = 90°$, $\cos\gamma = 0$ zu setzen wenn wir die beiden Halbaxen der Erdbahn durch a, b be nen, so ist

$$20)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Gleichung derselben. Die Gleichung der durch den durch die ordinaten X, Y bestimmten Ort E der Erde an die Erdbahn gezogenen Berührenden derselben, welche die Stelle der Linie vertreten kann, ist nach der Lehre von der Ellipse bekanntlich

$$21)\quad \frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y=1.$$

zeichnen wir aber die 180° nicht übersteigenden Winkel, die eine der beiden Theile dieser Berührenden, in welche dieselbe ch den Berührungspunkt E getheilt wird, mit den positiven ilen dreier durch den Berührungspunkt E gelegter, den priiven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst, durch α', 90°; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie kanntlich auch

$$22)\quad \frac{x-X}{\cos\alpha'}=\frac{y-Y}{\cos\beta'}$$

er

$$23)\quad \frac{\cos\beta'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}x-\frac{\cos\alpha'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}y=1$$

e Gleichung der in Rede stehenden Berührenden, und durch rgleichung dieser Gleichung mit der Gleichung 21) erhält man ier die beiden Gleichungen:

$$24)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\beta'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}=\dfrac{X}{a^2}, \\[2ex] \dfrac{\cos\alpha'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}=-\dfrac{Y}{b^2}; \end{cases}$$

er, wie man hieraus leicht findet:

$$25)\quad \begin{cases} (X^2-a^2)\cos\beta'=XY\cos\alpha', \\ (Y^2-b^2)\cos\alpha'=XY\cos\beta'; \end{cases}$$

d aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division e Gleichung

$$26)\quad \frac{X^2-a^2}{Y^2-b^2}=\left(\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right)^2.$$

erbindet man mit dieser Gleichung die bekannte Gleichung

$$27)\quad \cos\alpha'^2+\cos\beta'^2=1,$$

o ergiebt sich

also, wenn man quadrirt und addirt, weil

$$\cos\alpha^2+\cos\beta^2+\cos\gamma^2=1,$$

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

ist:

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2=1+i_1{}^2-2i_1(\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi).$$

Bezeichnen wir aber den von den Linien EE_0 und ES, die wir uns wie früher beide als von E ausgehend denken, eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch Θ, so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$16)\quad \cos\Theta=\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\left(\frac{L}{R}\right)^2=1+i_1{}^2-2i_1\cos\Theta,$$

oder

$$17)\quad \frac{L}{R}=\sqrt{1+i_1{}^2-2i_1\cos\Theta},$$

oder

$$18)\quad \frac{L}{R}=\frac{1}{i}\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}.$$

Also ist nach dem Vorhergehenden

$$19)\quad \begin{cases} \cos\varphi_1=\dfrac{\cos\varphi-i\cos\alpha}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}, \\ \cos\varphi_1=\dfrac{\cos\psi-i\cos\beta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}, \\ \cos\chi_1=\dfrac{\cos\chi-i\cos\gamma}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}; \end{cases}$$

wodurch unsere Aufgabe wieder gelöst ist.

§. 3.

Wir wollen nun den Mittelpunkt der elliptischen Erdbahn als Anfang der xyz, die Ebene der Erdbahn als Ebene der xy, und die Hauptaxe der Erdbahn als Axe der x annehmen. Dann ist im Vorhergehenden offenbar $\gamma=90°$, $\cos\gamma=0$ zu setzen; und wenn wir die beiden Halbaxen der Erdbahn durch a, b bezeichnen, so ist

$$20)\quad \left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=1$$

Gleichung derselben. Die Gleichung der durch den durch die rdinaten X, Y bestimmten Ort E der Erde an die Erdbahn genen Berührenden derselben, welche die Stelle der Linie vertreten kann, ist nach der Lehre von der Ellipse bekanntlich

$$21)\quad \frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y=1.$$

eichnen wir aber die 180° nicht übersteigenden Winkel, die eine der beiden Theile dieser Berührenden, in welche dieselbe h den Berührungspunkt E getheilt wird, mit den positiven ilen dreier durch den Berührungspunkt E gelegter, den priven Axen der x, y, z paralleler Axen einschliesst, durch α', 90°; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie nntlich auch

$$22)\quad \frac{x-X}{\cos\alpha'}=\frac{y-Y}{\cos\beta'}$$

:

$$23)\quad \frac{\cos\beta'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}x-\frac{\cos\alpha'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}y=1$$

Gleichung der in Rede stehenden Berührenden, und durch gleichung dieser Gleichung mit der Gleichung 21) erhält man er die beiden Gleichungen:

$$24)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\beta'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}=\dfrac{X}{a^2}, \\ \dfrac{\cos\alpha'}{X\cos\beta'-Y\cos\alpha'}=-\dfrac{Y}{b^2}; \end{cases}$$

r, wie man hieraus leicht findet:

$$25)\quad \begin{cases} (X^2-a^2)\cos\beta'=XY\cos\alpha', \\ (Y^2-b^2)\cos\alpha'=XY\cos\beta'; \end{cases}$$

l aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Division Gleichung

$$26)\quad \frac{X^2-a^2}{Y^2-b^2}=\left(\frac{\cos\alpha'}{\cos\beta'}\right)^2.$$

rbindet man mit dieser Gleichung die bekannte Gleichung

$$27)\quad \cos\alpha'^2+\cos\beta'^2=1,$$

ergiebt sich

Weil nun im

1sten, 2ten, 3ten, 4ten

Quadranten die Coordinaten

X und Y

respective

positiv, negativ, negativ, positiv

und

positiv, positiv, negativ, negativ

sind; so ist nach dem Vorhergehenden

im 1sten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 2ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 3ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

im 4ten Quadranten:

$$\cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}};$$

d. h. es ist immer und in völliger Allgemeinheit:

$$31) \quad \cos\alpha' = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta' = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}.$$

Nun sind aber unter den gemachten Voraussetzungen die Win α', β' offenbar mit den aus dem Obigen bekannten Winkeln α identisch, weil sich beide auf die als von E ausgehend gedac Linie EE_0 beziehen; daher ist in völliger Allgemeinheit auch

$$32) \quad \cos\alpha = \frac{a^2 Y}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}, \quad \cos\beta = -\frac{b^2 X}{\sqrt{a^4 Y^2 + b^4 X^2}}.$$

Weil aber

$$X^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - Y^2), \quad Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2)$$

ist, so ist

$$a^4Y^2+b^4X^2=b^2\{a^4-(a^2-b^2)X^2\}=b^2(a^4-e^2X^2),$$
$$a^4Y^2+b^4X^2=a^2\{b^4+(a^2-b^2)Y^2\}=a^2(b^4+e^2Y^2);$$

wenn wir die Excentricität der Erdbahn durch e bezeichnen. Also ist nach 32) in völliger Allgemeinheit

$$33)\quad \cos\alpha=\frac{a^2Y}{b\sqrt{a^4-e^2X^2}},\quad \cos\beta=-\frac{bX}{\sqrt{a^4-e^2X^2}};$$

oder

$$34)\quad \cos\alpha=\frac{aY}{\sqrt{b^4+e^2Y^2}},\quad \cos\beta=-\frac{b^2X}{a\sqrt{b^4+e^2Y^2}};$$

oder auch

$$35)\quad \cos\alpha=\frac{aY}{\sqrt{b^4+e^2Y^2}},\quad \cos\beta=-\frac{bX}{\sqrt{a^4-e^2X^2}};$$

oder auch

$$36)\quad \cos\alpha=\frac{a^2Y}{b\sqrt{a^4-e^2X^2}},\quad \cos\beta=-\frac{b^2X}{a\sqrt{b^4+e^2Y^2}}.$$

Den positiven Theil der Axe der x wollen wir jetzt, was offenbar verstattet ist, durch die Sonne legen, so sind nach den bekannten Gesetzen der Bewegung der Planeten um die Sonne e, 0 die beiden Coordinaten der Sonne, und nach den Principien der analytischen Geometrie ist folglich, wenn P das von der Sonne auf die durch den Ort E der Erde an die Erdbahn gelegte Berührende, deren Gleichung nach 21)

$$\frac{X}{a^2}x+\frac{Y}{b^2}y=1$$

ist, gefällte Perpendikel bezeichnet, wie man leicht findet:

$$P^2=\frac{b^4(a^2-eX)^2}{a^4Y^2+b^4X^2},$$

oder nach dem Obigen

$$P^2=b^2\frac{(a^2-eX)^2}{a^4-e^2X^2},$$

also

$$P^2=b^2\frac{a^2-eX}{a^2+eX},$$

und folglich

$$37)\quad P=b\sqrt{\frac{a^2-eX}{a^2+eX}}.$$

Bezeichnen wir nun die Geschwindigkeit des Lichts durch $\mathfrak{G}$, die Geschwindigkeit der Erde in dem Punkte E ihrer Bahn, dessen Coordinaten X, Y sind, durch V; so ist nach dem Obigen

$$\mathfrak{G}:V=1:i,$$

also

$$38)\quad i=\frac{V}{\mathfrak{G}}.$$

Ist aber V_1 die Geschwindigkeit der Erde in einem beliebigen anderen Punkte E_1 ihrer Bahn, dessen Coordinaten X_1, Y_1 sind, und P_1 das von der Sonne auf die Berührende der Erdbahn in diesem Punkte gefällte Perpendikel, so dass also nach 37)

$$39)\quad P_1=b\sqrt{\frac{a^2-eX_1}{a^2+eX_1}}$$

ist; so ist nach einem aus der Theorie der Bewegung der Planeten um die Sonne bekannten wichtigen Satze, nach welchem sich bei derselben die Geschwindigkeiten des sich bewegenden Körpers in den einzelnen Punkten seiner Bahn umgekehrt wie die von der Sonne auf die durch die in Rede stehenden Punkte an die Bahn gezogenen Berührenden gefällten Perpendikel verhalten *),

$$V:V_1=P_1:P,$$

also nach dem Vorhergehenden

$$V:V_1=\sqrt{\frac{a^2-eX_1}{a^2+eX_1}}:\sqrt{\frac{a^2-eX}{a^2+eX}},$$

folglich

$$V\sqrt{\frac{a^2-eX}{a^2+eX}}=V_1\sqrt{\frac{a^2-eX_1}{a^2+eX_1}},$$

woraus man sieht, dass das Product

$$V\sqrt{\frac{a^2-eX}{a^2+eX}}\text{ oder }V_1\sqrt{\frac{a^2-eX_1}{a^2+eX_1}}$$

eine constante Grösse ist, welche wir im Folgenden durch bezeichnen, und daher, indem X_1, Y_1 die Coordinaten eines

---

*) Dieser Satz gilt bekanntlich für jede Centralbewegung, und sich z. B. elementar bewiesen in meinem Lehrbuche der Physik mit vorzüglicher Rücksicht auf mathematische Begründung. Erster Theil. Leipzig. 1845. §. 155. S. 315.

beliebigen Punktes der Erdbahn, und V_1 die Geschwindigkeit der Erde in diesem Punkte bezeichnen,

$$40)\quad K_1 = V_1 \sqrt{\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}}$$

setzen wollen. Dass diese Constante bloss von den Elementen der Bewegung der Erde um die Sonne abhängt, und ihr numerischer Werth also aus den astronomischen Tafeln berechnet werden kann, braucht hier wohl kaum noch besonders erinnert zu werden.

Setzen wir aber ferner

$$41)\quad K = \frac{K_1}{\mathfrak{G}},$$

wo natürlich auch K eine Constante bezeichnet, so ist nach dem Vorhergehenden, da auch

$$K_1 = V \sqrt{\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}}$$

ist,

$$42)\quad K = \frac{V}{\mathfrak{G}} \sqrt{\frac{a^2 - eX}{a^2 + eX}},$$

also

$$\frac{V}{\mathfrak{G}} = K \sqrt{\frac{a^2 + eX}{a^2 - eX}},$$

und folglich nach 38):

$$43)\quad i = K \sqrt{\frac{a^2 + eX}{a^2 - eX}}.$$

Bezeichnen wir jetzt die Entfernungen des Punktes E der Erdbahn von den beiden Brennpunkten derselben, in welchen die Sonne steht und nicht steht, d. h. die Vectoren des Punktes E der Erdbahn in Bezug auf die beiden Brennpunkte derselben, respective durch r und r', so ist nach den Principien der analytischen Geometrie, wie leicht erhellen wird, wenn man nur berücksichtigt, dass wir oben den positiven Theil der Axe der x durch die Sonne gelegt haben:

$$r = \sqrt{(e - X)^2 + Y^2}, \quad r' = \sqrt{(e + X)^2 + Y^2}.$$

Nun ist aber

$$Y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - X^2) = \frac{a^2 - e^2}{a^2}(a^2 - X^2),$$

also, wie man leicht findet:

$$(e-X)^2+Y^2=a^2-2eX+\frac{e^2X^2}{a^2},$$

$$(e+X)^2+Y^2=a^2+2eX+\frac{e^2X^2}{a^2};$$

d. i.

$$(e-X)^2+Y^2=(a-\frac{eX}{a})^2,$$

$$(e+X)^2+Y^2=(a+\frac{eX}{a})^2.$$

Weil aber $e<a$ und auch der absolute Werth von grösser als a ist, so ist der absolute Werth von eX imme ner als a^2, also der absolute Werth von $\frac{eX}{a}$ immer kleiner und es sind daher offenbar

$$a-\frac{eX}{a} \text{ und } a+\frac{eX}{a}$$

jederzeit positive Grössen. Also ist

$$\sqrt{(e-X)^2+Y^2}=a-\frac{eX}{a},$$

$$\sqrt{(e+X)^2+Y^2}=a+\frac{eX}{a};$$

folglich nach dem Obigen

$$44)\quad \begin{cases} r=a-\frac{eX}{a}=\frac{a^2-eX}{a}, \\ r'=a+\frac{eX}{a}=\frac{a^2+eX}{a}; \end{cases}$$

also

$$45)\quad \frac{r}{r'}=\frac{a^2-eX}{a^2+eX},\quad \frac{r'}{r}=\frac{a^2+eX}{a^2-eX}.$$

Bezeichnen wir eben so die Entfernungen des Punktes E_1 Erdbahn von den beiden Brennpunkten derselben, in dene Sonne steht und nicht steht, respective durch r_1 und r_1'; s

$$46)\quad \begin{cases} r_1=a-\frac{eX_1}{a}=\frac{a^2-eX_1}{a}, \\ r_1'=a+\frac{eX_1}{a}=\frac{a^2+eX_1}{a}; \end{cases}$$

also

$$47)\quad \frac{r_1}{r_1'}=\frac{a^2-eX_1}{a^2+eX_1},\quad \frac{r_1'}{r_1}=\frac{a^2+eX_1}{a^2-eX_1}.$$

Folglich ist nach dem Obigen

$$48)\quad K_1=V_1\sqrt{\frac{r_1}{r_1'}},\quad K=\frac{K_1}{\mathfrak{G}},\quad i=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Weil nun nach dem Obigen

$$\cos\alpha=\frac{a^2Y}{b\sqrt{a^4-e^2X^2}},\quad \cos\beta=-\frac{bX}{\sqrt{a^4-e^2X^2}};$$

und folglich

$$\cos\alpha=\frac{a^2Y}{b\sqrt{(a^2-eX)(a^2+eX)}},$$

$$\cos\beta=-\frac{bX}{\sqrt{(a^2-eX)(a^2+eX)}}$$

ist; so ist auch

$$49)\quad \cos\alpha=\frac{aY}{b\sqrt{rr'}},\quad \cos\beta=-\frac{bX}{a\sqrt{rr'}};$$

und folglich

$$50)\quad i\cos\alpha=K\frac{aY}{br},\quad i\cos\beta=-K\frac{bX}{ar}.$$

Weil $\cos\gamma=0$ ist, so ist nach 6) und 15)

$$51)\quad \begin{cases}\cos\Theta_1=\cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1,\\ \cos\Theta\ =\cos\alpha\cos\varphi\ +\cos\beta\cos\psi;\end{cases}$$

also

$$52)\quad \begin{cases}\cos\Theta_1=\dfrac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi_1-\dfrac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\psi_1,\\ \cos\Theta\ =\dfrac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi-\dfrac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\psi;\end{cases}$$

und

$$53)\quad \begin{cases}i\cos\Theta_1=K\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi_1-\dfrac{bX}{ar}\cos\psi_1\right),\\ i\cos\Theta\ =K\left(\dfrac{aY}{br}\cos\varphi-\dfrac{bX}{ar}\cos\psi\right).\end{cases}$$

Auch ist

$$54)\quad \begin{cases}\cos\alpha-\cos\Theta_1\cos\varphi_1=\dfrac{aY}{b\sqrt{rr'}}\sin\varphi_1{}^2+\dfrac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\varphi_1\cos\psi_1,\\ \cos\beta-\cos\Theta_1\cos\psi_1=-\dfrac{bX}{a\sqrt{rr'}}\sin\psi_1{}^2-\dfrac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi_1\cos\psi_1;\end{cases}$$

und

$$55)\quad \begin{cases} i(\cos\alpha-\cos\Theta_1\cos\varphi_1)= K\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi_1{}^2+\frac{bX}{ar}\cos\varphi_1\cos\psi_1\right), \\ i(\cos\beta-\cos\Theta_1\cos\psi_1)=-K\left(\frac{bX}{ar}\sin\psi_1{}^2+\frac{aY}{br}\cos\varphi_1\cos\psi_1\right); \end{cases}$$

so wie

$$54^*)\quad \begin{cases} \cos\alpha-\cos\Theta\cos\varphi= \frac{aY}{b\sqrt{rr'}}\sin\varphi^2+\frac{bX}{a\sqrt{rr'}}\cos\varphi\cos\psi, \\ \cos\beta-\cos\Theta\cos\psi=-\frac{bX}{a\sqrt{rr'}}\sin\psi^2-\frac{aY}{b\sqrt{rr'}}\cos\varphi\cos\psi; \end{cases}$$

und

$$55^*)\quad \begin{cases} i(\cos\alpha-\cos\Theta\cos\varphi)= K\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi^2+\frac{bX}{ar}\cos\varphi\cos\psi\right), \\ i(\cos\beta-\cos\Theta\cos\psi)=-K\left(\frac{bX}{ar}\sin\psi^2+\frac{aY}{br}\cos\varphi\cos\psi\right). \end{cases}$$

Wenn nun a, b, also auch

$$e=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{(a-b)(a+b)},$$

und die Coordinaten X, Y des Orts der Erde in ihrer Bahn als bekannt angenommen werden, so kann man die beiden Hauptaufgaben der Aberrationstheorie, von denen schon oben die Rede gewesen ist, auf eine sich keine Vernachlässigung irgend einer Art gestattende Weise durch die folgenden aus dem Vorhergehenden sich unmittelbar ergebenden Formeln auflösen.

Sollen aus den scheinbaren astronomischen Coordinaten φ_1, ψ_1, χ_1 die wahren astronomischen Coordinaten φ, ψ, χ abgeleitet werden, so kann man nach den folgenden Formeln rechnen:

$$r=a-\frac{eX}{a},\quad r'=a+\frac{eX}{a};$$

$$i=K\sqrt{\frac{r'}{r}};$$

$$\cos\alpha=\frac{aY}{b\sqrt{rr'}},\quad \cos\beta=-\frac{bX}{a\sqrt{rr'}};$$

$$\cos\Theta_1=\cos\alpha\cos\varphi_1+\cos\beta\cos\psi_1;$$

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}+i(\cos\alpha-\cos\Theta_1\cos\varphi_1),$$

$$\cos\psi=\cos\psi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}+i(\cos\beta-\cos\Theta_1\cos\psi_1),$$

$$\cos\chi=\cos\chi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}-i\cos\Theta_1\cos\chi_1.$$

Sollen dagegen aus den wahren astronomischen Coordinaten φ, ψ, χ die scheinbaren astronomischen Coordinaten $\varphi_1, \psi_1, \chi_1$ abgeleitet werden, so kann man nach den folgenden Formeln rechnen:

$$r = a - \frac{eX}{a}, \quad r' = a + \frac{eX}{a};$$

$$i = K\sqrt{\frac{r'}{r}};$$

$$\cos\alpha = \frac{aY}{b\sqrt{rr'}}, \quad \cos\beta = -\frac{bX}{a\sqrt{rr'}};$$

$$\cos\Theta = \cos\alpha\cos\varphi + \cos\beta\cos\psi;$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{\cos\varphi - i\cos\alpha}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}},$$

$$\cos\psi_1 = \frac{\cos\psi - i\cos\beta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}},$$

$$\cos\chi_1 = \frac{\cos\chi}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}.$$

Man kann diesen Formeln leicht noch andere Gestalten geben, und sie zur numerischen Rechnung bequemer einrichten, womit ich mich jetzt aber der Kürze wegen nicht weiter beschäftigen will, da es mir in dieser Abhandlung überhaupt mehr auf die Entwickelung der Aberrationstheorie im Allgemeinen, als auf die für den praktischen Gebrauch zweckmässigste Gestaltung der betreffenden Formeln ankommt, worüber jedoch späterhin noch Einiges vorkommen wird.

Wir wollen nun aber noch den von den beiden, den wahren und scheinbaren Ort des Sterns S in dem Punkte E der Erdbahn bestimmenden Linien ES und EF eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel, welcher durch Ω bezeichnet werden mag, bestimmen. Zu dem Ende haben wir nach den Principien der analytischen Geometrie die Formel

$$\cos\Omega = \cos\varphi\cos\varphi_1 + \cos\psi\cos\psi_1 + \cos\chi\cos\chi_1.$$

Also ist nach 14), weil

$$\cos\varphi_1^2 + \cos\psi_1^2 + \cos\chi_1^2 = 1$$

und

$$\cos\Theta_1 = \cos\alpha\cos\varphi_1 + \cos\beta\cos\psi_1 + \cos\gamma\cos\chi_1$$

ist, wie man leicht findet:

$$56)\quad \cos\Omega = \sqrt{1 - i^2\sin\Theta_1^2},$$

folglich

$$57)\quad \sin\Omega = i\sin\Theta_1.$$

Ferner ist nach 19), weil

$$\cos\varphi^2+\cos\psi^2+\cos\chi^2=1$$

und

$$\cos\Theta=\cos\alpha\cos\varphi+\cos\beta\cos\psi+\cos\gamma\cos\chi$$

ist, wie man leicht findet:

$$58)\quad \cos\Omega=\frac{1-i\cos\Theta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}},$$

folglich

$$59)\quad \sin\Omega=\frac{i\sin\Theta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}.$$

Weil

$$i=K\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

und

$$i\cos\Theta_1=K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right),$$
$$i\cos\Theta=K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)$$

ist, so findet man leicht

$$60)\quad \left\{\begin{aligned} i\sin\Theta_1&=K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)^2},\\ i\sin\Theta&=K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)^2};\end{aligned}\right.$$

also

$$61)\quad \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)^2}.$$

Auch ist nach dem Obigen

$$62)\quad \tang\Omega=\frac{i\sin\Theta}{1-i\cos\Theta},$$

und folglich

$$63)\quad \tang\Omega=\frac{K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)^2}}{1-K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)}.$$

Für $\chi=90^0$ ist nach der dritten der Gleichungen 19), weil ekanntlich $\cos\gamma=0$ ist, $\cos\chi_1=0$, also $\chi_1=90^0$, und folglich $=\chi_1$ oder $\chi-\chi_1=0$.

Für $\chi=0$ ist offenbar $\varphi=90^0$ und $\psi=90^0$, also $\cos\Theta=0$, lglich nach der dritten der Gleichungen 19)

$$64)\quad \cos\chi_1=\frac{1}{\sqrt{1+i^2}},$$

so

$$65)\quad \sin\chi_1=\frac{i}{\sqrt{1+i^2}},$$

ıd folglich

$$66)\quad \cos\chi_1=\frac{1}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}},$$

wie

$$67)\quad \sin\chi_1=\frac{K\sqrt{\frac{r'}{r}}}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}}.$$

Auch ist in diesem Falle

$$68)\quad \tan\chi_1=i=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

Endlich ist auch nach dem Obigen in diesem Falle

$$69)\quad \left\{\begin{array}{l}\cos\Omega=\frac{1}{\sqrt{1+i^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}},\\[2ex] \sin\Omega=\frac{i}{\sqrt{1+i^2}}=\frac{K\sqrt{\frac{r'}{r}}}{\sqrt{1+K^2\frac{r'}{r}}},\\[2ex] \tan\Omega=i=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.\end{array}\right.$$

Wäre die Erdbahn ein Kreis, was wenigstens näherungsweise ler Fall ist, so wäre in allen obigen Formeln $r=r'$ zu setzen, wodurch sie einfacher werden. Die Ableitung der diesem Falle entsprechenden Formeln aus den obigen ist aber so einfach und eicht, dass wir sie füglich ganz dem Leser überlassen können.

§. 4.

Durch einen beliebigen Punkt im Raume, wofür wir jedoch, was offenbar verstattet ist, der Einfachheit wegen den Mittelpunkt der Erdbahn, d. h. den Anfang des zum Grunde gelegten Coordinatensystems setzen wollen, denken wir uns jetzt mit allen bei der stetigen Bewegung der Erde um die Sonne in den verschiedenen Punkten ihrer Bahn nach den scheinbaren Oertern des Sterns gezogenen Gesichtslinien Parallelen gezogen, so bestimmen diese Parallelen eine ihre Spitze in dem Mittelpunkte der Erdbahn habende Kegelfläche, welche wir jetzt einer näheren Untersuchung unterwerfen wollen.

Sind x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes dieser Kegelfläche, welcher in der durch deren Spitze gehenden geraden Linie liegt, die der in dem Punkte E der Erdbahn nach dem scheinbaren Orte des Sterns gezogenen Gesichtslinie parallel ist, so ist offenbar

$$\frac{x}{\cos\varphi_1}=\frac{y}{\cos\psi_1}=\frac{z}{\cos\chi_1},$$

und folglich, wenn wir für

$$\cos\varphi_1,\ \cos\psi_1,\ \cos\chi_1$$

ihre Werthe aus 19) setzen:

$$\frac{x}{\cos\varphi-i\cos\alpha}=\frac{y}{\cos\psi-i\cos\beta}=\frac{z}{\cos\chi},$$

wobei $\cos\gamma=0$ gesetzt worden ist, wie es in Folge der im vorhergehenden Paragraphen eingeführten Specialisirung des Coordinatensystems bekanntlich geschehen muss. Nun ist aber nach dem vorhergehenden Paragraphen

$$i\cos\alpha=K\frac{aY}{br}=K\frac{a^2Y}{b(a^2-eX)},$$

$$i\cos\beta=-K\frac{bX}{ar}=-K\frac{bX}{a^2-eX};$$

also nach dem Vorhergehenden

$$\frac{b(a^2-eX)x}{b(a^2-eX)\cos\varphi-Ka^2Y}$$

$$=\frac{(a^2-eX)y}{(a^2-eX)\cos\psi+KbX}$$

$$=\frac{z}{\cos\chi}.$$

Bestimmt man aus diesen beiden Gleichungen die Grössen X, Y, so erhält man nach leichter Rechnung

$$X = \frac{a^2(y\cos\chi - z\cos\psi)}{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz},$$

$$Y = -\frac{b^2(x\cos\chi - z\cos\varphi)}{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz}.$$

Folglich ist

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 = \frac{a^2(y\cos\chi - z\cos\psi)^2}{\{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz\}^2},$$

$$\left(\frac{Y}{b}\right)^2 = \frac{b^2(x\cos\chi - z\cos\varphi)^2}{\{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz\}^2};$$

und weil nun bekanntlich

$$\left(\frac{X}{a}\right)^2 + \left(\frac{Y}{b}\right)^2 = 1$$

ist, so erhalten wir auf der Stelle die folgende Gleichung unserer Kegelfläche:

$$70)\quad a^2(y\cos\chi - z\cos\psi)^2 + b^2(x\cos\chi - z\cos\varphi)^2 = \{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz\}^2$$

oder

$$71)\quad \left(\frac{x\cos\chi - z\cos\varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{y\cos\chi - z\cos\psi}{b}\right)^2 = \left\{\frac{e(y\cos\chi - z\cos\psi) + Kbz}{ab}\right\}^2.$$

Entwickelt man aber in der Gleichung 70) das Quadrat auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, so bringt man diese Gleichung, weil

$$a^2 - e^2 = b^2$$

ist, auch sehr leicht auf die folgende Form:

$$72)\quad b\{(x\cos\chi - z\cos\varphi)^2 + (y\cos\chi - z\cos\psi)^2\} = 2Ke(y\cos\chi - z\cos\psi)z + K^2bz^2.$$

Durch einen Punkt, dessen dritte Coordinate h ist, wollen wir uns jetzt eine der Ebene der xy, d. h. der Ebene der Erdbahn, parallele Ebene gelegt denken. Sind dann f, g, h die Coordinaten des Punktes, in welchem diese Ebene von der aus dem Mittelpunkte der Erdbahn nach dem wahren Orte des Sterns gezogenen geraden Linie, deren Gleichungen

$$\frac{x}{\cos\varphi} = \frac{y}{\cos\psi} = \frac{z}{\cos\chi}$$

sind, geschnitten wird, so ist

$$\frac{f}{\cos\varphi}=\frac{g}{\cos\psi}=\frac{h}{\cos\chi},$$

also

$$f=\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}h,\ g=\frac{\cos\psi}{\cos\chi}h.$$

Legen wir nun, um die Natur der Curve zu bestimmen, in welcher die Kegelfläche von der vorher mit der Ebene der xy parallel gelegten Ebene geschnitten wird, in dieser Ebene durch den Punkt (fgh) ein dem Systeme der xy paralleles Coordinatensystem der $x'y'$, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$x=f+x',\ y=g+y';$$

also nach dem Vorhergehenden

$$x=\frac{\cos\varphi}{\cos\chi}h+x',\ y=\frac{\cos\psi}{\cos\chi}h+y';$$

folglich

$$x\cos\chi-h\cos\varphi=x'\cos\chi,$$
$$y\cos\chi-h\cos\psi=y'\cos\chi;$$

und nach 72) ist also die Gleichung des in Rede stehenden Schnitts im Systeme der $x'y'$, wobei man nicht zu übersehen hat, dass $z=h$ zu setzen ist, offenbar

$$73)\quad b(x'^2+y'^2)\cos\chi^2=2Kehy'\cos\chi+K^2bh^2.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit b, bringt das Glied $2Kbehy'\cos\chi$ auf die linke Seite und addirt dann auf beiden Seiten die Grösse $K^2e^2h^2$, so wird die vorstehende Gleichung, wie man leicht findet,

$$b^2x'^2\cos\chi^2+(by'\cos\chi-Keh)^2=K^2(b^2+e^2)h^2,$$

d. i.

$$74)\quad b^2x'^2\cos\chi^2+(by'\cos\chi-Keh)^2=K^2a^2h^2.$$

Nun lege man durch einen Punkt, welcher im Systeme der $x'y'$ durch die Coordinaten

$$0,\ \frac{Keh}{b\cos\chi}$$

bestimmt wird, ein neues, den Systemen der xy und $x'y'$ paralleles Coordinatensystem der $x''y''$; so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$x'=x'',\ y'=\frac{Keh}{b\cos\chi}+y'';$$

also

$$by' \cos\chi - Keh = by'' \cos\chi,$$

und die Gleichung des Schnitts im Systeme der $x''y''$ ist folglich nach dem Vorhergehenden

$$b^2(x''^2 + y''^2)\cos\chi^2 = K^2a^2h^2$$

oder

$$75)\quad x''^2 + y''^2 = \left(\frac{Kah}{b\cos\chi}\right)^2.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass der Schnitt ein Kreis ist, dessen Halbmesser der absolute Werth der Grösse

$$\frac{Kah}{b\cos\chi}$$

ist. Die Coordinaten des Mittelpunkts dieses Kreises im Systeme der $x'y'$ sind nach dem Vorhergehenden

$$0,\ \frac{Keh}{b\cos\chi}.$$

Bezeichnen wir also die Coordinaten des Mittelpunkts im Systeme der xyz durch F, G, H; so ist nach dem Obigen

$$F = f,\quad G = g + \frac{Keh}{b\cos\chi},\quad H = h;$$

also

$$F = \frac{\cos\varphi}{\cos\chi}h,\quad G = \frac{\cos\psi}{\cos\chi}h + \frac{Keh}{b\cos\chi},\quad H = h;$$

oder

$$76)\quad F = \frac{\cos\varphi}{\cos\chi}h,\quad G = \frac{b\cos\psi + Ke}{b\cos\chi}h,\quad H = h.$$

Nennen wir die hier betrachtete Kegelfläche die Aberrations-Kegelfläche, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden unmittelbar, dass die Directrix der Aberrations-Kegelfläche ein Kreis ist, oder dass die Aberrations-Kegelfläche eine gewöhnliche Kegelfläche ist, wie sie in der Elementargeometrie betrachtet wird.

Die Gleichungen der Axe der Aberrations-Kegelfläche im Systeme der xyz seien

$$x = Az,\quad y = Bz;$$

so ist nach dem Vorhergehenden

$$F = AH,\quad G = BH;$$

also

$$A=\frac{F}{H},\ B=\frac{G}{H};$$

und die Gleichungen der Axe der Aberrations-Kegelfläche folglich

$$77)\quad \frac{x}{F}=\frac{y}{G}=\frac{z}{H},$$

d. i. nach 76)

$$78)\quad \frac{x}{\cos\varphi}=\frac{by}{b\cos\psi+Ke}=\frac{z}{\cos\chi}$$

oder

$$79)\quad \frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{\cos\psi+K\frac{e}{b}}=\frac{z}{\cos\chi}.$$

Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die auf gewöhnliche Weise genommenen stimmungswinkel der Axe der Aberrations-Kegelfläche, so si

$$\frac{x}{\cos\mathfrak{A}}=\frac{y}{\cos\mathfrak{B}}=\frac{z}{\cos\mathfrak{C}}$$

die Gleichungen derselben, und wenn man diese Gleichungen den Gleichungen 78) oder 79) der Axe der Aberrations-Kegelfl vergleicht, so erhält man mit Hülfe der Gleichung

$$\cos\mathfrak{A}^2+\cos\mathfrak{B}^2+\cos\mathfrak{C}^2=1$$

für $\cos\mathfrak{A}$, $\cos\mathfrak{B}$, $\cos\mathfrak{C}$ die folgenden Ausdrücke, in denen obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen:

$$80)\quad \begin{cases} \cos\mathfrak{A}=\pm\dfrac{b\cos\varphi}{\sqrt{b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2}}, \\ \cos\mathfrak{B}=\pm\dfrac{b\cos\psi+Ke}{\sqrt{b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2}}, \\ \cos\mathfrak{C}=\pm\dfrac{b\cos\chi}{\sqrt{b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2}}. \end{cases}$$

Durch diese Formeln ist die Lage der Axe der Aberrati Kegelfläche vollkommen bestimmt. Die doppelten Zeichen h hier nur den Sinn, dass die Winkel $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ entweder dem e oder dem andern der beiden Theile entsprechen können, in we die Axe der Aberrations-Kegelfläche durch deren Spitze getl wird; die Lage der Axe ist aber durch diese Formeln immer kommen bestimmt, wie schon erwähnt worden ist.

Bezeichnet θ jeden der beiden 180° nicht übersteigenden W kel, welche die Axe der Aberrations-Kegelfläche mit deren Se einschliesst, so ist

$$\cos\theta=\cos\varphi\cos\mathfrak{A}+\cos\psi\cos\mathfrak{B}+\cos\chi\cos\mathfrak{C},$$

also, wie man mittelst des Obigen leicht findet:

$$81)\quad \cos\theta=\pm\frac{b+Ke\cos\psi}{\sqrt{b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2}},$$

also

$$82)\quad \sin\theta=\frac{Ke\sin\psi}{\sqrt{b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2}},$$

und folglich

$$83)\quad \tang\theta=\pm\frac{Ke\sin\psi}{b+Ke\cos\psi}.$$

Man sieht hieraus, dass θ bloss von ψ abhängt, nämlich von φ, χ unabhängig ist.

§. 5.

Die aus dem Mittelpunkte der Erdbahn nach dem wahren Orte des Sterns gezogene gerade Linie, deren Gleichungen im primitiven Systeme der xyz bekanntlich

$$84)\quad \frac{x}{\cos\varphi}=\frac{y}{\cos\psi}=\frac{z}{\cos\chi}$$

sind, wollen wir jetzt als die Axe der z_1 eines durch den Mittelpunkt der Erde als Anfang gelegten neuen rechtwinkligen Coordinatensystems der $x_1y_1z_1$ annehmen. Legen wir nun die Axe der x_1 dieses Systems in die Ebene der xy, d. h. in die Ebene der Erdbahn, so sind die Gleichungen derselben von der Form

$$y=Ax,\ z=0.$$

Da aber die Axe der x_1 auf der Axe der z_1, deren Gleichungen sich unter der Form

$$y=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}x,\ z=\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}x$$

darstellen lassen, senkrecht steht, so haben wir nach den Principien der analytischen Geometrie die Gleichung

$$1+A\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}+0.\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0,$$

d. i. die Gleichung

$$1+A\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}=0,$$

woraus

$$A = -\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$$

folgt, so dass also die Gleichungen der Axe der x_1 im pri Systeme der xyz nach dem Vorhergehenden

$$85)\quad y = -\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}x,\ z = 0$$

sind. Bezeichnen wir aber die auf gewöhnliche Weise gen nen Bestimmungswinkel dieser Axe nach einer in der analyt Geometrie häufig in Anwendung gebrachten Bezeichnungsart (xx_1), (yx_1), (zx_1), so ist, weil die Axe der x_1 in der Ebe xy liegt, offenbar $(zx_1)=90^0$, $\cos(zx_1)=0$, und die Gleicl unserer Axe sind bekanntlich

$$y = \frac{\cos(yx_1)}{\cos(xx_1)}x,\quad z = 0;$$

welches, mit den Gleichungen 85) verglichen, auf der St der Gleichung

$$\frac{\cos(yx_1)}{\cos(xx_1)} = -\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}$$

führt, woraus sich mit Hülfe der Gleichungen

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1$$

und

$$\cos(xx_1)^2 + \cos(yx_1)^2 = 1$$

sehr leicht die Formeln

$$86)\quad \cos(xx_1) = \pm\frac{\cos\psi}{\sin\chi},\quad \cos(yx_1) = \mp\frac{\cos\varphi}{\sin\chi},\quad \cos(zx_1)$$

ergeben, in denen die obern und untern Zeichen sich auf der beziehen.

Bezeichnen wir jetzt die Gleichungen der Axe der y_1 mitiven Systeme der xyz durch

$$y = A'x,\quad z = B'x;$$

so haben wir nach den Principien der analytischen Geomet diese Axe auf den beiden Axen der x_1 und z_1, deren Gl gen aus dem Vorhergehenden bekannt sind, senkrecht steh Bestimmung der Constanten A' und B' die beiden folgende chungen:

$$1 - A'\frac{\cos\varphi}{\cos\psi} + B'.0 = 0,$$

$$1 + A'\frac{\cos\psi}{\cos\varphi} + B'\frac{\cos\chi}{\cos\varphi} = 0$$

oder

$$1-A'\frac{\cos\varphi}{\cos\psi}=0,$$

$$1+A'\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}+B'\frac{\cos\chi}{\cos\varphi}=0;$$

aus denen man sehr leicht

$$A'=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},\ B'=-\frac{\sin\chi^2}{\cos\varphi\cos\chi}$$

erhält, so dass also

$$87)\quad y=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi}x,\ z=-\frac{\sin\chi^2}{\cos\varphi\cos\chi}x$$

die Gleichungen der Axe der y_1 im Systeme der xyz sind. Bezeichnen wir nun die auf gewöhnliche Weise genommenen Bestimmungswinkel dieser Axe durch (xy_1), (yy_1), (zy_1), so sind die Gleichungen derselben auch

$$y=\frac{\cos(yy_1)}{\cos(xy_1)}x,\ z=\frac{\cos(zy_1)}{\cos(xy_1)}x;$$

und die Vergleichung dieser Gleichungen mit den Gleichungen 87) giebt sogleich

$$\frac{\cos(yy_1)}{\cos(xy_1)}=\frac{\cos\psi}{\cos\varphi},\quad \frac{\cos(zy_1)}{\cos(xy_1)}=-\frac{\sin\chi^2}{\cos\varphi\cos\chi};$$

woraus ferner mit Hülfe der bekannten Gleichung

$$\cos(xy_1)^2+\cos(yy_1)^2+\cos(zy_1)^2=1$$

leicht die folgenden Formeln erhalten werden:

$$88)\quad \begin{cases} \cos(xy_1)=\pm\dfrac{\cos\varphi\cos\chi}{\sin\chi}, \\ \cos(yy_1)=\pm\dfrac{\cos\psi\cos\chi}{\sin\chi}, \\ \cos(zy_1)=\mp\sin\chi; \end{cases}$$

in denen die obern und untern Zeichen sich auf einander beziehen.

Wir wollen nun im Folgenden, was offenbar genügt, in den Formeln 86) und 88) bloss die obern Zeichen beibehalten, und demzufolge setzen:

$$\cos(xx_1)=\frac{\cos\psi}{\sin\chi},\qquad \cos(yx_1)=-\frac{\cos\varphi}{\sin\chi},\qquad \cos(zx_1)=0;$$

$$\cos(xy_1)=\frac{\cos\varphi\cos\chi}{\sin\chi},\ \cos(yy_1)=\frac{\cos\psi\cos\chi}{\sin\chi},\ \cos(zy_1)=-\sin\chi;$$

$$\cos(xz_1)=\cos\varphi,\qquad \cos(yz_1)=\cos\psi,\qquad \cos(zz_1)=\cos\chi.$$

Dann ist, weil nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten bekanntlich allgemein

$$x = x_1 \cos(xx_1) + y_1 \cos(xy_1) + z_1 \cos(xz_1),$$
$$y = x_1 \cos(yx_1) + y_1 \cos(yy_1) + z_1 \cos(yz_1),$$
$$z = x_1 \cos(zx_1) + y_1 \cos(zy_1) + z_1 \cos(zz_1)$$

ist:

$$89)\ \begin{cases} x = x_1 \dfrac{\cos\psi}{\sin\chi} + y_1 \dfrac{\cos\varphi\cos\chi}{\sin\chi} + z_1 \cos\varphi, \\ y = -x_1 \dfrac{\cos\varphi}{\sin\chi} + y_1 \dfrac{\cos\psi\cos\chi}{\sin\chi} + z_1 \cos\psi, \\ z = -y_1 \sin\chi + z_1 \cos\chi. \end{cases}$$

Hieraus ergiebt sich aber mittelst leichter Rechnung

$$x\cos\chi - z\cos\varphi = x_1 \frac{\cos\psi\cos\chi}{\sin\chi} + y_1 \frac{\cos\varphi}{\sin\chi},$$

$$y\cos\chi - z\cos\psi = -x_1 \frac{\cos\varphi\cos\chi}{\sin\chi} + y_1 \frac{\cos\psi}{\sin\chi};$$

also

$$(x\cos\chi - z\cos\varphi)^2 + (y\cos\chi - z\cos\psi)^2 = x_1^2 \cos\chi^2 + y_1^2,$$

wobei man nur zu beachten hat, dass

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 + \cos\chi^2 = 1,$$

folglich

$$\cos\varphi^2 + \cos\psi^2 = \sin\chi^2$$

ist. Also ist nach 72) die Gleichung der Aberrations-Kegelfläche im Systeme der $x_1 y_1 z_1$:

$$90)\quad b(x_1^2 \cos\chi^2 + y_1^2)$$
$$= 2Ke\left(x_1 \frac{\cos\varphi\cos\chi}{\sin\chi} - y_1 \frac{\cos\psi}{\sin\chi}\right)(y_1 \sin\chi - z_1 \cos\chi)$$
$$+ K^2 b (y_1 \sin\chi - z_1 \cos\chi)^2,$$

oder, wie man nach gehöriger Entwickelung dieser Gleichung leicht findet:

$$91)\quad \left.\begin{array}{l} bx_1^2\cos\chi^2 \\ +(b+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2)y_1^2 \\ -2Kex_1y_1\cos\varphi\cos\chi \\ +2Kex_1z_1\dfrac{\cos\varphi\cos\chi^2}{\sin\chi} \\ -2K(e\dfrac{\cos\psi}{\sin\chi}-Kb\sin\chi)y_1z_1\cos\chi \\ -K^2bz_1^2\cos\chi^2 \end{array}\right\}=0.$$

Denken wir uns nun die Aberrations-Kegelfläche von einer auf der Axe der z_1, welche bekanntlich von dem Mittelpunkte der Erdbahn nach dem wahren Orte des Sterns gerichtet ist, senkrecht stehenden Ebene geschnitten, und nennen den Schnitt im Allgemeinen den Aberrations-Kegelschnitt, so ist, wenn wir uns dessen Ebene durch einen Punkt, dessen dritte Coordinate im Systeme der $x_1y_1z_1$ durch h_1 bezeichnet werden mag, gelegt denken, die Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts im Systeme der x_1y_1 nach dem Vorhergehenden:

$$92)\quad \left.\begin{array}{l} bx_1^2\cos\chi^2 \\ +(b+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2)y_1^2 \\ -2Kex_1y_1\cos\varphi\cos\chi \\ +2Keh_1x_1\dfrac{\cos\varphi\cos\chi^2}{\sin\chi} \\ -2Kh_1\cos\chi(e\dfrac{\cos\psi}{\sin\chi}-Kb\sin\chi)y_1 \\ -K^2bh_1^2\cos\chi^2 \end{array}\right\}=0.$$

oder, wenn wir der Kürze wegen von jetzt an

$$93)\quad \left\{\begin{array}{l} A=\quad b\cos\chi^2, \\ B=\quad b+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2, \\ C=-Ke\cos\varphi\cos\chi, \\ D=\quad Keh_1\dfrac{\cos\varphi\cos\chi^2}{\sin\chi}, \\ E=-Kh_1(e\dfrac{\cos\psi}{\sin\chi}-Kb\sin\chi)\cos\chi, \\ F=-K^2bh_1^2\cos\chi^2 \end{array}\right.$$

setzen:

$$94)\quad Ax_1^2+By_1^2+2Cx_1y_1+2Dx_1+2Ey_1+F=0.$$

§. 6.

Um nun diese Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts zu discutiren, legen wir zuvörderst durch einen ganz beliebigen Punkt,

dessen Coordinaten im Systeme der $x_1 y_1$ durch p_1, q_1 bezeichnet werden mögen, ein diesem Systeme paralleles Coordinatensystem der $x_1' y_1'$, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$95)\quad x_1 = p_1 + x_1',\quad y_1 = q_1 + y_1';$$

und wenn wir diese Ausdrücke von x_1, y_1 in die Gleichung 94) einführen, so erhalten wir nach leichter Rechnung die Gleichung

$$96)\quad \left.\begin{array}{c} Ax_1'^2 + By_1'^2 + 2Cx_1'y_1' \\ +2(Ap_1 + Cq_1 + D)x_1' + 2(Cp_1 + Bq_1 + E)y_1' \\ +Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F \end{array}\right\} = 0.$$

Die Coordinaten p_1, q_1 des Anfangspunktes des Systems der $x_1' y_1'$ kommen nur in den drei letzten Gliedern dieser Gleichung vor. Da nun p_1, q_1 sich im Allgemeinen bestimmen lassen, wenn zwischen diesen beiden Grössen zwei Gleichungen gegeben sind, so liegt der Gedanke sehr nahe, diese beiden für jetzt an sich ganz willkührlichen Grössen so zu bestimmen, dass zwei der drei letzten Glieder der obigen Gleichung, in denen die Coordinaten p_1, q_1 allein vorkommen, verschwinden, wodurch die in Rede stehende Gleichung bedeutend vereinfacht werden würde. Hierzu bieten sich uns aber ganz von selbst drei verschiedene Wege dar, indem wir die Grössen p_1, q_1 entweder so bestimmen können, dass die beiden Gleichungen

$$97)\quad \left\{\begin{array}{l} Ap_1 + Cq_1 + D = 0, \\ Cp_1 + Bq_1 + E = 0; \end{array}\right.$$

oder so, dass die beiden Gleichungen

$$98)\quad \left\{\begin{array}{c} Ap_1 + Cq_1 + D = 0, \\ Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0; \end{array}\right.$$

oder so, dass die beiden Gleichungen

$$99)\quad \left\{\begin{array}{c} Cp_1 + Bq_1 + E = 0, \\ Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0 \end{array}\right.$$

erfüllt werden. Den ersten dieser drei Wege wollen wir als den einfachsten im folgenden Paragraphen nun auch zuerst betreten.

§. 7.

Lösen wir die beiden Gleichungen

$$100)\quad \left\{\begin{array}{l} Ap_1 + Cq_1 + D = 0, \\ Cp_1 + Bq_1 + E = 0 \end{array}\right.$$

in Bezug auf p_1, q_1 als unbekannte Grössen auf, so erhalten

$$(C^2-AB)p_1+CE-BD=0,$$
$$(C^2-AB)q_1+CD-AE=0;$$

also

$$101)\quad p_1=\frac{BD-CE}{C^2-AB},\quad q_1=\frac{AE-CD}{C^2-AB}.$$

Bezeichnet man den Werth, welchen die Grösse

$$Ap_1{}^2+Bq_1{}^2+2Cp_1q_1+2Dp_1+2Eq_1+F,$$

die man aber auch unter der Form

$$(Ap_1+Cq_1+D)p_1+(Cp_1+Bq_1+E)q_1+Dp_1+Eq_1+F,$$

d. i. wegen der Gleichungen 100) unter der sehr einfachen Form

$$Dp_1+Eq_1+F$$

darstellen kann, erhält, wenn man in dieselbe für p_1, q_1 ihre obigen Werthe aus 101) einführt, durch $\varDelta$, so findet man sehr leicht

$$102)\quad \varDelta=\frac{AE^2+BD^2+FC^2-ABF-2CDE}{C^2-AB}.$$

Die Ausdrücke 101) und 102) liefern aber für p_1, q_1, $\varDelta$ nur dann endliche völlig bestimmte Werthe, wenn C^2-AB nicht verschwindet, d. h. wenn

$$C^2-AB\lessgtr 0$$

ist, und wir gelangen daher zu dem folgenden Resultate:

Wenn $C^2-AB\lessgtr 0$ ist, so kann man die Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts immer auf die Form

$$103)\quad Ax_1'^2+By_1'^2+2Cx_1'y_1'+\varDelta=0$$

bringen.

Der Fall, wenn $C^2-AB=0$ ist, erfordert eine besondere Betrachtung, die aber jetzt für's Erste bei Seite gesetzt werden soll.

Wir sehen aber schon, dass die Grösse C^2-AB für unsere ganze Untersuchung von grosser Wichtigkeit ist, und wollen dieselbe daher jetzt zuvörderst entwickeln.

Nach 93) ist nämlich

$$C^2-AB$$
$$=K^2e^2\cos\varphi^2\cos\chi^2-b\cos\chi^2(b+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2),$$

also, weil

$$\cos\varphi^2\cos\chi^2=\cos\chi^2-\cos\psi^2\cos\chi^2-\cos\chi^4$$

oder

$$\cos\varphi^2\cos\chi^2 = \sin\chi^2\cos\chi^2 - \cos\psi^2\cos\chi^2$$

ist,

$$C^2 - AB$$
$$= K^2(b^2+e^2)\sin\chi^2\cos\chi^2 - (b^2 + 2Kbe\cos\psi + K^2e^2\cos\psi^2)\cos\chi^2,$$

d. i.

$$104)\quad C^2 - AB = \cos\chi^2\{K^2a^2\sin\chi^2 - (b+Ke\cos\psi)^2\},$$

mittelst welches Ausdrucks von C^2-AB sich leicht die Bedingungen aufstellen lassen würden, unter denen

$$C^2-AB=0,\ \text{oder}\ C^2-AB<0,\ \text{oder}\ C^2-AB>0$$

ist.

Unter der Voraussetzung aber, dass

$$C^2-AB \lesseqgtr 0$$

ist, erhält man mittelst der Formeln 101) leicht:

$$p_1 = \frac{Keh_1\cos\varphi\cos\chi^2(b+Ke\cos\psi)}{(C^2-AB)\sin\chi},$$

$$q_1 = -\frac{Kh_1\cos\chi^3\{be\cos\psi - K(b^2\sin\chi^2 + e^2\cos\varphi^2)\}}{(C^2-AB)\sin\chi};$$

d. i., wenn wir für C^2-AB seinen Werth aus 104) einführen:

$$105)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{Keh_1\cos\varphi\,(b+Ke\cos\psi)}{\sin\chi\{K^2a^2\sin\chi^2 - (b+Ke\cos\psi)^2\}}, \\[2ex] q_1 = -\dfrac{Kh_1\cos\chi\{be\cos\psi - K(b^2\sin\chi^2+e^2\cos\varphi^2)\}}{\sin\chi\{K^2a^2\sin\chi^2 - (b+Ke\cos\psi)^2\}}; \end{cases}$$

oder, weil

$$b^2\sin\chi^2 + e^2\cos\varphi^2$$
$$= b^2(\sin\chi^2 - \cos\varphi^2) + a^2\cos\varphi^2 = a^2\cos\varphi^2 + b^2\cos\psi^2$$

ist:

$$106)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{Keh_1\cos\varphi(b+Ke\cos\psi)}{\sin\chi\{K^2a^2\sin\chi^2 - (b+Ke\cos\psi)^2\}}, \\[2ex] q_1 = -\dfrac{Kh_1\cos\chi\{be\cos\psi - K(a^2\cos\varphi^2+b^2\cos\psi^2)\}}{\sin\chi\{K^2a^2\sin\chi^2 - (b+Ke\cos\psi)^2\}}. \end{cases}$$

Hiernach ist auch

$$107)\quad \frac{p_1}{q_1} = -\frac{e\cos\varphi(b+Ke\cos\psi)}{\cos\chi\{be\cos\psi - K(b^2\sin\chi^2 + e^2\cos\varphi^2)\}}$$

oder

$$108)\quad \frac{p_1}{q_1} = -\frac{e\cos\varphi(b+Ke\cos\psi)}{\cos\chi\{be\cos\psi - K(a^2\cos\varphi^2+b^2\cos\psi^2)\}},$$

welches Verhältniss von h_1 unabhängig ist.

Ferner erhält man nach 102) mittelst leichter Rechnung

$$\varDelta = \frac{K^2bh_1{}^2(b^2+e^2)\cos\chi^4}{C^2-AB},$$

d. i.

$$\varDelta = \frac{K^2a^2bh_1{}^2\cos\chi^4}{C^2-AB},$$

und folglich nach 104)

$$109)\quad \varDelta = \frac{K^2a^2bh_1{}^2\cos\chi^2}{K^2a^2\sin\chi^2-(b+Ke\cos\psi)^2}.$$

Immer unter der Voraussetzung, dass

$$C^2-AB \lessgtr 0$$

ist, in welchem Falle sich die Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts nach dem Obigen auf die Form

$$110)\quad Ax_1{}'^2+By_1{}'^2+2Cx_1{}'y_1{}'+\varDelta=0$$

bringen lässt, legen wir jetzt durch den Anfang der $x_1{}'y_1{}'$, dessen Coordinaten im Systeme der x_1y_1 nach dem Vorhergehenden p_1, q_1 sind, ein neues rechtwinkliges Coordinatensystem der $x_1{}''y_1{}''$, bezeichnen den von dem positiven Theil der Axe der $x_1{}''$ mit dem positiven Theile der Axe der $x_1{}'$ eingeschlossenen Winkel, indem wir diesen Winkel von dem positiven Theile der Axe der $x_1{}'$ an durch den rechten Winkel $(x_1{}'y_1{}')$ hindurch von 0 bis 360° zählen, durch ξ, und nehmen den positiven Theil der Axe der $y_1{}''$ so an, dass man sich, um von dem positiven Theile der Axe der $x_1{}''$ durch den rechten Winkel $(x_1{}''y_1{}'')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_1{}''$ zu gelangen, ganz nach derselben Richtung bewegen muss, nach welcher man sich bewegen muss, um von dem positiven Theile der Axe der $x_1{}'$ durch den rechten Winkel $(x_1{}'y_1{}')$ hindurch zu dem positiven Theile der Axe der $y_1{}'$ zu gelangen. Dann hat man nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten zwischen den Coordinaten der Systeme der $x_1{}'y_1{}'$ und $x_1{}''y_1{}''$ die folgenden Beziehungen:

$$x_1{}' = x_1{}''\cos\xi - y_1{}''\sin\xi,$$
$$y_1{}' = x_1{}''\sin\xi + y_1{}''\cos\xi.$$

Führt man diese Ausdrücke von $x_1{}'$, $y_1{}'$ in die Gleichung 110) ein, so erhält man nach einigen leichten goniometrischen Verwandlungen

$$111)\quad \left.\begin{array}{l}(A\cos\xi^2+B\sin\xi^2+2C\sin\xi\cos\xi)x_1{}''^2\\ +(A\sin\xi^2+B\cos\xi^2-2C\sin\xi\cos\xi)y_1{}''^2\\ -\{(A-B)\sin 2\xi-2C\cos 2\xi\}x_1{}''y_1{}''\\ +\Delta\end{array}\right\}=0.$$

Soll nun das dritte, $x_1{}''y_1{}''$ enthaltende Glied verschwinden, muss der Winkel ξ so bestimmt werden, dass der Gleichung

$$112)\quad (A-B)\sin 2\xi-2C\cos 2\xi=0,$$

d. h. der Gleichung

$$113)\quad \operatorname{tang} 2\xi=\frac{2C}{A-B}$$

genügt wird, welches jederzeit möglich ist. Bestimmt man al ξ so, dass dieser Gleichung genügt wird, so erhält die Gleichu des Aberrations-Kegelschnitts in dem Systeme der $x_1{}''y_1{}''$ die f gende Form:

$$114)\quad \left.\begin{array}{l}(A\cos\xi^2+B\sin\xi^2+2C\sin\xi\cos\xi)x_1{}''^2\\ +(A\sin\xi^2+B\cos\xi^2-2C\sin\xi\cos\xi)y_1{}''^2\\ +\Delta\end{array}\right\}=0,$$

oder

$$115)\quad \left.\begin{array}{l}(A\cos\xi^2+B\sin\xi^2+C\sin 2\xi)x_1{}''^2\\ +(A\sin\xi^2+B\cos\xi^2-C\sin 2\xi)y_1{}''^2\\ +\Delta\end{array}\right\}=0,$$

oder, wenn wir der Kürze wegen

$$116)\quad \left\{\begin{array}{l}M=A\cos\xi^2+B\sin\xi^2+2C\sin\xi\cos\xi,\\ N=A\sin\xi^2+B\cos\xi^2-2C\sin\xi\cos\xi\end{array}\right.$$

oder

$$117)\quad \left\{\begin{array}{l}M=A\cos\xi^2+B\sin\xi^2+C\sin 2\xi,\\ N=A\sin\xi^2+B\cos\xi^2-C\sin 2\xi\end{array}\right.$$

setzen, die Form

$$118)\quad Mx_1{}''^2+Ny_1{}''^2+\Delta=0.$$

Aus der Gleichung 113) erhält man

$$\frac{\operatorname{tang}\xi}{1-\operatorname{tang}\xi^2}=\frac{C}{A-B},$$

also

$$\operatorname{tang}\xi^2+\frac{A-B}{C}\operatorname{tang}\xi=1,$$

woraus sich

$$119)\quad \tang \xi = \frac{-(A-B) \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}{2C}$$

oder auch

$$120)\quad \tang \xi = \frac{2C}{(A-B) \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

ergiebt.

Weil nun

$$\cos \xi^2 = \frac{1}{1 + \tang \xi^2}$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$\cos \xi^2 = \mp \frac{2C^2}{\{(A-B) \mp \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\} \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

oder

$$\cos \xi^2 = \pm \frac{(A-B) \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}{2\sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}.$$

Es ist aber

$$\sin \xi^2 = \cos \xi^2 \tang \xi^2,$$

und folglich nach dem Vorhergehenden

$$\sin \xi^2 = \pm \frac{2C^2}{\{(A-B) \pm \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}\} \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

oder

$$\sin \xi^2 = \mp \frac{(A-B) \mp \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}{2\sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}.$$

Also ist

$$\sin \xi^2 \cos \xi^2 = \frac{C^2}{(A-B)^2 + 4C^2}.$$

Wollte man nun

$$\sin \xi \cos \xi = \mp \frac{C}{\sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}$$

setzen, so wäre nach dem Vorhergehenden

$$\sin \xi \cos \xi \tang \xi = \sin \xi^2 = \pm \frac{(A-B) \mp \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}}{2\sqrt{(A-B)^2 + 4C^2}},$$

da wir doch vorher schon gesehen haben, dass

$$\sin\xi^2 = \mp\frac{(A-B)\mp\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}{2\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}$$

ist. Also muss

$$\sin\xi\cos\xi = \pm\frac{C}{\sqrt{(A-B)^2+4C^2}}$$

gesetzt werden.

Führt man aber die so eben gefundenen Ausdrücke von

$$\cos\xi^2,\ \sin\xi^2,\ \sin\xi\cos\xi$$

in die obigen Ausdrücke von M und N ein, so erhält man na einigen leichten Verwandlungen:

$$121)\quad \begin{cases} 2M = A+B\pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}, \\ 2N = A+B\mp\sqrt{(A-B)^2+4C^2}. \end{cases}$$

Hieraus ergeben sich auch die folgenden Gleichungen:

$$122)\quad \begin{cases} M+N = \quad A+B, \\ M-N = \pm\sqrt{(A-B)^2+4C^2}, \\ MN = -(C^2-AB). \end{cases}$$

Nach 93) ist:

$$123)\quad \begin{cases} A+B = \quad b(1+\cos\chi^2)+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2, \\ A-B = -b\sin\chi^2-2Ke\cos\psi+K^2b\sin\chi^2 \end{cases}$$

oder

$$124)\quad \begin{cases} A+B = 2b+2Ke\cos\psi-b(1+K^2)\sin\chi^2, \\ A-B = -2Ke\cos\psi-b(1-K^2)\sin\chi^2; \end{cases}$$

ferner

$$125)\quad (A-B)^2+4C^2$$
$$=(b\sin\chi^2+2Ke\cos\psi-K^2b\sin\chi^2)^2+4K^2e^2\cos\varphi^2\cos\chi^2$$

oder

$$126)\quad (A-B)^2+4C^2$$
$$=\{2Ke\cos\psi+b(1-K^2)\sin\chi^2\}^2+4K^2e^2\cos\varphi^2\cos\chi^2,$$

und folglich, weil, wie sich leicht zeigen lässt,

$$\cos\psi^2+\cos\varphi^2\cos\chi^2=\sin\varphi^2\sin\chi^2$$

ist:

$$127)\quad (A-B)^2+4C^2$$
$$=\sin\chi^2\left\{\begin{array}{l}b^2\sin\chi^2+4Kbe\cos\psi-2K^2(b^2\sin\chi^2-2e^2\sin\varphi^2)\\ \qquad -4K^3be\cos\psi+K^4b^2\sin\chi^2\end{array}\right\}$$

der

$$128)\quad (A-B)^2+4C^2$$
$$=\sin\chi^2\{b^2(1-K^2)^2\sin\chi^2+4beK(1-K^2)\cos\psi+4e^2K^2\sin\varphi^2\}.$$

Wenn nun

$$C^2-AB<0$$

t, so haben wegen der Gleichung

$$MN=-(C^2-AB)$$

e Grössen M und N offenbar gleiche Vorzeichen. Weil ferner $B>C^2$ und folglich das Product AB positiv ist, so haben auch und B gleiche Vorzeichen. Nach 93) ist aber A positiv, und ist folglich auch B, also auch $A+B$ positiv. Daher ist

$$A+B+\sqrt{(A-B)^2+4C^2}$$

denfalls positiv, und die Grössen M und N sind folglich nach m Obigen beide positiv. Nun ist aber, weil $C^2-AB<0$ ist, nach 109) offenbar negativ. Also sind die Grössen

$$\frac{\varDelta}{M} \text{ und } \frac{\varDelta}{N}$$

ide negativ, folglich die Grössen

$$-\frac{\varDelta}{M} \text{ und } -\frac{\varDelta}{N}$$

de positiv. Daher können wir

$$129)\quad m=\sqrt{-\frac{\varDelta}{M}},\quad n=\sqrt{-\frac{\varDelta}{N}}$$

zen, woraus sich

$$\frac{\varDelta}{M}=-m^2,\quad \frac{\varDelta}{N}=-n^2$$

iebt. Weil nun die Gleichung 118) sich auf die Form

$$\frac{x_1''^2}{\frac{\varDelta}{M}}+\frac{y_1''^2}{\frac{\varDelta}{N}}+1=0$$

gen lässt, so kann dieselbe offenbar auf die Form

$$130)\quad \left(\frac{x_1''}{m}\right)^2+\left(\frac{y_1''}{n}\right)^2=1$$

gebracht werden, und entspricht also in diesem Falle, wo C^2-AB ist, einer Ellipse.

Wenn daher

$$C^2-AB<0$$

ist, so ist der Aberrations-Kegelschnitt eine Ellipse.

Wenn ferner

$$C^2-AB>0$$

ist, so haben wegen der Gleichung

$$MN=-(C^2-AB)$$

die Grössen M und N offenbar ungleiche Vorzeichen. Also nen wir

$$131)\quad m=\sqrt{\pm\frac{\Delta}{M}},\ n=\sqrt{\mp\frac{\Delta}{N}}$$

setzen, wo die obern oder untern Vorzeichen genommen we müssen, jenachdem M positiv oder negativ ist, da nämlich 109) im vorliegenden Falle Δ offenbar positiv ist. Also ist

$$\frac{\Delta}{M}=\pm m^2,\ \frac{\Delta}{N}=\mp n^2$$

und folglich, weil die Gleichung 118) auf die Form

$$\frac{x_1''^2}{\frac{\Delta}{M}}+\frac{y_1''^2}{\frac{\Delta}{N}}+1=0$$

gebracht werden kann, offenbar

$$132)\quad \left(\frac{x_1''}{m}\right)^2-\left(\frac{y_1''}{n}\right)^2=\mp 1,$$

so dass also die Gleichung 118) im vorliegenden Falle, $C^2-AB>0$ ist, einer Hyperbel entspricht.

Wenn daher

$$C^2-AB>0$$

ist, so ist der Aberrations-Kegelschnitt eine Hyperbel.

Dass p_1, q_1 die Coordinaten des Mittelpunkts der Aberrat Ellipse oder Aberrations-Hyperbel sind, braucht wohl kaum besonders in Erinnerung gebracht zu werden.

In der Kürze wollen wir nun auch noch den Fall betrachten,

$$C^2 - AB = 0$$

ist.

Die beiden Gleichungen 98), nämlich die beiden Gleichungen

$$Ap_1 + Cq_1 + D,$$
$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0$$

sind jederzeit erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$(Ap_1 + Cq_1 + D)^2 = 0,$$
$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$A^2p_1^2 + C^2q_1^2 + 2ACp_1q_1 + 2ADp_1 + 2CDq_1 + D^2 = 0,$$
$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0$$

erfüllt sind. Verschwindet aber A nicht, so sind diese beiden Gleichungen jederzeit erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$A^2p_1^2 + C^2q_1^2 + 2ACp_1q_1 + 2ADp_1 + 2CDq_1 + D^2 = 0,$$
$$A^2p_1^2 + ABq_1^2 + 2ACp_1q_1 + 2ADp_1 + 2AEq_1 + AF = 0$$

erfüllt sind. Da nun unter der gemachten Voraussetzung die Differenz dieser Gleichungen

$$2(CD - AE)q_1 + D^2 - AF = 0$$

ist, so sind die beiden Gleichungen

$$Ap_1 + Cq_1 + D = 0,$$
$$Ap_1^2 + Bq_1^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0$$

jederzeit erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$A^2p_1^2 + C^2q_1^2 + 2ACp_1q_1 + 2ADp_1 + 2CDq_1 + D^2 = 0$$
$$2(CD - AE)q_1 + D^2 - AF = 0;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$(Ap_1 + Cq_1 + D)^2 = 0,$$
$$2(CD - AE)q_1 + D^2 - AF = 0;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$Ap_1 + Cq_1 + D = 0,$$
$$2(CD - AE)q_1 + D^2 - AF = 0$$

erfüllt sind. Aus diesen beiden Gleichungen erhält man

$$133)\quad \begin{cases} p_1 = \dfrac{A(CF-DE)+D(CD-AE)}{2A(AE-CD)}, \\ q_1 = \dfrac{D^2-AF}{2(AE-CD)}; \end{cases}$$

welche aber für p_1, q_1 nur dann endliche völlig bestimmte Werthe liefern, wenn die Grösse $AE-CD$ nicht verschwindet, wodurch wir mit Rücksicht auf das Obige zu dem Resultate geführt werden, dass im vorliegenden Falle, wo $C^2-AB=0$ ist, wenn die Grösse A, und auch die Grösse $AE-CD$ nicht verschwindet, die Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts immer auf die Form

$$Ax_1'^2+By_1'^2+2Cx_1'y_1'+2(Cp_1+Bq_1+E)y_1'=0,$$

d. i., wenn man die obigen Werthe von p_1, q_1 einführt, auf die Form

$$Ax_1'^2+By_1'^2+2Cx_1'y_1'+\frac{2(AE-CD)}{A}y_1'=0,$$

oder auf die Form

$$A^2x_1'^2+ABy_1'^2+2ACx_1'y_1'+2(AE-CD)y_1'=0,$$

also, weil $AB=C^2$ ist, auf die Form

$$134)\quad (Ax_1'+Cy_1')^2+2(AE-CD)y_1'=0$$

gebracht werden kann.

Durch den Anfang der $x_1'y_1'$ wollen wir nun ein neues Coordinatensystem der $x_1''y_1''$ legen, den positiven Theil der Axe der x_1'' mit dem positiven Theile der Axe der x_1' zusammenfallen lassen, und die durch die Gleichung

$$135)\quad Ax_1'+Cy_1'=0 \text{ oder } x_1'=-\frac{C}{A}y_1'$$

charakterisirte gerade Linie als die Axe der y_1'' annehmen. Entsprechen nun die Coordinaten ξ_1', η_1' und ξ_1'', η_1'' in den Systemen der $x_1'y_1'$ und $x_1''y_1''$ einem und demselben Punkte; so ist nach den Principien der analytischen Geometrie

$$x_1'-\xi_1'=-\frac{C}{A}(y_1'-\eta_1')$$

die Gleichung der durch diesen Punkt gelegten, der Axe der y_1'' parallelen geraden Linie, und die erste Coordinate des Durchschnittspunkts dieser geraden Linie mit der Axe der x_1' oder x_1'' ist folglich

$$\xi_1'+\frac{C\eta_1'}{A}=\frac{A\xi_1'+C\eta_1'}{A}.$$

Es fällt aber auf der Stelle in die Augen, dass diese erste Coor-

dinate unter den gemachten Voraussetzungen mit ξ_1'' einerlei, und folglich

$$\xi_1''=\frac{A\xi_1'+C\eta_1'}{A} \text{ oder } A\xi_1''=A\xi_1'+C\eta_1'$$

ist. Nehmen wir ferner den positiven Theil der Axe der y_1'' auf der positiven Seite der Axe der x_1' an, und bezeichnen den von demselben mit dem positiven Theile der Axe der x_1' eingeschlossenen, 180° nicht übersteigenden Winkel durch μ, so ist offenbar in völliger Allgemeinheit

$$\eta_1'=\eta_1''\sin\mu.$$

Entsprechen nun x_1', y_1' und x_1'', y_1'' einem und demselben Punkte des Aberrations-Kegelschnitts, so ist nach dem Vorhergehenden

$$Ax_1''=Ax_1'+Cy_1',\quad y_1'=y_1''\sin\mu;$$

und nach 134) ist folglich die Gleichung des Aberrations-Kegelschnitts im Systeme der $x_1''y_1''$:

$$136)\quad A^2x_1''^2+2(AE-CD)y_1''\sin\mu=0.$$

Also ist im vorliegenden Falle, wo $C^2-AB=0$ ist, und die Grössen A und $AE-CD$ nicht verschwinden, der Aberrations-Kegelschnitt eine Parabel.

Wenn in diesem Falle, wo A nicht verschwindet, $AE-CD$ verschwindet, also

$$C^2-AB=0,\quad AE-CD=0$$

ist, so ist

$$B=\frac{C^2}{A},\quad E=\frac{CD}{A};$$

und die Gleichung 91) des Aberrations-Kegelschnitts wird folglich, wie man leicht findet, in diesem Falle

$$137)\quad (Ax_1+Cy_1)^2+2D(Ax_1+Cy_1)+AF=0.$$

Löst man diese quadratische Gleichung in Beziehung auf Ax_1+Cy_1 auf, so erhält man

$$138)\quad Ax_1+Cy_1+D\mp\sqrt{D^2-AF}=0,$$

wodurch entweder eine gerade Linie oder ein System zweier einander paralleler gerader Linien, oder gar keine Linie, überhaupt gar kein geometrisches Object dargestellt wird.

Wenn A, und folglich wegen der Gleichung

$$C^2-AB=0$$

auch C verschwindet, so hätte, wenn auch B verschwände, d Gleichung 91) die Form

$$139)\quad 2Dx_1 + 2Ey_1 + F = 0$$

und stellte also eine gerade Linie dar. Wenn aber B nicht ve schwindet, so müssen wir versuchen, die dritte der drei oben a gedeuteten Transformationen der Gleichung 94) in Anwendung bringen. Die Gleichungen 99), nämlich die Gleichungen

$$Cp_1 + Bq_1 + E = 0,$$
$$Ap_1{}^2 + Bq_1{}^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0$$

sind aber jederzeit erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$(Cp_1 + Bq_1 + E)^2 = 0,$$
$$Ap_1{}^2 + Bq_1{}^2 + 2Cp_1q_1 + 2Dp_1 + 2Eq_1 + F = 0;$$

d. i. die beiden Gleichungen

$$C^2p_1{}^2 + B^2q_1{}^2 + 2BCp_1q_1 + 2CEp_1 + 2BEq_1 + E^2 = 0,$$
$$ABp_1{}^2 + B^2q_1{}^2 + 2BCp_1q_1 + 2BDp_1 + 2BEq_1 + BF = 0$$

erfüllt sind, wobei man zu beachten hat, dass B nicht verschwi det. Die Differenz dieser beiden Gleichungen ist aber

$$2(CE - BD)p_1 + E^2 - BF = 0,$$

und unsere beiden ersten Gleichungen sind also offenbar jederz erfüllt, wenn die beiden Gleichungen

$$Cp_1 + Bq_1 + E = 0,$$
$$2(CE - BD)p_1 + E^2 - BF = 0;$$

d. i., weil $C = 0$ ist, die beiden Gleichungen

$$Bq_1 + E = 0,\quad 2BDp_1 - E^2 + BF = 0$$

erfüllt sind. Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$140)\quad p_1 = \frac{E^2 - BF}{2BD},\quad q_1 = -\frac{E}{B};$$

von welchen Ausdrücken der erste für p_1 aber nur dann e endlichen völlig bestimmten Werth liefert, wenn D nicht schwindet. Dies also vorausgesetzt, kann nach dem Obigen Gleichung 94) auf die Form

$$Ax_1'^2 + By_1'^2 + 2Cx_1'y_1' + 2(Ap_1 + Cq_1 + D)x_1' = 0,$$

oder vielmehr, weil A, C beide verschwinden, auf die Form

$$141)\quad By_1'^2 + 2Dx_1' = 0$$

gebracht werden, und entspricht folglich einer Parabel.

Wenn D verschwindet, so hat, weil auch A und C verschwinden, die Gleichung 94) die Form

$$142)\quad By_1^2+2Ey_1+F=0,$$

und giebt durch Auflösung nach y_1 als unbekannte Grösse:

$$143)\quad y_1=\frac{-E\pm\sqrt{E^2-BF}}{B},$$

welche Gleichung entweder eine der Axe der x_1 parallele gerade Linie oder ein System zweier der Axe der x paralleler gerader Linien darstellt, oder gar keine geometrische Bedeutung hat.

Die weitere Ausführung dieses Gegenstandes würde diese Abhandlung zu sehr ausdehnen, und kann auch füglich dem eignen Fleisse des Lesers überlassen werden. Hauptsächlich würde es zunächst noch darauf ankommen, in die vorher entwickelten allgemeinen Formeln für A, B, C, D, E, F ihre Werthe aus 93) einzuführen, was an sich keine Schwierigkeit hat, eben deshalb aber füglich ganz dem eignen Fleisse des Lesers überlassen werden kann.

§. 8.

Unter der Voraussetzung, dass K, und folglich auch

$$i=K\sqrt{\frac{r'}{r}},$$

eine sehr kleine Grösse ist, wollen wir nun aus den im Vorhergehenden entwickelten ganz genauen Formeln, indem wir uns bei denselben kleine Vernachlässigungen gestatten, einfachere Näherungsformeln abzuleiten suchen.

Wenn wir in den Formeln

$$\cos\varphi=\cos\varphi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}+i(\cos\alpha-\cos\Theta_1\cos\varphi_1),$$
$$\cos\psi=\cos\psi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}+i(\cos\beta-\cos\Theta_1\cos\psi_1),$$
$$\cos\chi=\cos\chi_1\sqrt{1-i^2\sin\Theta_1{}^2}+i(\cos\gamma-\cos\Theta_1\cos\chi_1)$$

alle Glieder, welche in Beziehung auf die sehr kleine Grösse i, und also nach dem Obigen auch in Beziehung auf die sehr kleine Grösse K von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigen, so erhalten wir

$$144)\quad \begin{cases}\cos\varphi=\cos\varphi_1+i(\cos\alpha-\cos\Theta_1\cos\varphi_1),\\ \cos\psi=\cos\psi_1+i(\cos\beta-\cos\Theta_1\cos\psi_1),\\ \cos\chi=\cos\chi_1+i(\cos\gamma-\cos\Theta_1\cos\chi_1)\end{cases}$$

oder

$$145)\quad \begin{cases} \cos\varphi - \cos\varphi_1 = i(\cos\alpha - \cos\Theta_1\cos\varphi_1), \\ \cos\psi - \cos\psi_1 = i(\cos\beta - \cos\Theta_1\cos\psi_1), \\ \cos\chi - \cos\chi_1 = i(\cos\gamma - \cos\Theta_1\cos\chi_1). \end{cases}$$

Nun ist aber überhaupt

$$\cos u - \cos v = -2\sin\tfrac{1}{2}(u+v)\sin\tfrac{1}{2}(u-v),$$

und

$$\tfrac{1}{2}(u+v) = u - \tfrac{1}{2}(u-v) = v + \tfrac{1}{2}(u-v),$$

also

$$\begin{aligned} \sin\tfrac{1}{2}(u+v) &= \sin u\cos\tfrac{1}{2}(u-v) - \cos u\sin\tfrac{1}{2}(u-v) \\ &= \sin v\cos\tfrac{1}{2}(u-v) + \cos v\sin\tfrac{1}{2}(u-v), \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \cos u - \cos v &= -\sin u\sin(u-v) + 2\cos u\sin\tfrac{1}{2}(u-v)^2 \\ &= -\sin v\sin(u-v) - 2\cos v\sin\tfrac{1}{2}(u-v)^2, \end{aligned}$$

woraus sich ergiebt, dass man mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf die der Null sehr nahe kommende Grösse $u-v$ von der zweiten Ordnung sind,

$$\begin{aligned} \cos u - \cos v &= -(u-v)\sin u \\ &= -(u-v)\sin v \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} \cos u - \cos v &= (v-u)\sin u \\ &= (v-u)\sin v \end{aligned}$$

zu setzen berechtigt ist.

Wenden wir dies auf die Gleichungen 145) an, so erhalten wir:

$$146)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = -i\dfrac{\cos\alpha - \cos\Theta_1\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}, \\ \psi - \psi_1 = -i\dfrac{\cos\beta - \cos\Theta_1\cos\psi_1}{\sin\psi_1}, \\ \chi - \chi_1 = -i\dfrac{\cos\gamma - \cos\Theta_1\cos\chi_1}{\sin\chi_1} \end{cases}$$

oder

$$147)\quad \begin{cases} \varphi - \varphi_1 = i\left(\cos\Theta_1\cot\varphi_1 - \dfrac{\cos\alpha}{\sin\varphi_1}\right), \\ \psi - \psi_1 = i\left(\cos\Theta_1\cot\psi_1 - \dfrac{\cos\beta}{\sin\psi_1}\right), \\ \chi - \chi_1 = i\left(\cos\Theta_1\cot\chi_1 - \dfrac{\cos\gamma}{\sin\chi_1}\right). \end{cases}$$

Aus den aus dem Obigen bekannten Gleichungen

$$\cos\varphi_1=\frac{\cos\varphi-i\cos\alpha}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}},$$

$$\cos\psi_1=\frac{\cos\psi-i\cos\beta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}},$$

$$\cos\chi_1=\frac{\cos\chi-i\cos\gamma}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}$$

erhält man ferner

$$\cos\varphi-i\cos\alpha=\cos\varphi_1\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta},$$

$$\cos\psi-i\cos\beta=\cos\psi_1\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta},$$

$$\cos\chi-i\cos\gamma=\cos\chi_1\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta};$$

und folglich mit Vernachlässigung von Gliedern, welche in Beziehung auf i oder auf K von der zweiten Ordnung sind:

$$\cos\varphi-i\cos\alpha=\cos\varphi_1(1-i\cos\Theta),$$

$$\cos\psi-i\cos\beta=\cos\psi_1(1-i\cos\Theta),$$

$$\cos\chi-i\cos\gamma=\cos\chi_1(1-i\cos\Theta);$$

also

$$(\cos\varphi-i\cos\alpha)(1+i\cos\Theta)=\cos\varphi_1(1-i^2\cos\Theta^2),$$

$$(\cos\psi-i\cos\beta)(1+i\cos\Theta)=\cos\psi_1(1-i^2\cos\Theta^2),$$

$$(\cos\chi-i\cos\gamma)(1+i\cos\Theta)=\cos\chi_1(1-i^2\cos\Theta^2);$$

folglich, immer unter Verstattung derselben Vernachlässigungen:

$$148)\quad\begin{cases}\cos\varphi-\cos\varphi_1=i(\cos\alpha-\cos\Theta\cos\varphi),\\ \cos\psi-\cos\psi_1=i(\cos\beta-\cos\Theta\cos\psi),\\ \cos\chi-\cos\chi_1=i(\cos\gamma-\cos\Theta\cos\chi);\end{cases}$$

woraus man auf ganz ähnliche Art wie vorher

$$149)\quad\begin{cases}\varphi_1-\varphi=i\dfrac{\cos\alpha-\cos\Theta\cos\varphi}{\sin\varphi},\\ \psi_1-\psi=i\dfrac{\cos\beta-\cos\Theta\cos\psi}{\sin\psi},\\ \chi_1-\chi=i\dfrac{\cos\gamma-\cos\Theta\cos\chi}{\sin\chi};\end{cases}$$

oder

$$150)\quad \begin{cases} \varphi_1-\varphi=-i(\cos\Theta\cot\varphi-\frac{\cos\alpha}{\sin\varphi}), \\ \psi_1-\psi=-i(\cos\Theta\cot\psi-\frac{\cos\beta}{\sin\psi}), \\ \chi_1-\chi=-i(\cos\Theta\cot\chi-\frac{\cos\gamma}{\sin\chi}) \end{cases}$$

erhält.

Nach 53), 55) und 146) ist also

$$151)\quad \begin{cases} \varphi-\varphi_1=-K\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi_1+\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\cot\varphi_1\right), \\ \psi-\psi_1=\quad K\left(\frac{bX}{ar}\sin\psi_1+\frac{aY}{br}\cos\varphi_1\cot\psi_1\right), \\ \chi-\chi_1=\quad K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\chi_1; \end{cases}$$

und nach 53), 55*) und 149) ist

$$152)\quad \begin{cases} \varphi_1-\varphi=\quad K\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi+\frac{bX}{ar}\cos\psi\cot\varphi\right), \\ \psi_1-\psi=-K\left(\frac{bX}{ar}\sin\psi+\frac{aY}{br}\cos\varphi\cot\psi\right), \\ \chi_1-\chi=-K\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\chi. \end{cases}$$

Sollen aber

$$\varphi-\varphi_1,\quad \psi-\psi_1,\quad \chi-\chi_1$$

oder

$$\varphi_1-\varphi,\quad \psi_1-\psi,\quad \chi_1-\chi$$

in Secunden ausgedrückt sein, so muss man setzen:

$$153)\quad \begin{cases} \varphi-\varphi_1=-\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi_1+\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\cot\varphi_1\right), \\ \psi-\psi_1=\quad\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{bX}{ar}\sin\psi_1+\frac{aY}{br}\cos\varphi_1\cot\psi_1\right), \\ \chi-\chi_1=\quad\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)\cot\chi_1 \end{cases}$$

und

$$154)\quad \begin{cases} \varphi_1-\varphi=\quad\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY}{br}\sin\varphi+\frac{bX}{ar}\cos\psi\cot\varphi\right), \\ \psi_1-\psi=-\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{bX}{ar}\sin\varphi+\frac{aY}{br}\cos\varphi\cot\psi\right), \\ \chi_1-\chi=-\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)\cot\chi. \end{cases}$$

19*

Weil nach 59)

$$\sin\Omega=\frac{i\sin\Theta}{\sqrt{1+i^2-2i\cos\Theta}}$$

ist, so ist, mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Beziehung auf i oder K von der zweiten Ordnung sind,

$$\sin\Omega=i\sin\Theta;$$

und nehmen wir hierzu die ganz genaue Gleichung 57), so erhalten wir

$$155)\quad \sin\Omega=i\sin\Theta_1,\ \sin\Omega=i\sin\Theta;$$

oder

$$156)\quad \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.\sin\Theta_1,\ \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.\sin\Theta.$$

Auch ist

$$157)\quad \begin{cases} \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi_1-\frac{bX}{ar}\cos\psi_1\right)^2}, \\ \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}-\left(\frac{aY}{br}\cos\varphi-\frac{bX}{ar}\cos\psi\right)^2}; \end{cases}$$

von welchen Gleichungen die erste völlig genau ist, bei der zweiten Glieder, welche in Beziehung auf K von der zweiten Ordnung sind, vernachlässigt worden sind.

Für $\chi=0$ ist nach 67) und 69) mit Vernachlässigung von Gliedern, die in Beziehung auf K von der zweiten Ordnung sind:

$$158)\quad \sin\chi_1=K\sqrt{\frac{r'}{r}},\ \chi_1=K\sqrt{\frac{r'}{r}}$$

und

$$159)\quad \sin\Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}},\ \Omega=K\sqrt{\frac{r'}{r}}.$$

§. 9.

Hier ist nun auch der Ort, wenigstens in der Kürze zu zeigen, wie sich der Werth der Constante K aus den astronomischen Beobachtungen der Fixsterne ableiten lässt.

Hat man nämlich ein und denselben Fixstern zwei Mal zu verschiedenen Zeiten, wo die Coordinaten der Erde und ihre Entfernung von der Sonne oder ihr Vector X', Y', ϱ' und X'', Y'', ϱ'' sind, beobachtet, und seine scheinbaren astronomischen Coordinaten $\varphi_1{}'$, $\psi_1{}'$, $\chi_1{}'$ und $\varphi_1{}''$, $\psi_1{}''$, $\chi_1{}''$ durch die geeigneten astronomischen Hülfsmittel und Methoden gemessen, so hat man nach

dem Vorhergehenden, wenn wie früher die wahren astronomisch Coordinaten des Sterns durch φ, ψ, χ bezeichnet werden, d beiden folgenden Systeme von Gleichungen:

$$\varphi-\varphi_1{}'=-\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY'}{b\varrho'}\sin\varphi_1{}'+\frac{bX'}{a\varrho'}\cos\psi_1{}'\cot\varphi_1{}'\right),$$

$$\psi-\psi_1{}'=\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{bX'}{a\varrho'}\sin\psi_1{}'+\frac{aY'}{b\varrho'}\cos\varphi_1{}'\cot\psi_1{}'\right),$$

$$\chi-\chi_1{}'=\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY'}{b\varrho'}\cos\varphi_1{}'-\frac{bX'}{a\varrho'}\cos\psi_1{}'\right)\cot\chi_1{}'$$

und

$$\varphi-\varphi_1{}''=-\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY''}{b\varrho''}\sin\varphi_1{}''+\frac{bX''}{a\varrho''}\cos\psi_1{}''\cot\varphi_1{}''\right),$$

$$\psi-\psi_1{}''=\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{bX''}{a\varrho''}\sin\psi_1{}''+\frac{aY''}{b\varrho''}\cos\varphi_1{}''\cot\psi_1{}''\right),$$

$$\chi-\chi_1{}''=\frac{K}{\sin 1''}\left(\frac{aY''}{b\varrho''}\cos\varphi_1{}''-\frac{bX''}{a\varrho''}\cos\psi_1{}''\right)\cot\chi_1{}'';$$

oder der Kürze wegen

$$\varphi-\varphi_1{}'=-\frac{K}{\sin 1''}P',\quad \psi-\psi_1=\frac{K}{\sin 1''}Q',\quad \chi-\chi_1{}'=\frac{K}{\sin 1''}S'$$

und

$$\varphi-\varphi_1{}''=-\frac{K}{\sin 1''}P'',\quad \psi-\psi_1{}''=\frac{K}{\sin 1''}Q'',\quad \chi-\chi_1{}''=\frac{K}{\sin 1''}S'';$$

wo die Bedeutung der Symbole

P', Q', S' und P'', Q'', S''

leicht von selbst erhellen wird. Also ist

$$\varphi_1{}'-\varphi_1{}''=\frac{K}{\sin 1''}(P'-P''),$$

$$\psi_1{}'-\psi_1{}''=-\frac{K}{\sin 1''}(Q'-Q''),$$

$$\chi_1{}'-\chi_1{}''=-\frac{K}{\sin 1''}(S'-S'');$$

folglich

$$\frac{K}{\sin 1''}=\frac{\varphi_1{}'-\varphi_1{}''}{P'-P''},$$

$$\frac{K}{\sin 1''}=-\frac{\psi_1{}'-\psi_1{}''}{Q'-Q''},$$

$$\frac{K}{\sin 1''} = -\frac{\chi_1' - \chi_1''}{S' - S''}$$

oder

$$K = \frac{\varphi_1' - \varphi_1''}{P' - P''} \sin 1'',$$

$$K = -\frac{\psi_1' - \psi_1''}{Q' - Q''} \sin 1'',$$

$$K = -\frac{\chi_1' - \chi_1''}{S' - S''} \sin 1'';$$

mittelst welcher Formeln also die Constante

$$\frac{K}{\sin 1''} \text{ oder } K$$

aus den Beobachtungen abgeleitet werden kann. Dass sich aber auf diesem Wege nur durch möglichste Vervielfältigung der Beobachtungen und genaue Berechnung derselben nach den in der Astronomie gebräuchlichen Methoden eine hinreichend grosse Genauigkeit in der Bestimmung der obigen wichtigen Constante erreichen lässt, versteht sich von selbst, und gehört jetzt weiter nicht hierher.

Hat man nun auch aus den bekannten Elementen der Bewegung der Erde um die Sonne die Constante K_1 mittelst der Formel

$$K_1 = V_1 \sqrt{\frac{a^2 - eX_1}{a^2 + eX_1}} = V_1 \sqrt{\frac{r_1}{r_1'}},$$

wo sich V_1, X_1, r_1, r_1' auf irgend einen bestimmten Ort der Erde in ihrer Bahn beziehen, berechnet, so findet man die Geschwindigkeit $\mathfrak{G}$ des Lichts mittelst der aus dem Obigen bekannten Formel

$$\mathfrak{G} = \frac{K_1}{K},$$

und die auf diesem Wege erhaltene Bestimmung der Geschwindigkeit des Lichts stimmt auf eine merkwürdige Weise mit der auf ganz anderem Wege aus den Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten abgeleiteten Bestimmung dieser Geschwindigkeit überein.

§. 10.

Wenn K so klein ist, dass man Glieder, welche in Beziehung auf diese Grösse von der zweiten Ordnung sind, ohne merklichen Fehler vernachlässigen kann, wie wir im Folgenden wieder annehmen wollen, so ist nach dem Binomischen Lehrsatze, wie man leicht findet,

$$(b^2+2Kbe\cos\psi+K^2e^2)^{-\frac{1}{2}}=b^{-1}(1-K\frac{e}{b}\cos\psi),$$

und folglich nach 80):

$$160)\quad \begin{cases} \cos\mathfrak{A}=\pm\cos\varphi(1-K\frac{e}{b}\cos\psi), \\ \cos\mathfrak{B}=\pm\cos\psi(1+K\frac{e}{b}\sin\psi\tang\psi), \\ \cos\mathfrak{C}\ =\pm\cos\chi(1-K\frac{e}{b}\cos\psi); \end{cases}$$

durch welche Formeln die Lage der Axe der Aberrations-Kegelfläche bestimmt wird.

Ferner ist nach 82) mit demselben Grade der Genauigkeit wie vorher

$$161)\quad \sin\theta=K\frac{e}{b}\sin\psi,$$

oder auch

$$162)\quad \theta=K\frac{e}{b}\sin\psi.$$

Nach 104) ist

$$163)\quad C^2-AB=-b\cos\chi^2(b+2Ke\cos\psi),$$

und folglich offenbar nach dem Obigen, wenn nur $\cos\chi$ nicht verschwindet, d. h. nicht $\chi=90^0$ ist, der Aberrations-Kegelschnitt unter der hier immer zum Grunde liegenden Voraussetzung, dass K eine so kleine Grösse ist, dass Glieder, welche in Bezug auf dieselbe von der zweiten Ordnung sind, ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können, eine Ellipse.

Aus 106) ergiebt sich zuvörderst

$$p_1=-\frac{Keh_1\cos\varphi}{\sin\chi(b+2Ke\cos\psi)},$$

$$q_1=\frac{Keh_1\cos\psi\cos\chi}{\sin\chi(b+2Ke\cos\psi)};$$

also

$$p_1=-\frac{Keh_1\cos\varphi}{b\sin\chi}(1-2K\frac{e}{b}\cos\psi),$$

$$q_1=\frac{Keh_1\cos\psi\cos\chi}{b\sin\chi}(1-2K\frac{e}{b}\cos\psi);$$

und folglich

$$164) \begin{cases} p_1 = -Kh_1 \frac{e}{b} \cos\varphi \operatorname{cosec}\chi, \\ q_1 = \quad Kh_1 \frac{e}{b} \cos\psi \cot\chi; \end{cases}$$

oder

$$165) \begin{cases} \frac{p_1}{h_1} = -K\frac{e}{b} \cos\varphi \operatorname{cosec}\chi, \\ \frac{q_1}{h_1} = \quad K\frac{e}{b} \cos\psi \cot\chi. \end{cases}$$

Weil nach 109) die Grösse $\varDelta$ in Bezug auf K selbst von der zweiten Ordnung ist, so können wir, wenn $\varDelta$ nicht wirklich verschwinden soll, wie es erforderlich ist, nur erst Glieder vernachlässigen, welche in Bezug auf K von der dritten Ordnung sind, und erhalten, weil

$$\varDelta = -\frac{K^2a^2h_1{}^2\cos\chi^2}{b\{1+2K\frac{e}{b}\cos\psi - K^2\left(\frac{a^2}{b^2}\sin\chi^2 - \frac{e^2}{b^2}\cos\psi^2\right)\}}$$

ist, auf diese Weise leicht

$$166) \quad \varDelta = -\frac{K^2a^2h_1{}^2\cos\chi^2}{b}.$$

Nach 123) ist

$$A+B = b(1+\cos\chi^2) + 2Ke\cos\psi,$$
$$A-B = -b\sin\chi^2 - 2Ke\cos\psi;$$

und nach 125) ist

$$\sqrt{(A-B)^2+4C^2} = b\sin\chi^2 + 2Ke\cos\psi.$$

Also ist, wie man leicht findet,

$$A+B+\sqrt{(A-B)^2+4C^2} = 2(b+2Ke\cos\psi),$$
$$A+B-\sqrt{(A-B)^2+4C^2} = 2b\cos\chi^2;$$

und

$$-(A-B)+\sqrt{(A-B)^2+4C^2} = 2(b\sin\chi^2+2Ke\cos\psi),$$
$$-(A-B)-\sqrt{(A-B)^2+4C^2} = 0.$$

Nehmen wir nun, wie es offenbar, ohne der Allgemeinheit zu schaden, verstattet ist, in der Gleichung 119) das untere Zeichen, so ist

$$167) \quad \tan\xi = 0;$$

und wir müssen nun nach 121)

$$2M = A + B - \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2},$$
$$2N = A + B + \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2};$$

also nach dem Vorhergehenden

$$168)\quad \begin{cases} M = b\cos\chi^2, \\ N = b + 2Ke\cos\psi \end{cases}$$

setzen. Folglich ist nach 129):

$$m^2 = -\frac{\Delta}{M} = \frac{K^2a^2h_1^2\cos\chi^2}{b^2\cos\chi^2},$$
$$n^2 = -\frac{\Delta}{N} = \frac{K^2a^2h_1^2\cos\chi^2}{b(b+2Ke\cos\psi)};$$

oder

$$m^2 = -\frac{\Delta}{M} = K^2h_1^2\frac{a^2}{b^2},$$
$$n^2 = -\frac{\Delta}{N} = K^2h_1^2\frac{a^2}{b^2}\cos\chi^2(1 - 2K\frac{e}{b}\cos\psi);$$

d. i.

$$m^2 = K^2h_1^2\frac{a^2}{b^2},\quad n^2 = K^2h_1^2\frac{a^2}{b^2}\cos\chi^2;$$

oder

$$\frac{m^2}{h_1^2} = K^2\frac{a^2}{b^2},\quad \frac{n^2}{h_1^2} = K^2\frac{a^2}{b^2}\cos\chi^2;$$

und folglich, unter der Voraussetzung, dass h_1 positiv ist,

$$169)\quad \frac{m}{h_1} = K\frac{a}{b},\quad \frac{n}{h_1} = \pm K\frac{a}{b}\cos\chi;$$

wo man in der zweiten Gleichung das obere oder untere Zeichen nehmen muss, jenachdem $\cos\chi$ positiv oder negativ ist

§. 11.

Wir wollen nun zeigen, wie die Coordinaten X, Y der Erde und die Vectoren r, r' derselben berechnet werden können. Zu dem Ende denken wir uns durch die Sonne ein dem Systeme der xy paralleles Coordinatensystem gelegt, und bezeichnen den von dem Vector r der Erde mit dem positiven Theile der ersten Axe dieses neuen Systems eingeschlossenen Winkel, indem wir denselben von dem positiven Theile der in Rede stehenden Axe durch den Coordinatenwinkel des betreffenden Systems hindurch

von 0 bis 360° zählen, durch λ; so sind offenbar in völliger Allgemeinheit

$$r\cos\lambda,\ r\sin\lambda$$

die Coordinaten der Erde in dem neuen Systeme, und da nun e, 0 die Coordinaten des Anfangs des neuen Systems in dem Systeme der xy sind, so ist nach der Lehre von der Verwandlung der Coordinaten

$$170)\quad X=e+r\cos\lambda,\quad Y=r\sin\lambda.$$

Bezeichnen wir nun aber die heliocentrische Länge des Periheliums durch $\overline{\omega}$ und die geocentrische Länge der Sonne durch L, so wird man sich durch eine einfache Betrachtung leicht überzeugen, dass immer entweder

$$\lambda=\pm180^{\circ}-(L-\overline{\omega})$$

oder

$$\lambda=540^{\circ}-(L-\overline{\omega}),$$

und folglich allgemein

$$\cos\lambda=-\cos(L-\overline{\omega}),\quad \sin\lambda=\sin(L-\overline{\omega});$$

also nach dem Vorhergehenden

$$171)\quad X=e-r\cos(L-\overline{\omega}),\quad Y=r\sin(L-\overline{\omega})$$

ist.

Nun ist aber, wie wir aus dem Obigen wissen,

$$r=a-\frac{eX}{a};$$

also ist

$$r=a-\frac{e}{a}\{e-r\cos(L-\overline{\omega})\},$$

d. i.

$$r=\frac{b^2+er\cos(L-\overline{\omega})}{a},$$

und folglich

$$172)\quad r=\frac{b^2}{a-e\cos(L-\overline{\omega})}.$$

Also ist nach 171), wie man leicht findet:

$$173)\quad X=a\frac{e-a\cos(L-\overline{\omega})}{a-e\cos(L-\overline{\omega})},\quad Y=\frac{b^2\sin(L-\overline{\omega})}{a-e\cos(L-\overline{\omega})}.$$

Weil ferner nach dem Obigen

$$r'=a+\frac{eX}{a}=2a-r$$

ist, so ist, wie man leicht findet:

$$174)\quad r'=\frac{a^2+e^2-2ae\cos(L-\varpi)}{a-e\cos(L-\varpi)}.$$

Am leichtesten ergiebt sich aber natürlich r', wenn man r hat, mittelst der Formel

$$175)\quad r'=2a-r.$$

Man kann sich auch die beiden Formeln

$$r'+r=2a,\quad r'-r=\frac{2eX}{a};$$

d. i.

$$176)\quad r'+r=2a,\quad r'-r=2e\frac{e-a\cos(L-\varpi)}{a+e\cos(L-\varpi)}$$

merken.

Auch ist nach 172) und 174)

$$177)\quad \frac{r'}{r}=\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{e}{b}\right)^2-2\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{b}\cos(L-\varpi),$$

oder, wie hieraus leicht folgt:

$$178)\quad \frac{r'}{r}=\left(\frac{a}{b}-\frac{e}{b}\right)^2\cos\tfrac{1}{2}(L-\varpi)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{e}{b}\right)^2\sin\tfrac{1}{2}(L-\varpi)^2.$$

Ferner ist nach 172) und 173)

$$179)\quad \frac{bX}{ar}=\frac{e-a\cos(L-\varpi)}{b},\quad \frac{aY}{br}=\frac{a}{b}\sin(L-\varpi)$$

oder

$$180)\quad \frac{bX}{ar}=\frac{e}{b}-\frac{a}{b}\cos(L-\varpi),\quad \frac{aY}{br}=\frac{a}{b}\sin(L-\varpi).$$

Eine weitere Ausführung dieses Gegenstandes wird hier nicht nöthig sein.

§. 12.

Bezeichnen wir die wahre und scheinbare Länge und Breite des Sterns, beide auf die aus der Astronomie hinreichend bekannte Weise genommen, durch $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$; so wird mittels einer einfachen geometrischen Betrachtung sogleich erhellen, dass

zwischen den Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$, φ, ψ, χ und zwischen den Grössen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$, φ_1, ψ_1, χ_1 die folgenden Gleichungen Statt finden:

$$181) \begin{cases} \cos\varphi = \cos(\bar{\omega} - \mathfrak{L}) \cos\mathfrak{B}, \\ \cos\psi = \sin(\bar{\omega} - \mathfrak{L}) \cos\mathfrak{B}, \\ \cos\chi = \sin\mathfrak{B} \end{cases}$$

und

$$182) \begin{cases} \cos\varphi_1 = \cos(\bar{\omega} - \mathfrak{L}_1) \cos\mathfrak{B}_1, \\ \cos\psi_1 = \sin(\bar{\omega} - \mathfrak{L}_1) \cos\mathfrak{B}_1, \\ \cos\chi_1 = \sin\mathfrak{B}_1; \end{cases}$$

mittelst welcher also die Grössen φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1 leicht aus den Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$, so wie auch umgekehrt die Grössen $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{B}_1$ leicht aus den Grössen φ, ψ, χ und φ_1, ψ_1, χ_1 gefunden werden können, was hier keiner weiteren Erläuterung bedarf.

In der Einleitung habe ich schon bemerkt, dass ich in dieser Abhandlung die Theorie der Aberration nicht eigentlich für ihren praktischen Gebrauch in der Astronomie darzustellen die Absicht gehabt habe, sondern mehr eine Entwickelung ganz allgemeiner und völlig strenger Formeln bezweckte. Deshalb sage ich jetzt auch nichts weiter über die von der Bewegung der Erde um ihre Axe herrührende Aberration und über die Aberration bei den Planeten und Cometen, sondern verweise in dieser Beziehung auf die bekannten ausführlichern Lehr- und Handbücher der Astronomie, werde jedoch vielleicht späterhin auf diesen Gegenstand zurück kommen.

XXVI.

Ueber die Bestimmbarkeit eines sphärischen Dreieckes durch drei Stücke, von denen zwei einander gegenüber liegen.

Von
Herrn Dr. Wilhelm Matzka,
Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I.

Sind zur Bestimmung eines Kugeldreieckes von seinen sechs Stücken (Seiten und Winkeln) drei gegeben, von denen zwei einander gegenüber liegen; so tritt bekanntlich zuweilen Unmöglichkeit, zuweilen Unbestimmtheit (Zweideutigkeit) ein. Zu erforschen und einfache Kennzeichen anzugeben, wann solches geschehe oder nicht, ist der Zweck gegenwärtigen Aufsatzes.

Eigentlich sind hier zwei Fälle zu unterscheiden; es können nemlich

entweder zwei Seiten mit einem Gegenwinkel,
oder zwei Winkel mit einer Gegenseite

gegeben sein; allein der zweite Fall lässt sich leicht auf den ersten zurückführen, desswegen werden wir vorerst nur diesen ausführlich untersuchen.

Dabei gilt wie sonst immer die Einschränkung, dass jedes Stück des Dreieckes der Grösse nach zwischen 0 und 180° liege. Zugleich leuchtet aus der Lehre über Congruenz der Kugeldreiecke ein, dass ein solches durch drei derartige Stücke völlig bestimmbar sei, sobald durch sie irgend eines der übrigen drei Stücke, mittels Rechnung oder Zeichnung (Construction) völlig bestimmt werden kann

Seien nun bei einem Kugeldreiecke überhaupt die Seiten durch a, b, c und in derselben Ordnung die ihnen gegenüber stehenden Winkel durch α, β, γ bezeichnet; und seien

gegeben: die zwei Seiten a, b
mit dem Gegenwinkel α der ersteren, daher

zu suchen: der Gegenwinkel β der zweiten Seite,
die dritte Seite c, und der dritte Winkel γ.

Die Berechnung jedes dieser drei zu suchenden Stücke, so wie auch die Zeichnung des Dreieckes, wird die Bedingungen der Möglichkeit und Bestimmtheit des Dreieckes selbst an die Hand geben.

Um jedoch unsere Untersuchung nicht zwecklos auszudehnen, und weil die Bestimmtheit und Möglichkeit von gleichschenkligen, rechtwinkligen und Quadranten-Dreiecken ohnehin leicht zu beurtheilen ist; werden wir nicht nur a und b ungleich, sondern auch jedes Bestimmungsstück von 90^0 verschieden voraussetzen.

2.

A. Die Berechnung des anderen Gegenwinkels β erfolgt nach dem bekannten Satze

$$\sin a : \sin b = \sin\alpha : \sin\beta,$$

woraus man erhält $\sin\beta = \dfrac{\sin b \sin\alpha}{\sin a}$.

Nun sind alle hier vorkommenden Sinus, weil des Dreieckes Stücke zwischen 0 und 180^0 liegen, positiv, und kein Sinus kann >1 sein; mithin ist das Dreieck möglich oder unmöglich, je nachdem

$$\sin a \text{ entweder } \geqq \text{ oder } < \sin b \sin\alpha \text{ ist.}$$

Zur Vereinfachung der Untersuchung kann man, weil $\sin b$ und $\sin\alpha$, also auch ihr Product positiv und <1 sind, dieses Product dem Sinus eines Winkels h gleich setzen, nemlich

$$\sin h = \sin b \sin\alpha$$

annehmen, wonach dann

$$\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin a}$$

wird und Folgendes einleuchtet *).

1. Wenn $\sin a < \sin h$, ist das Dreieck unmöglich;

2. wenn $\sin a = \sin h$, ist $\sin\beta = 1$, also $\beta = 90^0$, daher das Dreieck möglich, bestimmt und rechtwinklig;

---

*) Man wird sich leicht überzeugen können, dass h der aus dem, die gegebenen Seiten a und b vereinigenden Scheitel, auf die gegenüber liegende Seite senkrecht gezogene grösste Kreisbogen ist.

3. wenn $\sin a > \sin h$, ist das Dreieck zwar möglich, allein der zwischen 0 und 180° liegende Winkel β ist durch seinen Sinus zu bestimmen, desswegen kann er überhaupt zwei zu 180° sich ergänzende Werthe annehmen, und es bleibt daher noch zu untersuchen, ob von diesen nur einer oder jeder genüge.

Zur Entscheidung dessen wird der Satz dienen, dass

je nachdem die Seite $b > < a$
ist, auch der Winkel $\beta > < \alpha$ sein muss.

Das Dreieck wird nemlich bestimmt, eingestaltig / unbestimmt, zweigestaltig sein, wenn von den für den gesuchten Winkel möglichen zwei Werthen β und $180^\circ - \beta$ nur einer / ein jeder $>$ oder $< \alpha$ ist, also wenn (in Absicht auf Grösse) α zwischen / ausserhalb β und $180^\circ - \beta$ liegt.

Dies Kennzeichen setzt jedoch wirkliche (wenn gleich nur beiläufige) Ausrechnung beider Werthe von β voraus; es bleibt aber wünschenswerth, diese Ein- oder Zweigestaltigkeit des Dreieckes sogleich an den drei Bestimmungsstücken selbst zu erkennen. Das vermittelt der Lehrsatz:

„Im Kugeldreiecke ist die Summe jeder zwei Seiten mit der Summe ihrer Gegenwinkel in derselben Grössenvergleichung mit 180°, d. h. zugleich entweder so gross oder grösser oder kleiner als 180°;"

nämlich je nachdem

$$a + b = > < 180^\circ$$

ist, muss auch

$$\alpha + \beta = > < 180^\circ$$

sein. Denn hieraus folgt unmittelbar, dass je nachdem

$$a = > < 180^\circ - b$$

ist, auch

$$\alpha = > < 180^\circ - \beta$$

sein muss. Daher schliesst man aus diesem und dem vorigen Vergleichungssatze den folgenden:

„Wenn eine Seite a eines Kugeldreieckes (hinsichtlich der Grösse) zwischen / ausserhalb einer anderen Seite b und ihrem Supplement $180^\circ - b$ liegt; so liegt auch der Gegenwinkel α der ersteren zwischen / ausserhalb dem Gegenwinkel β der anderen Seite und seinem Supplement $180^\circ - \beta$."

Daraus folgt nun der Schlusssatz:

Liegt (in Absicht auf Grösse) die sammt ihrem Gegenwinkel angegebene Kugeldreiecksseite a zwischen / ausserhalb der anderen gegebenen Seite b und ihrem Supplement 180°-b; so ist das Dreieck (wofern seine Möglichkeit bereits nachgewiesen worden) bestimmt / unbestimmt.

Merkwürdig ist aber noch, dass jenes Kennzeichen der Möglichkeit des Kugeldreieckes mit diesem seiner Bestimmtheit im Zusammenhange steht.

Aus $\sin h=\sin b\sin \alpha$ und $\sin \alpha<1$ folgt nemlich jedenfalls $\sin h<\sin b$.

Ist nun $\sin a>\sin b$, so ist sicher auch $\sin a>\sin h$, also das Dreieck möglich;

ist aber $\sin a<\sin b$, so kann $\sin a \gtreqless \sin h$ sein, also ist diese Möglichkeit nicht entscheidbar.

Es frägt sich jedoch noch, wie mit dieser Vergleichung der Sinus die der Winkel (Bogen) a und b selbst zusammenhänge.

Sei daher erstens

$$\sin a>\sin b=\sin(180^o-b),$$

und sei

$$\text{I. } b<90^o, \text{ also } 180^o-b>90^o.$$

Wenn nun $a<90^o$ ist, so muss, weil von den zwei spitzen Winkeln a und b der grössere auch den grösseren Sinus hat, $a>b$ sein, daher ist

$$b<a<90^o<180^o-b;$$

wenn aber $a>90^o$ ist, so muss, weil von den zwei stumpfen Winkeln a und 180°-b der grössere den kleineren Sinus hat, $a<180^o-b$ sein, daher ist

$$b<90^o<a<180^o-b.$$

Sei

$$\text{II. } b>90^o, \text{ also } 180^o-b<90^o.$$

Wenn nun $a<90^o$ ist, so muss $a>180^o-b$ sein, daher ist $b>90^o>a>180^o-b$;

wenn aber $a>90^o$ ist, so muss $a<b$ sein, daher ist $b>a>90^o>180^o-b$.

Ist demnach $\sin a>\sin b$, so liegt a zwischen b und 180°-b.

Sei noch zweitens

$$\sin a<\sin b=\sin(180^o-b),$$

und sei

I. $b < 90^0$, also $180^0 - b > 90^0$.

Wenn nun $a < 90^0$, so ist

$$a < b, \text{ daher } a < b < 90^0 < 180^0 - b;$$

wenn aber $a > 90^0$, so ist

$$a > 180^0 - b, \text{ daher } a > 180^0 - b > 90^0 > b.$$

Sei

II. $b > 90^0$, also $180^0 - b < 90^0$.

Wenn nun $a < 90^0$, so ist

$$a < 180^0 - b, \text{ daher } a < 180^0 - b < 90^0 < b;$$

wenn aber $a > 90^0$, so ist

$$a > b, \text{ daher } a > b > 90^0 > 180^0 - b.$$

Ist demnach $\sin a < \sin b$, so liegt a ausserhalb b u $180^0 - b$.

Aber auch umgekehrt

je nachdem a zwischen oder ausser b und $180^0 - b$ liegt, ist $\sin a >$ oder $< \sin b$.

Denn es liege erstens a zwischen b und $180^0 - b$, und zwar

I. $b < a < 180^0 - b$.

Da nun von den zwei Supplementarwinkeln b und 180^0 - nothwendig einer spitz, der andere stumpf sein muss, so ka hier b nur spitz, d. i. $b < 90^0$, also $180^0 - b > 90^0$ sein. We nun $a < 90^0$, so ist

$$90^0 > a > b, \text{ daher } \sin a > \sin b;$$

wenn aber $a > 90^0$, so ist

$$90^0 < a < 180^0 - b, \text{ daher } \sin a > \sin(180^0 - b).$$

Sei

II. $b > a > 180^0 - b$.

Hier kann b nur stumpf, d. i. $b > 90^0$, also $180^0 - b <$ sein. Wenn nun $a < 90^0$, so ist

$$90^0 > a > 180^0 - b, \text{ daher } \sin a > \sin(180^0 - b);$$

wenn aber $a > 90^0$, so ist

$$90^0 < a < b, \text{ daher } \sin a > \sin b.$$

Liegt demnach a zwischen b und 180^0-b, so ist $\sin a > \sin b$.

Es liege **zweitens** a **ausserhalb** b und 180^0-b, und zwar sei

$$\text{I.} \quad b < a > 180^0 - b.$$

Ein Winkel aber, der $\frac{\text{grösser}}{\text{kleiner}}$ als jeder von zwei Supplementarwinkeln, von denen nothwendig einer spitz, der andere stumpf ist, muss unbedingt $\frac{\text{stumpf}}{\text{spitz}}$ sein, also ist hier a nur stumpf, d. i. $a > 90^0$.

Wenn nun $b < 90^0$, also $180^0 - b < 90^0$, so ist $90^0 < 180^0 - b < a$, also $\sin a < \sin(180^0 - b)$;

wenn aber $b > 90^0$, also $180^0 - b < 90^0$, so ist $90^0 < b < a$, also $\sin a < \sin b$.

Sei

$$\text{II.} \quad b > a < 180^0 - b.$$

Da kann a nur spitz, d. i. $a < 90^0$ sein.

Wenn nun $b < 90^0$, also $180^0 - b > 90^0$, so ist $90^0 > b > a$, also $\sin a < \sin b$;

wenn aber $b > 90^0$, also $180^0 - b < 90^0$, so ist $90^0 > 180^0 - b > a$, also $\sin a < \sin(180^0 - b)$.

Liegt demnach a ausserhalb b und 180^0-b, so ist $\sin a < \sin b$.

Aus allem Gefundenen erschliessen wir nun Folgendes:

I. Liegt a zwischen b und $180^0 - b$, oder ist $\sin a > \sin b$, so ist das Dreieck nicht blos möglich, sondern auch bestimmt.

II. Liegt a ausserhalb b und 180^0-b, oder ist $\sin a < \sin b$, und ist 1) $\sin a = \sin h = \sin b \sin \alpha$, so ist das Dreieck zwar auch möglich und bestimmt aber rechtwinkelig, $\beta = 90^0$; ist 2) $\sin a > \sin h$, so ist das Dreieck zwar möglich, aber zweigestaltig (unbestimmt); und ist 3) $\sin a < \sin h$, so ist das Dreieck unmöglich.

3.

B. Die Berechnung der dritten Seite c könnte nach der bekannten Gleichung

$$\cos a = \cos \alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c$$

auf mannigfaltige Weisen geschehen, indem man $\sin c$ und $\cos c$ durch irgend eine und dieselbe Winkelfunction von c ausdrückt. Passliche derlei Functionen würden $\sin c$ und $\operatorname{tg} \frac{1}{2} c$ insofern sein, als beide jedenfalls positiv sein müssen. Da jedoch $\sin c$ auch noch < 1 ausfallen muss, was zu untersuchen schwierig ist, so

bleibt nur die $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$, bei der eine solche Untersuchung nicht nöthig ist, als zweckmässig übrig.

Setzt man demnach $\cos c = \frac{1-\operatorname{tg}\frac{1}{2}c^2}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c^2}$, $\sin c = \frac{2\operatorname{tg}\frac{1}{2}c}{1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}c^2}$, so findet man

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c^2 - 2\frac{\sin b\cos\alpha}{\cos a+\cos b}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c + \frac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b} = 0.$$

Ist aber eine Zahl x durch eine zweitgradige Gleichung

$$x^2 - 2Ax + B = 0$$

zu bestimmen, und sind x_1, x_2 die beiden Werthe von x, so ist bekanntlich

$$\frac{x_1+x_2}{2} = A,\quad x_1x_2 = B,\quad \frac{x_1-x_2}{2} = \pm\sqrt{A^2-B} = D;$$

also

$$x_1 = \frac{A+D}{2},\quad x_2 = \frac{A-D}{2}.$$

Ist nun $B = x_1x_2$ negativ, so ist D jedenfalls reell, auch die Wurzelwerthe x_1 und x_2; folglich ist von diesen der eine positiv, der andere negativ.

Ist aber $B = x_1x_2$ positiv, so sind D und beide Wurzelwerthe nur so lange reell, folglich diese einstimmig, beide positiv, beide negativ, so lange $D^2 = A^2 - B \geqq 0$ ist; sobald aber $D^2 = A^2 - B < 0$ wird, sind beide Wurzelwerthe imaginär.

Im gegenwärtigen Falle ist

$$x = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}c,$$

$$B = \frac{\cos a-\cos b}{\cos a+\cos b} = \frac{\cos a^2-\cos b^2}{(\cos a+\cos b)^2} = \frac{\sin b^2-\sin a^2}{(\cos a+\cos b)^2}$$

$$= \frac{(\sin b-\sin a)(\sin b+\sin a)}{(\cos a+\cos b)^2} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(b-a)\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(a+b) = \frac{\sin(b-a)\sin(a+b)}{(\cos a+\cos b)^2},$$

$$D^2 = \frac{\sin a^2-(\sin b\sin\alpha = \sin h)^2}{(\cos a+\cos b)^2} = \frac{(\sin a-\sin h)(\sin a+\sin h)}{(\cos a+\cos b)^2}.$$

Ist nun B negativ, ist also $\sin a > \sin b$, oder sind $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ oder $\sin(b-a)$ und $\sin(a+b)$ entgegengesetzt, ist daher $b-a \gtrless 0$ und $a+b \gtrless 180^0$, d. h. liegt a zwischen b und 180^0-b; so ist D reell, $\sin a > \sin h = \sin b\sin\alpha$, beide Werthe von $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ sind reell, aber nur einer ist positiv; mithin ist das Dreieck nicht allein möglich, sondern auch bestimmt.

Ist dagegen B positiv, ist also $\sin a < \sin b$, oder sind $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(b-a)$ und $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(a+b)$ oder $\sin(b-a)$ und $\sin(a+b)$ einstimmig, ist nemlich $b-a \gtrless 0$ und $a+b \lessgtr 180^0$, d. h. liegt a ausser b und $180^0 - b$; und ist andererseits

1) $\sin a > \sin h$, so ist D, daher auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ reell, und die letztere erhält zwei positive Werthe, folglich ist das Dreieck möglich und doppelgestaltig; ist aber

2) $\sin a = \sin h$, so ist $D = 0$, daher wohl auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ reell, aber sie erhält nur einen (gleichsam zweifachen) positiven Werth, folglich ist das Dreieck möglich und eingestaltig, insbesondere rechtwinklig (vergl. 2.); ist endlich

3) $\sin a < \sin h$, so ist D, daher auch $\operatorname{tg}\frac{1}{2}c$ imaginär, mithin ist das Dreieck unmöglich.

4.

C. Die Berechnung des dritten Winkels γ ist nach der bekannten Gleichung

$$\sin b \cot a = \sin\gamma \cot\alpha + \cos b \cos\gamma$$

einzuleiten, indem man aus gleichem Grunde wie vorhin am passendsten die $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$ durch sie bestimmt. Auf diese Weise erhält man die Gleichung

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma^2 - 2\frac{\sin a \cot\alpha}{\sin(a+b)}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma + \frac{\sin(b-a)}{\sin(a+b)} = 0,$$

daher

$$x = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma,$$

$$B = \frac{\sin(b-a)}{\sin(a+b)}, \quad D^2 = \frac{(\sin a - \sin h)(\sin a + \sin h)}{\sin\alpha^2 \sin(a+b)^2};$$

mithin wird man wieder auf die bereits in *B.* gefundenen Bedingungen und Folgerungen geleitet.

5.

D. Die Zeichnung des Kugeldreieckes mittels der angewiesenen drei Bestimmungsstücke a, b, α lässt sich in folgender Weise ausführen.

Zuvörderst construire man (Taf. VI. Fig. 3., Fig. 4. und Fig. 5.) an einem beliebigen grössten Kreise $ACA'A$ in einem wählbaren Punkte A als der ersten Dreieckspitze, den gegebenen Winkel α. Die an ihm liegen sollende Seite b trage man von seinem Scheitel A auf jenem grössten Kreise bis C ab; so muss, wenn man den anderen Schenkel zum Halbkreise bis nach A' erweitert, der Endpunkt C, als zweite Dreieckspitze auf dem Halbkreise ACA'

liegen, weil $AC=b<180^\circ$ ist. Um diese Spitze C als Mittelpunkt beschreibe man mit einem sphärischen Halbmesser CD oder Cd gleich der dem Winkel α gegenüber liegen sollenden Seite a einen kleineren Kreis DdD; so muss die noch zu suchende dritte Dreiecksspitze B einer der Durchschnittspunkte dieses kleineren Kreises mit dem Halbkreise ABA' sein, wofern es einen solchen Durchschnitt gibt. Um dies zu untersuchen, sei

I. $a<b$ aber $>180^\circ-b$, nemlich $CD<CA$ aber $Cd>CA'$. Da nun liegen (Taf. VI. Fig. 3.) die Grenzpunkte A und A' des Halbkreises ACA' dies- und jenseits des kleineren Kreises $DBdD$ auf der Kugelfläche, mithin muss der sie verbindende Halbkreis ABA' diesen Kreis nothwendig, aber nur in Einem Punkte B schneiden, der sofort die dritte Dreiecksspitze ist, und darum zur Vervollständigung des Dreieckes mit C durch die Seite $BC=a$ zu verbinden kommt.

Aehnlich würde man sich benehmen, wenn $a>b$ aber $<180^\circ-b$ wäre, wozu nur die Punkte A und A' unter sich zu vertauschen kämen.

Das Kugeldreieck ist demnach, wenn a (der Grösse nach) zwischen b und $180^\circ-b$ liegt, jederzeit nicht blos möglich, sondern auch bestimmt, wie gross auch der Winkel α sein mag.

II. Ist dagegen $a<b$ und $<180^\circ-b$, nemlich $CD<CA$ und $<CA'$, so befinden sich (Taf. VI. Fig. 4.) die Grenzpunkte A und A' des Halbkreises ABA' auf nur Einer Seite des kleineren Kreises $DBdD$ auf der Kugelfläche, mithin muss der Halbkreis ABA' selbst diesen Kreis nicht nothwendig treffen; sondern ob und wie oft er ihn treffe, hängt von dem Winkel α und sohin von dem senkrechten sphärischen Abstande $CE=h$ jenes Halbkreises ABA' (nicht Vollkreises $ABA'A$) vom Mittelpunkte C des kleineren Kreises in der Hinsicht ab, ob dieser Abstand entweder so gross oder kleiner oder grösser als die aus C auslaufende Seite $CB=a$ ist. Denn der vom Punkte C aus an den Halbkreis ABA' senkrecht geführte Kreisbogen $CE=h$ ist bekanntlich, je nachdem α spitz oder stumpf ist, kleiner oder grösser als jeder andere gleichfalls aus C an diesen Halbkreis (also schief) geführte Kreisbogen CB; und zu jedem solchen schiefen Kreisbogen CB_1 gibt es einen, aber auch nur Einen ihm gleichen CB_2.

Ist nun

1. die Seite $a=h$, so wird der mit ihr als sphärischem Halbmesser um die Spitze C beschriebene kleinere Kreis $D'Ed'D'$ den Halbkreis ABA' nur in einem einzigen Punkte E berühren, der sofort allein die dritte Dreiecksspitze sein muss. Dies einzig mögliche Dreieck ACE ist sonach bei E rechtwinklig, daher in ihm

$$\sin a=\sin h=\sin b\sin\alpha.$$

2. Wenn $a>h$, also, weil hier a, als unter b und $180^\circ-b$ liegend, spitz sein muss, $\sin a>\sin h$ ist, muss der mit a als sphärischem Halbmesser um C beschriebene kleinere Kreis DdD den Halbkreis ABA' in zwei Punkten B_1 und B_2 schneiden, von

denen sofort jeder die dritte Dreiecksspitze sein kann. Das erhaltene, folglich mögliche Dreieck ist daher doppelgestaltig, AB_1C und AB_2C.

3. Wenn endlich $a < h$, also, weil hier $a < 90^0$ ist, $\sin a < \sin h$ ist, so liegt der mit a als sphärischem Halbmesser um C beschriebene kleinere Kreis $D''d''D''$ ganz innerhalb des von dem kleineren Kreise $D'Ed'D'$ begrenzten Kugelabschnittes, und kann folglich den Halbkreis ABA' gar nicht treffen. Darum ist ein Dreieck, welches die Bestimmungsstücke a, b, α enthält, geradehin unmöglich.

Gleiche Bedingnisse und Folgen werden sich ergeben, wenn $a > b$ und $> 180^0 - b$, also $a > 90^0$ ist, wie Taf. VI. Fig. 5. ausweist.

Das Kugeldreieck ist daher, wenn a (der Grösse nach) ausserhalb b und $180^0 - b$ liegt, und wenn andererseits

1. $\sin a = \sin h = \sin b \sin \alpha$ ist, möglich, bestimmt aber rechtwinklig, dagegen
2. wenn $\sin a > \sin h$ ist, zwar möglich aber doppelgestaltig, endlich
3. wenn $\sin a < \sin h$ ist, ganz unmöglich.

Anmerkung. Von den viererlei Untersuchungen (2—5, A.—D.) dürften die zweite und vierte die einfachsten und vollständigsten sein.

6.

Der zweite Fall, wo das Kugeldreieck durch zwei Winkel α, β und die Gegenseite a des ersteren bestimmt werden soll, lässt sich sehr leicht auf den ersten Fall zurückführen mittels des folgenden, in der Lehre von den Supplementardreiecken begründeten Lehrsatzes *):

„Besteht zwischen den Seiten und Winkeln eines Kugeldreieckes eine Beziehungsgleichung oder -Ungleichung: so geht aus dieser eine ebenfalls richtige solche Vergleichung hervor, wenn man statt jedes dort vorkommenden Stückes des Dreieckes das Supplement seines Gegenstückes setzt.“

Man wird nemlich im Vorhergehenden nur a in $180^0 - \alpha$, b in $180^0 - \beta$ und α in $180^0 - a$ umwandeln. Da nun in den hier gefundenen Beziehungs- oder Bedingungsgleichungen und -Ungleichungen blos die zwischen 0 und 180^0 enthaltenen Dreiecksstücke und ihre Supplemente, oder von ihnen ihre Sinus vorkommen: und weil solche Supplementswinkel einerlei und positive Sinus haben, so ist leicht ersichtlich, dass alle oben gefundenen Schluss-

*) Man vergl. u. A. meine Darstellung der sphär. Trigonometrie in meiner Ueberarbeitung von Vega's Vorles. üb. d. Mathematik. 2. Bd. Wien (1835). 2. Ausg. 1848. S. 565.

ergebnisse auch dann noch gelten müssen, wenn man die Wörter „Seite“ und „Winkel“ unter sich vertauscht.

7.

Fassen wir zum Abschluss und zur Uebersicht sämmtliche Ergebnisse unserer Forschungen kurz zusammen, so erhalten wir folgenden Satz:

„Soll ein Kugeldreieck durch zwei gleichartige Stücke a, b und durch ein (ungleichartiges) Gegenstück α des einen (ersteren) bestimmt werden, und will man erforschen, ob das Dreieck möglich und bestimmt sei oder nicht; so wird man vorerst jenes erste mit seinem Gegenstücke gegebene Stück a mit dem anderen (gleichartigen) b und seinem Supplemente 180^0-b, oder $\sin a$ mit $\sin b$ vergleichen. Wenn nun

I. a (der Grösse nach) zwischen b und 180^0-b liegt, oder wenn $\sin a > \sin b$ ist; so ist das Dreieck nicht allein möglich, sondern auch bestimmt (eingestaltig). Wenn aber

II. a (der Grösse nach) ausserhalb b und 180^0-b liegt, oder wenn $\sin a < \sin b$ ist; so muss man noch das Product $\sin b \sin \alpha = \sin h$ (wo man die Hilfsgrösse h gar nicht erst zu bestimmen braucht) mit $\sin a$ vergleichen. Ist da

1) $\sin a = \sin h$, so ist das Dreieck auch noch möglich und bestimmt, aber insbesondere ist des Stückes b Gegenstück $\beta = 90^0$; ist aber

2) $\sin a > \sin h$, so ist das Dreieck zwar auch noch möglich, aber unbestimmt (doppelgestaltig); ist endlich

3) $\sin a < \sin h$, so ist das Dreieck geradezu unmöglich.“

XXVII.

Ueber die Theilung von Dreiecken, Trapezen, Pyramiden und Kegeln nach gegebenen Verhältnissen durch Linien oder Ebenen, welche einer Seite oder einer Seitenfläche parallel sind.

Nach einem Aufsatze des Herrn Léon Anne (Professeur, ancien éléve de l'Ecole polytechnique) in den Nouvelles Annales de Mathématiques von Terquem und Gerono (Décembre 1847. p. 461.) frei bearbeitet

von

dem Herausgeber.

---

1. Wenn ein Dreieck durch eine seiner Seite a parallele gerade Linie in zwei Theile getheilt werden soll, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, so sei x die gesuchte Theilungslinie, und A und X seien die über a und x als Grundlinien stehenden Dreiecke. Sollen sich nun das Trapezium und das Dreieck, in welche das gegebene Dreieck A durch die Theilungslinie x getheilt wird, wie $m:n$ zu einander verhalten, so haben wir die Proportion

$$A-X:X=m:n,$$

aus welcher sogleich

$$A:X=m+n:n$$

folgt. Weil nun aber nach einem bekannten geometrischen Satze auch

$$A:X=a^2:x^2$$

ist, so ergiebt sich

$$a^2:x^2=m+n:n,$$

also

$$x^2 = \frac{n}{m+n}a^2 \text{ oder } x = a\sqrt{\frac{n}{m+n}}.$$

2. Da der Ausdruck

$$x = a\sqrt{\frac{n}{m+n}}$$

nur von der Seite a des gegebenen Dreiecks abhängt, von allen übrigen Elementen des gegebenen Dreiecks unabhängig ist, so ergiebt sich der folgende Satz:

Alle über der Basis a beschriebene Dreiecke werden durch eine der Basis a parallele gerade Linie von der constanten Länge $a\sqrt{\frac{n}{m+n}}$ in dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, so dass nämlich das durch die Theilungslinie abgeschnittene Trapezium zu dem durch dieselbe abgeschnittenen Dreiecke in dem angegebenen Verhältnisse steht.

3. Wenn a die Grundlinie einer Seitenfläche einer beliebigen Pyramide ist, man in dieser Seitenfläche eine der Grundlinie a parallele gerade Linie von der Länge $a\sqrt{\frac{n}{m+n}}$ zieht, und durch diese gerade Linie eine der Grundfläche der Pyramide parallele Ebene legt; so wird durch diese Ebene die ganze convexe Seitenfläche oder der sogenannte Mantel der Pyramide in dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, weil offenbar jedes einzelne aller der die Seitenfläche oder den Mantel der Pyramide bildenden Dreiecke in dem angegebenen Verhältnisse getheilt wird.

4. Wenn a der Halbmesser der Grundfläche eines beliebigen Kegels ist, und man denselben mit einer seiner Grundfläche parallelen Ebene so schneidet, dass der dadurch in dem Kegel entstehende Kreis den Halbmesser $a\sqrt{\frac{n}{m+n}}$ hat; so theilt diese Ebene den Kegelmantel in dem Verhältnisse $m:n$, weil die Mäntel ähnlicher Kegel, was leicht zu zeigen ist, sich wie die Quadrate der Halbmesser ihrer Grundflächen zu einander verhalten.

5. Wenn a die Grundlinie einer Seitenfläche einer beliebigen Pyramide ist, man in dieser Seitenfläche eine der Grundlinie parallele gerade Linie von der Länge $a\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}}$ zieht, und durch diese Linie eine der Grundfläche der Pyramide parallele Ebene legt; so theilt diese Ebene die Pyramide, d. h. deren Volumen in dem Verhältnisse $m:n$, weil die Volumina ähnlicher Pyramiden sich zu einander wie die Würfel ähnlich liegender Kanten verhalten.

6. Wenn a der Halbmesser der Grundfläche eines beliebigen Kegels ist, und man denselben mit einer seiner Grundfläche

arallelen Ebene so schneidet, dass der dadurch in dem Kegel ntstehende Kreis den Halbmesser $a\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}}$ hat; so theilt diese bene den Kegel, d. h. sein Volumen, in dem Verhältnisse $m:n$, eil die Volumina ähnlicher Kegel sich zu einander wie die Würl der Halbmesser ihrer Grundflächen verhalten.

7. Seien a und b die beiden parallelen Seiten eines Trapeziums, und x sei die diesen Seiten parallele gerade Linie, welche as Trapezium so in zwei Theile theilt, dass der der Seite a entprechende Theil sich zu dem der Seite b entsprechenden Theile ie $m:n$ verhält. Denken wir uns nun, um x zu bestimmen, das rapezium auf bekannte Weise zu einem Dreiecke ergänzt, und ezeichnen die über a, b und x als Grundlinien stehenden einander ähnlichen Dreiecke respective durch A, B und X, so ist allemein

$$A-X:X-B=m:n,$$

nd nach einem bekannten geometrischen Satze

$$A:X=a^2:x^2,$$
$$X:B=x^2:b^2;$$

so

$$A-X:X=a^2-x^2:x^2,$$
$$X:X-B=x^2:x^2-b^2;$$

lglich

$$A-X:X-B=a^2-x^2:x^2-b^2.$$

ies, mit dem Obigen verglichen, giebt

$$a^2-x^2:x^2-b^2=m:n,$$

so

$$mx^2-mb^2=na^2-nx^2,$$

raus sogleich

$$x^2=\frac{n}{m+n}a^2+\frac{m}{m+n}b^2 \text{ oder } x=\sqrt{\frac{n}{m+n}a^2+\frac{m}{m+n}b^2}$$

halten wird.

8. Alle Trapeze mit denselben parallelen Seiten a, b werden so durch eine diesen Seiten parallele gerade Linie von der contanten Länge

$$\sqrt{\frac{n}{m+n}a^2+\frac{m}{m+n}b^2}$$

dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, so dass nämlich der der Seite

a entsprechende Theil zu dem der Seite *b* entsprechenden in dem angegebenen Verhältnisse steht.

8. Wenn *a, b* die einander parallelen Seiten einer fläche einer abgestumpften Pyramide sind, man in dieser fläche eine ihren parallelen Seiten parallele gerade Linie Länge

$$\sqrt{\frac{n}{m+n}a^2+\frac{m}{m+n}b^2}$$

zieht, und durch diese gerade Linie eine den Grundfläcl Pyramide parallele Ebene legt; so wird durch diese Eb Mantel der Pyramide in dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, w Seitenfläche offenbar in diesem Verhältnisse getheilt wird.

9. Wenn *a, b* die Halbmesser der beiden einander pa Grundflächen eines beliebigen abgestumpften Kegels sin man denselben durch eine seinen Grundflächen parallele so schneidet, dass der dadurch in dem Kegel entstehend den Halbmesser

$$\sqrt{\frac{n}{m+n}a^2+\frac{m}{m+n}b^2}$$

hat; so wird durch diese Ebene der Mantel des abgestu Kegels in dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, weil die Mänt licher Kegel sich zu einander wie die Quadrate der Halb ihrer Grundflächen verhalten.

10. Wenn *a, b* die einander parallelen Seiten einer fläche einer abgestumpften Pyramide sind, man in dieser fläche eine ihren parallelen Seiten parallele gerade Lin der Länge

$$\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}a^3+\frac{m}{m+n}b^3}$$

zieht, und durch diese gerade Linie eine den Grundfläch Pyramide parallele Ebene legt; so wird durch diese Ebe Pyramide, d. h. deren Volumen, in dem Verhältnisse $m:n$ g weil die Volumina ähnlicher Pyramiden sich zu einander v Würfel ähnlich liegender Kanten verhalten.

11. Wenn *a, b* die Halbmesser der beiden einander p len Grundflächen eines beliebigen abgestumpften Kegels sin man denselben durch eine seinen Grundflächen parallele Eb schneidet, dass der dadurch in dem Kegel entstehende Kr Halbmesser

$$\sqrt[3]{\frac{n}{m+n}a^3+\frac{m}{m+n}b^3}$$

hat: so wird durch diese Ebene der Kegel, d. h. sein Volumen, in dem Verhältnisse $m:n$ getheilt, weil die Volumina ähnlicher Kegel sich zu einander wie die Würfel der Halbmesser ihrer Grundflächen verhalten.

XXVIII.

Ueber die numerische Bestimmung der Constante des Integrallogarithmus.

Von dem
Herrn Doctor F. Arndt,
Lehrer am Gymnasium zu Stralsund.

Die Constante des Integrallogarithmus (welche im Folgenden durch C bezeichnet wird) ist bekanntlich der Grenze gleich, welcher sich der Ausdruck $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-lp$ nähert, wenn p in's Unendliche wächst. Dieser Ausdruck convergirt aber, wie man bei näherer Betrachtung findet, so langsam, dass derselbe zur wirklichen Berechnung von C als untauglich erscheint. Nichts desto weniger bietet derselbe einen Anknüpfungspunkt zur Entwickelung von Formeln dar, mittelst welcher durch einen bequemen Calcul die Grösse der Constante mit grosser Genauigkeit bestimmt werden kann. Die Aufstellung dieser Formeln ist meine gegenwärtige Aufgabe, und wenn auch eine derselben aus einer schon bekannten leicht hergeleitet werden kann, zu der die Theorie der Gammafunktion führt, so dürfte diese Arbeit doch nicht blos der andern Formeln und anderweitiger Bemerkungen wegen, als auch deshalb auf einige Nachsicht rechnen dürfen, weil die hier gegebene Theorie die der Gammafunktionen ganz ausschliesst.

Da die ganze nachfolgende Betrachtung auf der Gleichung $C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-lp\,(p=\infty)$ beruht, so wird zunächst eine von der Theorie der Gammafunktion unabhängige Ableitung derselben nicht am unrechten Orte sein *).

---

*) In der Abhandlung „Ueber einen von Gauss gefundenen Ausdruck der Gammafunktion" (Archiv. Thl. X. p. 250 ff.) habe ich die

Zuerst kann man die Summe $s_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$ durch bestimmtes Integral ausdrücken. Denn aus der Gleichung $\frac{1}{1}$ $= 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ zieht man durch Integration zwis den Grenzen 0 und 1 unmittelbar $s_p = \int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x} \partial x$, wofür ich für das Folgende bequemeren Ausdruck wähle

$$\alpha) \quad s_p = \int_0^1 \frac{1-(1-y)^p}{y} \partial y.$$

Integrirt man ferner die Gleichung $\frac{1-e^{-py}}{y} \partial y = (p - \frac{p^2 y}{1.2} + \frac{p^3 y^2}{1.2.3} - \dots$ zwischen den Grenzen 0 und 1, so kommt

$$\beta) \int_0^1 \frac{1-e^{-py}}{y} \partial y = p - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{1.2.3} - \dots$$

Subtrahirt man jetzt β) von α), so erhält man

$$\int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y} \partial y = s_p - p + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{1.2.3} + \dots,$$

folglich, auf beiden Seiten lp addirend, und beachtend, d $\int_\infty^p \frac{e^{-y} \partial y}{y} - C = lp - p + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{p^2}{1.2} - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{p^3}{1.2.3} + \dots$ ist,

$$lp + \int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y} \partial y = s_p + \int_\infty^p \frac{e^{-y} \partial y}{y} - C,$$

oder endlich

$$\gamma) \quad s_p - lp = C + \int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y} \partial y + \int_p^\infty \frac{e^{-y} \partial y}{y}.$$

Man sieht hieraus, dass die Gleichung $s_p - lp (p=\infty) =$ bewahrheitet sein wird, wenn man nachweisen kann, dass je der beiden Integrale in γ) rechter Hand für $p=\infty$ verschwin

Was zuerst das zweite betrifft, so ist es gleich dem Prod $M \int_p^\infty e^{-y} \partial y = M e^{-p}$, wo M zwischen dem grössten und klein der Werthe liegen muss, welche $\frac{1}{y}$ von $y=p$ bis $y=\infty$ erla

---

Gleichung $\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\partial a} = lp - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a+2} - \dots - \frac{1}{a+p} (p=\infty)$ entwi

Da man nun leicht die Identität von $-C$ und $\frac{\partial l\Gamma(a+1)}{\dots}$ rentiation $a=0$ gesetzt) nachweisen kann, so wird $C = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - lp (p=\infty)$ geführt.

. i. zwischen den Werthen 0 und $\frac{1}{p}$. Daraus folgt, dass das in 'rage kommende Integral positiv und nicht grösser als $\frac{1}{p}e^{-p}$ ist, relcher Ausdruck für $p=\infty$ in der That verschwindet.

Das andere Integral in γ) ist $=N\int_0^1 \partial y=N$, wo N einer der Verthe ist, welche die Funktion

$$\varphi(y)=\frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y}$$

wischen den Integrationsgrenzen erlangt. Diese Grösse verschwinet offenbar für $p=\infty$, wenn die positive Variable y kleiner als ie Einheit; sie verschwindet ebenfalls für $p=\infty$, wenn $y=0$ der $=1$, da einerseits $\varphi(1)=e^{-p}$, andererseits $\varphi(0)=-pe^{-py}-p(1-y)^{p-1}$ für $y=0$, also $\varphi(0)=0$ wird. Es ist also bewiesen, ass jeder Werth von $\varphi(y)$ von $y=0$ bis $y=1$ für $p=\infty$ verschwindet, und deshalb muss auch N, d. i. $\int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y}\partial y$ r $p=\infty$ verschwinden.

Uebrigens lässt sich auch zeigen, dass dies letzte Integral r jeden endlichen Werth von p positiv ist. Um dies nachzueisen dient die Formel $-l(1-y)=l\frac{1}{1-y}=y+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}y^3+\ldots$, aus r sich zunächst ergiebt $l\frac{1}{1-y}>y$. Daraus folgt $\frac{1}{1-y}>e^y$, $-y<e^{-y}$, also $(1-y)^p<e^{-py}$. Die Funktion $\varphi(y)$ ist folglich r jeden Werth von y zwischen 0 und 1 positiv, weshalb auch oder $\int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y}\partial y$ einen positiven Werth hat.

Aus allem diesem hat sich ergeben, dass die stets positive ifferenz $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-lp-C$ die Summe

$$\int_0^1 \frac{e^{-py}-(1-y)^p}{y}\partial y+\int_p^\infty \frac{e^{-y}}{y}\partial y$$

Maass hat, und sich der Null nähert, wenn p in's Unende wächst.

Noch mag bemerkt werden, dass die Grösse $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-lp$ einem fort abnimmt, wenn p wächst. Denn man hat, $s_p-l_p=\sigma_p$ etzt, $\sigma_p-\sigma_{p+1}=l(1+\frac{1}{p})-\frac{1}{p+1}=\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p+1}\right)-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p}\right)^2$ $\left(\frac{1}{p}\right)^3-\ldots$, folglich $\sigma_p-\sigma_{p+1}<\frac{1}{p(p+1)}$ und $>\frac{1}{p(p+1)}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p}\right)^2$, $<\frac{1}{p(p+1)}$ und $>\frac{1}{2}$

Es ist nun meine Aufgabe, den Unterschied der Grös $s_p - lp$ vom wahren Werthe des C, wenn p einen bestimmten We erhält, auf eine für die Rechnung bequeme Art zu bestimm Zu dem Ende sei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - lp = C_p$; dann kommt

$$C_{p+1} - C_p = \frac{1}{p+1} - l(1 + \frac{1}{p}),$$

$$C_{p+2} - C_{p+1} = \frac{1}{p+2} - l(1 + \frac{1}{p+1}),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_{p+k} - C_{p+k-1} = \frac{1}{p+k} - l(1 + \frac{1}{p+k-1});$$

also durch Addition zu beiden Seiten

$$C_{p+k} - C_p = \frac{1}{p+1} - l(1 + \frac{1}{p}) + \frac{1}{p+2} - l(1 + \frac{1}{p+1}) + \dots$$
$$\dots + \frac{1}{p+k} - l(1 + \frac{1}{p+k-1}),$$

oder, für C_p seinen Werth gesetzt,

$$C_{p+k} = 1 + \tfrac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p} - l(p+1) + \frac{1}{p+1} - l(1 + \frac{1}{p+1})$$
$$+ \frac{1}{p+2} - l(1 + \frac{1}{p+2}) + \dots + \frac{1}{p+k-1} - l(1 + \frac{1}{p+k-1}) + \frac{1}{p+k}.$$

Setzt man nun $k = \infty$, wobei C_{p+k} in C übergeht, so erhält m die unendliche Reihe

$$(1) \quad C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p} - l(p+1) + u_1 + u_2 + u_3 + \dots,$$

wo

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \dfrac{1}{p+1} - l(1 + \dfrac{1}{p+1}), \\ u_2 = \dfrac{1}{p+2} - l(1 + \dfrac{1}{p+2}), \\ u_3 = \dfrac{1}{p+3} - l(1 + \dfrac{1}{p+3}), \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Die Reihe u_1, u_2, u_3, ... ist convergent, wie sich aus d vorgehenden Betrachtung unmittelbar ergiebt; es erhellet di übrigens auch auf nachstehende Weise. Durch Entwickelung d Logarithmus findet man

$$\frac{1}{p+k}-l\left(1+\frac{1}{p+k}\right)=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2-\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^3+\ldots,$$

folglich ist offenbar $u_k<\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2$, und hieraus, so wie aus dem Umstande, dass die Reihe $\left(\frac{1}{p+1}\right)^2, \left(\frac{1}{p+2}\right)^2, \left(\frac{1}{p+3}\right)^2,\ldots$ convergent ist, ergiebt sich die Convergenz der Reihe $u_1, u_2, u_3,\ldots$ Diese Convergenz geht aber nur langsam von Statten, und um deshalb eine stärker convergirende Reihe zu erhalten, löse man die Glieder u_1, u_2, $u_3,\ldots$ in unendliche convergirende Reihen auf und summire die resultirende Doppelreihe dadurch, dass man sie in eine andere einfache Reihe umgestaltet.

Um aber u_k in eine unendliche Reihe zu verwandeln, kann man mehrere Formeln anwenden. Zuerst giebt die Anwendung der Formel $l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\ldots(-1<x<1)$:

$$u_k=\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+k}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+k}\right)^4-\ldots,$$

also

$$\left\{\begin{aligned}u_1&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^4-\ldots\\ u_2&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+2}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+2}\right)^4-\ldots\\ u_3&=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}\right)^2-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+3}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+3}\right)^4-\ldots\end{aligned}\right.$$

. . . .

Man sieht hieraus, dass sämmtliche Vertikalreihen convergent sind, dass ferner auch ihre Summen eine convergente Reihe bilden; allein keineswegs darf hieraus im Allgemeinen geschlossen werden, dass die Summe der letztern Reihe der Summe $u_1+u_2+u_3+\ldots$ gleich sein muss *). In unserm Falle ist dieser Schluss indessen

---

*) Die Theorie der Convergenz der Doppelreihen ist nach den Vorarbeiten Cauchy's keineswegs als abgeschlossen zu betrachten, indem Cauchy (Cours d'Analyse p. 537 ff.) blos den Fall in Betracht gezogen, dass die sämmtlichen Horizontalreihen und die Reihe ihrer Summen convergent sind, und diese doppelte Eigenschaft noch bestehen bleibt, wenn alle Glieder der Doppelreihe auf ihre numerischen Werthe reducirt werden. Findet die letzte Bedingung nicht statt, so führt die weitere Untersuchung, mit der ich jetzt beschäftigt bin, auf anscheinend sehr merkwürdige Resultate, von denen ich hier folgendes hervorhebe. Die Doppelreihe sei

$$\begin{aligned}&\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}),\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})-\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}),\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})-\tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5}),\ldots\\ &\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2,\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2-\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2,\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2-\tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5})^2,\ldots\\ &\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3-\tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3,\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3-\tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3,\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3-\tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5})^3,\ldots\end{aligned}$$

. . . .

Es ist nun meine Aufgabe, den Unterschied der Grö
$s_p - lp$ vom wahren Werthe des C, wenn p einen bestimmten W
erhält, auf eine für die Rechnung bequeme Art zu bestimm
Zu dem Ende sei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-lp=C_p$; dann kommt

$$C_{p+1}-C_p=\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p}),$$

$$C_{p+2}-C_{p+1}=\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{p+k}-C_{p+k-1}=\frac{1}{p+k}-l(1+\frac{1}{p+k-1});$$

also durch Addition zu beiden Seiten

$$C_{p+k}-C_p=\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p})+\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+1}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{p+k}-l(1+\frac{1}{p+k-1}),$$

oder, für C_p seinen Werth gesetzt,

$$C_{p+k}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p+1})$$
$$+\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+2})+\ldots+\frac{1}{p+k-1}-l(1+\frac{1}{p+k-1})+\frac{1}{p+k}.$$

Setzt man nun $k=\infty$, wobei C_{p+k} in C übergeht, so erhält m
die unendliche Reihe

$$(1)\quad C=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

wo

$$\left\{\begin{aligned} u_1&=\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p+1}),\\ u_2&=\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+2}),\\ u_3&=\frac{1}{p+3}-l(1+\frac{1}{p+3}),\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right.$$

Die Reihe u_1, u_2, u_3,.... ist convergent, wie sich aus d
vorgehenden Betrachtung unmittelbar ergiebt; es erhellet d
übrigens auch auf nachstehende Weise. Durch Entwickelung d
Logarithmus findet man

$s_2 = 0.64493\ 40668\ 482264$	$s_{19} = 0.00000\ 19082\ 127166$
$s_3 = 0.20205\ 69031\ 595943$	$s_{20} = 0.00000\ 09539\ 620339$
$s_4 = 0.08232\ 32337\ 111382$	$s_{21} = 0.00000\ 04769\ 329868$
$s_5 = 0.03692\ 77551\ 433700$	$s_{22} = 0.00000\ 02384\ 505027$
$s_6 = 0.01734\ 30619\ 844491$	$s_{23} = 0.00000\ 01192\ 199260$
$s_7 = 0.00834\ 92773\ 819227$	$s_{24} = 0.00000\ 00596\ 081891$
$s_8 = 0.00407\ 73561\ 979443$	$s_{25} = 0.00000\ 00298\ 035035$
$s_9 = 0.00200\ 83928\ 260822$	$s_{26} = 0.00000\ 00149\ 015548$
$s_{10} = 0.00099\ 45751\ 278180$	$s_{27} = 0.00000\ 00074\ 507118$
$s_{11} = 0.00049\ 41886\ 041194$	$s_{28} = 0.00000\ 00037\ 253340$
$s_{12} = 0.00024\ 60865\ 533080$	$s_{29} = 0.00000\ 00018\ 626597$
$s_{13} = 0.00012\ 27133\ 475785$	$s_{30} = 0.00000\ 00009\ 313274$
$s_{14} = 0.00006\ 12481\ 350587$	$s_{31} = 0.00000\ 00004\ 656629$
$s_{15} = 0.00003\ 05882\ 363070$	$s_{32} = 0.00000\ 00002\ 328312$
$s_{16} = 0.00001\ 52822\ 594086$	$s_{33} = 0.00000\ 00001\ 164155$
$s_{17} = 0.00000\ 76371\ 976379$	$s_{34} = 0.00000\ 00000\ 582077$
$s_{18} = 0.00000\ 38172\ 932650$	$s_{35} = 0.00000\ 00000\ 291038.$

Man begreift leicht, dass jeder dieser Werthe kleiner als die Hälfte des vorhergehenden, und dieser Hälfte um so mehr gleich werden muss, je grösser m in s_m ist. Legt man die Rechnung nur auf 16 Decimalstellen an, so braucht man die obige Tafel nicht weiter als bis zu $m=35$ fortzusetzen, da jeder folgende Werth von der Hälfte des vorhergehenden in der 16ten Decimale noch nicht abweicht.

Mit Hülfe dieser Werthe kann man nun C nach der Formel (2*) unmittelbar berechnen, auch ist die Bestimmung der Fehlergrenze leicht. Da nämlich

$$C < 1 - l2 + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{3}s_3 + \dots + \frac{1}{2n}s_{2n}$$

$$> 1 - l2 + \tfrac{1}{2}s_2 - \tfrac{1}{3}s_3 + \dots + \frac{1}{2n}s_{2n} - \frac{1}{2n+1}s_{2n+1},$$

und der Unterschied dieser beiden Grenzen $= \frac{1}{2n+1}s_{2n+1}$, so ist klar, dass, wenn man bei dem Gliede $\frac{1}{2n}s_{2n}$ den Calcul abbricht, man einen (negativen) Fehler begeht, der $< \frac{1}{2n+1}s_{2n+1}$ ist. Bricht man z. B. ab bei $m=34$, so ist der Fehler $\Delta < \frac{1}{35}s_{35}$, d. i. $< 0.00000\ 00000\ 008315$, und man wird mithin 12 richtige Decimalen erhalten. Ich habe die Rechnung ausgeführt, und gefunden

$$\tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{4}s_4 + \ldots + \tfrac{1}{34}s_{34} = 0.34657\ 35902\ 792760$$
$$\tfrac{1}{3}s_3 + \tfrac{1}{5}s_5 + \ldots + \tfrac{1}{35}s_{35} = 0.07621\ 07448\ 174049$$
$$\text{Unterschied} = 0.27036\ 28454\ 618711.$$

$$C = \ \ 0.27036\ 28454\ 618711$$
$$+0.30685\ 28194\ 400547\ (=1-l2)$$
$$= \ \ 0.57721\ 56649\ 019258.$$

Die vier letzten Decimalen irrthümlich. Die Werthe der natürlichen Logarithmen sind aus dem Recueil de Tables logarithmiques etc. par Schultze. à Berlin. 1778. genommen, woselbst sie auf 48 Decimalen berechnet sind.

Mit viel wenigern Gliedern der Reihe (2) reicht man aus, wenn man für p einen grössern Werth nimmt, z. B. 5. Dann muss man sich freilich erst die Mühe geben, die Werthe von $(\tfrac{1}{6})^m + (\tfrac{1}{7})^m + (\tfrac{1}{8})^m + \ldots$ zu berechnen, was auf die Berechnung von $(\tfrac{1}{2})^m + (\tfrac{1}{3})^m + (\tfrac{1}{4})^m + (\tfrac{1}{5})^m$ zurückkommt. Diese Mühe ist aber nicht hoch anzuschlagen; denn man verwandelt die Brüche $\tfrac{1}{2}$, $\tfrac{1}{3}$, $\tfrac{1}{4}$, $\tfrac{1}{5}$ leicht in Decimalbrüche, findet daraus durch Division mit resp. 2, 3, 4, 5 die Quadrate $(\tfrac{1}{2})^2$, $(\tfrac{1}{3})^2$, $(\tfrac{1}{4})^2$, $(\tfrac{1}{5})^2$, daraus auf ähnliche Art die Cuben $(\tfrac{1}{2})^3$, $(\tfrac{1}{3})^3$, $(\tfrac{1}{4})^3$, $(\tfrac{1}{5})^3$, u. s. w. Auf diese Art habe ich folgende Tafel construirt:

$s_2^{(5)} = 0.18132\ 29557\ 371153$	$s_{10}^{(5)} = 0.00000\ 00214\ 656932$
$s_3^{(5)} = 0.01639\ 48661\ 225573$	$s_{11}^{(5)} = 0.00000\ 00034\ 262708$
$s_4^{(5)} = 0.00197\ 13046\ 987925$	$s_{12}^{(5)} = 0.00000\ 00005\ 512400$
$s_5^{(5)} = 0.00026\ 59663\ 059214$	$s_{13}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 892429$
$s_6^{(5)} = 0.00003\ 81792\ 469662$	$s_{14}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 145203$
$s_7^{(5)} = 0.00000\ 56948\ 548451$	$s_{15}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 023720$
$s_8^{(5)} = 0.00000\ 08716\ 186059$	$s_{16}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 003887$
$s_9^{(5)} = 0.00000\ 01358\ 653913$	$s_{17}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 000638$
	$s_{18}^{(6)} = 0.00000\ 00000\ 000105.$

Die letzte Decimale ist übrigens unsicher.

Für $p=5$ wird nun die Formel (2)

$$C = 0.49157\ 38641\ 052783 + \tfrac{1}{2}s_2^{(5)} - \tfrac{1}{3}s_3^{(5)} + \tfrac{1}{4}s_4^{(5)} - \ldots$$

Geht man bis zur 16ten Potenz incl., so wird der Fehler $\varDelta < \tfrac{1}{17}s_{17}^{(5)}$, d. i. $< 0.00000\ 00000\ 000037$, und man erhält also 14 richtige Decimalen. Die Rechnung giebt

$$\tfrac{1}{2}s_2^{(5)} + \tfrac{1}{4}s_4^{(5)} + \ldots + \tfrac{1}{16}s_{16}^{(5)} = 0.09116\ 07783\ 969767$$
$$\tfrac{1}{3}s_3^{(5)} + \tfrac{1}{5}s_5^{(5)} + \ldots + \tfrac{1}{15}s_{15}^{(5)} = 0.00551\ 89776\ 007188$$
$$\text{Diff.} = 0.08564\ 18007\ 962579.$$

$$C = \begin{array}{r} 0.08564\ 18007\ 962579 \\ +0.49157\ 38641\ 052783 \\ \hline = 0.57721\ 56649\ 015362. \end{array}$$

Nach Gauss (Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.) ist $C = 0.57721\ 56649\ 01532\ 861$, und der Fehler also

$$< 0.00000\ 00000\ 000033,$$

d. i. kleiner als die oben angegebene Grenze.

Eine noch stärker convergirende Reihe erhält man, wenn man die Grösse u_k nach der Formel

$$lx = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

entwickelt. Man erhält auf solche Weise:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \dfrac{1}{(p+1)(2p+3)} - \tfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2p+3}\right)^3 - \tfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2p+3}\right)^5 - \ldots. \\ u_2 = \dfrac{1}{(p+2)(2p+5)} - \tfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2p+5}\right)^3 - \tfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2p+5}\right)^5 - \ldots. \\ u_3 = \dfrac{1}{(p+3)(2p+7)} - \tfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2p+7}\right)^3 - \tfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{2p+7}\right)^5 - \ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Sämmtliche Horizontalreihen sind convergent, und bleiben convergent, wenn man die Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt. Nach Vornehmung dieser Reduction wird eine Horizontalreihe allgemein gleich

$$\frac{1}{(p+2)(2p+2n+1)} + \tfrac{2}{3}\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3 + \tfrac{2}{5}\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5 + \ldots.,$$

und die Summe dieser Reihe ist $= l(1+\dfrac{1}{p+n}) - \dfrac{2}{2p+2n+1} + \dfrac{1}{(p+n)(2p+2n+1)} = l(1+\dfrac{1}{p+n}) - \dfrac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}$, so dass die Summen der Horizontalreihen, nachdem alle Glieder auf die numerischen Werthe reducirt worden, diese sind:

$$l(1+\frac{1}{p+1}) - \frac{2p+1}{(p+1)(2p+3)},\ l(1+\frac{1}{p+2}) - \frac{2p+3}{(p+2)(2p+5)},$$
$$l(1+\frac{1}{p+3}) - \frac{2p+5}{(p+3)(2p+7)}, \ldots$$

Die letztere Reihe ist ferner convergent. Denn es ist

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}=\frac{1}{p+n}-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots\ldots$$
$$=\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots.,$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}<\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}.$$

Die Glieder der in Rede stehenden Reihe sind also kleiner als die der convergenten Reihe

$$\frac{2}{(p+1)(2p+3)},\quad \frac{2}{(p+2)(2p+5)},\quad \frac{2}{(p+3)(2p+7)},\ldots.$$

weshalb die Reihe selbst ebenfalls convergirt.

Nach der obigen Doppelreihe ist also, wenn man in vertikaler Richtung summirt:

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-l(p+1)+\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$$
$$-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots.,$$

wo die Summe Σ sich von $n=1$ bis $n=\infty$ erstreckt. Die Summe $\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$ lässt sich auf eine endliche Reihe zurückbringen; denn sie ist

$$=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\ldots.+\frac{1}{p(2p+1)}+\frac{1}{(p+1)(2p+3)}+\text{ in inf.}$$
$$-\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\ldots.+\frac{1}{p(2p+1)}\right\},$$

und der Minuendus dieser Differenz (σ) ist bekanntlich $=2(1-l2)$; folglich hat man

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}=2(1-l2)-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\frac{1}{3.7}-\ldots.-\frac{1}{p(2p+1)},$$

also

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{p}-l(p+1)+2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3$$
$$-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots.-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\ldots.-\frac{1}{p(2p+1)}.$$

$$C = \begin{array}{r} 0.08564\ 18007\ 962579 \\ +0.49157\ 38641\ 052783 \\ \hline =0.57721\ 56649\ 015362.. \end{array}$$

Nach Gauss (Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc.) ist $C=0.57721\ 56649\ 01532\ 861$, und der Fehler also

$$< 0.00000\ 00000\ 000033,$$

d. i. kleiner als die oben angegebene Grenze.

Eine noch stärker convergirende Reihe erhält man, wenn man die Grösse u_k nach der Formel

$$lx=2\left[\frac{x-1}{x+1}+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\tfrac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\ldots\right]$$

entwickelt. Man erhält auf solche Weise:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1=\frac{1}{(p+1)(2p+3)}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2p+3}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2p+3}\right)^5-\ldots. \\ u_2=\frac{1}{(p+2)(2p+5)}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2p+5}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2p+5}\right)^5-\ldots. \\ u_3=\frac{1}{(p+3)(2p+7)}-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2p+7}\right)^3-\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2p+7}\right)^5-\ldots. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

Sämmtliche Horizontalreihen sind convergent, und bleiben convergent, wenn man die Glieder auf ihre numerischen Werthe reducirt. Nach Vornehmung dieser Reduction wird eine Horizontalreihe allgemein gleich

$$\frac{1}{(p+2)(2p+2n+1)}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5+\ldots.,$$

und die Summe dieser Reihe ist $=l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2}{2p+2n+1}$ $\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}=l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}$, so dass die Summen der Horizontalreihen, nachdem alle Glieder auf die numerischen Werthe reducirt worden, diese sind:

$$l(1+\frac{1}{p+1})-\frac{2p+1}{(p+1)(2p+3)},\quad l(1+\frac{1}{p+2})-\frac{2p+3}{(p+2)(2p+5)},$$
$$l(1+\frac{1}{p+3})-\frac{2p+5}{(p+3)(2p+7)},\ldots.$$

Die letztere Reihe ist ferner convergent. Denn es ist

$$\tfrac{1}{2}s_2+\tfrac{1}{4}s_4+\ldots.+\tfrac{1}{34}s_{34}=0.34657\ 35902\ 792760$$
$$\tfrac{1}{3}s_3+\tfrac{1}{5}s_5+\ldots.+\tfrac{1}{35}s_{35}=0.07621\ 07448\ 174049$$
$$\text{Unterschied}=0.27036\ 28454\ 618711.$$

$$C=\ \ 0.27036\ 28454\ 618711$$
$$+0.30685\ 28194\ 400547\ (=1-l2)$$
$$=\ \ 0.57721\ 56649\ 019258.$$

Die vier letzten Decimalen irrthümlich. Die Werthe der n türlichen Logarithmen sind aus dem Recueil de Tables log rithmiques etc. par Schultze. à Berlin. 1778. genomme woselbst sie auf 48 Decimalen berechnet sind.

Mit viel wenigern Gliedern der Reihe (2) reicht man aus, wer man für p einen grössern Werth nimmt, z. B. 5. Dann muss ma sich freilich erst die Mühe geben, die Werthe von $(\tfrac{1}{6})^m+(\tfrac{1}{7})^m+(\tfrac{1}{8})^m+$. zu berechnen, was auf die Berechnung von $(\tfrac{1}{2})^m+(\tfrac{1}{3})^m+(\tfrac{1}{4})^m+(\tfrac{1}{5})$ zurückkommt. Diese Mühe ist aber nicht hoch anzuschlagen denn man verwandelt die Brüche $\tfrac{1}{2}$, $\tfrac{1}{3}$, $\tfrac{1}{4}$, $\tfrac{1}{5}$ leicht in Decimalbrüch findet daraus durch Division mit resp. 2, 3, 4, 5 die Quadrat $(\tfrac{1}{2})^2$, $(\tfrac{1}{3})^2$, $(\tfrac{1}{4})^2$, $(\tfrac{1}{5})^2$, daraus auf ähnliche Art die Cuben $(\tfrac{1}{2})^3$, $(\tfrac{1}{3})$ $(\tfrac{1}{4})^3$, $(\tfrac{1}{5})^3$, u. s. w. Auf diese Art habe ich folgende Tafel con struirt:

$s_2^{(5)}=0.18132\ 29557\ 371153$	$s_{10}^{(5)}=0.00000\ 00214\ 656932$
$s_3^{(5)}=0.01639\ 48661\ 225573$	$s_{11}^{(5)}=0.00000\ 00034\ 262708$
$s_4^{(5)}=0.00197\ 13046\ 987925$	$s_{12}^{(5)}=0.00000\ 00005\ 512400$
$s_5^{(5)}=0.00026\ 59663\ 059214$	$s_{13}^{(5)}=0.00000\ 00000\ 892429$
$s_6^{(5)}=0.00003\ 81792\ 469662$	$s_{14}^{(5)}=0.00000\ 00000\ 145203$
$s_7^{(5)}=0.00000\ 56948\ 548451$	$s_{15}^{(5)}=0.00000\ 00000\ 023720$
$s_8^{(5)}=0.00000\ 08716\ 186059$	$s_{16}^{(5)}=0.00000\ 00000\ 003887$
$s_9^{(5)}=0.00000\ 01358\ 653913$	$s_{17}^{(5)}=0.00000\ 00000\ 000638$
	$s_{18}^{(6)}=0.00000\ 00000\ 000105.$

Die letzte Decimale ist übrigens unsicher.

Für $p=5$ wird nun die Formel (2)

$$C=0.49157\ 38641\ 052783+\tfrac{1}{2}s_2^{(5)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(5)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(5)}-\ldots.$$

Geht man bis zur 16ten Potenz incl., so wird der Fehler $\Delta<\tfrac{1}{17}s_{17}^{(5)}$, d. i. $<0.00000\ 00000\ 000037$, und man erhält also 14 richtige Decimalen. Die Rechnung giebt

$$\tfrac{1}{2}s_2^{(5)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(5)}+\ldots.+\tfrac{1}{16}s_{16}^{(5)}=0.09116\ 07783\ 969767$$
$$\tfrac{1}{3}s_3^{(5)}+\tfrac{1}{5}s_5^{(5)}+\ldots.+\tfrac{1}{15}s_{15}^{(5)}=0.00551\ 89776\ 007188$$
$$\text{Diff.}=0.08564\ 18007\ 962579.$$

Da endlich allgemein $\frac{1}{k}-\frac{1}{k(2k+1)}=\frac{2}{2k+1}$, so kommt, wenn man $p-1$ statt p und zur Abkürzung

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+3}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+5}\right)^m+\ldots.=\sigma_m^{(p)}$$

setzt:

$$(3)\quad C=2(1-l2)+2(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\ldots.+\frac{1}{2p-1})-lp-\tfrac{2}{3}\sigma_3^{(p)}-\tfrac{2}{5}\sigma_5^{(p)}-\tfrac{2}{7}\sigma_7^{(p)}-\ldots$$

Nach der vorhergehenden Betrachtung ist 2 der kleinste Werth, welchen man hier für p setzen darf. Jedoch gilt die Formel auch noch für $p=1$, wenn man dann nur das Glied $2(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots.+\frac{1}{2p-1})$ als verschwindend ansieht, wie auf folgende Art erhellt.

Für $p=2$ kommt $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(2)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(2)}-\ldots$ oder, da $\sigma_m^{(2)}=\sigma_m^{(1)}-(\frac{1}{3})^m$ ist, $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(1)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(1)}-\ldots.$ $+\frac{2}{3}.(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}.(\frac{1}{3})^5+\ldots.$ Da nun $\frac{2}{3}.(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}.(\frac{1}{3})^5+\ldots.=l2-\frac{2}{3}$, so kommt

$$(3^*)\quad C=2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\sigma_3-\tfrac{2}{5}\sigma_5-\tfrac{2}{7}\sigma_7-\ldots.,$$

wo jetzt $\sigma_m=(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{5})^m+(\frac{1}{7})^m+\ldots.$ gesetzt worden.

Bekanntlich ist

$$\sigma_m=s_m-\frac{1+s_m}{2^m},$$

wo, wie vorher, $s_m=(\frac{1}{2})^m+(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{4})^m+\ldots.$, und nach der ersten der vorhergehenden Tafeln erhält man demnach leicht die folgende Tafel:

$\sigma_3=0.05179\ 97902\ 646450$	$\sigma_{13}=0.00000\ 06280\ 554218$
$\sigma_5=0.00452\ 37627\ 951397$	$\sigma_{15}=0.00000\ 00697\ 247031$
$\sigma_7=0.00047\ 15486\ 523764$	$\sigma_{17}=0.00000\ 00077\ 448394$
$\sigma_9=0.00005\ 13451\ 838438$	$\sigma_{19}=0.00000\ 00008\ 604441$
$\sigma_{11}=0.00000\ 56660\ 510900$	$\sigma_{21}=0.00000\ 00000\ 956012.$

Die Fehlergrenze bei der Rechnung nach (3*) lässt sich auf folgende Art bestimmen. Bleibt man bei dem Gliede $\frac{2}{2r-1}\sigma_{2r-1}$ stehen, so kommt es darauf an, eine Grenze für die Summe aller folgenden Glieder aufzufinden. Nun ist offenbar jeder Werth in der vorhergehenden Tafel kleiner als der 9te Theil des vorhergehenden, folglich

nach einem Theorem von Cauchy (Cours d'Analyse p. 541.) zulässig; denn erstens bleiben die Horizontalreihen convergent, wenn man die Glieder der obigen Doppelreihe auf ihre numerischen Werthe reducirt, sodann werden nach dieser Reduction die Summen der Horizontalreihen, wie man leicht findet,

$$l(1+\frac{1}{p})-\frac{1}{p+1},\ l(1+\frac{1}{p+1})-\frac{1}{p+2},\ l(1+\frac{1}{p+2})-\frac{1}{p+3},\ldots$$

und dies ist eine convergirende Reihe, da für $p>1$ die Glieder offenbar kleiner als die Glieder der convergirenden Reihe

$$\frac{1}{p(p+1)},\ \frac{1}{(p+1)(p+2)},\ \frac{1}{(p+2)(p+3)},\ldots$$

sind, welche $\frac{1}{p}$ zur Summe hat.

Bezeichnet man nun die Vertikalsumme $\left(\frac{1}{p+1}\right)^m+\left(\frac{1}{p+2}\right)^m+\left(\frac{1}{p+3}\right)^m+\ldots$ kurz durch $s_m^{(p)}$, so erhält man nach (1):

$$(2)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}-\text{etc.}$$

Für $p=1$ geht diese Formel in die bekannte

$$(2^*)\quad C=1-l2+\tfrac{1}{2}s_2-\tfrac{1}{3}s_3+\tfrac{1}{4}s_4-\ldots$$

über, wo jetzt $(\frac{1}{2})^m+(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{4})^m+\ldots=s_m$ gesetzt worden ist. Diese letzte Formel leitet man sonst gewöhnlich aus der Gleichung

$$l\Gamma(x+1)=-Cx+x-l(1+x)+\tfrac{1}{2}x^2s_2-\tfrac{1}{3}x^3s_3+\ldots$$

ab, indem man $x=1$ setzt, und beachtet, dass $\Gamma(2)=1$, $l\Gamma(2)=0$ ist. Die Grösse $s_m+1=1^m+(\frac{1}{2})^m+(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{4})^m+\ldots$ ist bekanntlich von Euler von $m=2$ bis $m=15$, und dann von Legendre (Exercices de calcul intégral, Paris 1811–16. IV. Partie. Sect. I. p. 65.), der zugleich einige Fehler in der Eulerschen Tafel verbesserte, bis $m=35$ auf 16 Decimalen berechnet worden. Der folgenden Betrachtungen wegen kann ich nicht umhin, diese aus Eytelweins Grundlehren der höhern Analysis. Berlin 1824. Bd. 2. p. 644. entlehnte Tafel hierher zu setzen.

Summirt man zuerst die Horizontalreihen und dann die Reihen dieser Summen, so kommt $\frac{1}{2}$. Summirt man dagegen zuerst die Vertikalreihen und dann die Reihe dieser Summen, so kommt $-\frac{1}{2}$ heraus.

$$l(1+x)=\frac{x}{1+x}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\ldots.$$

erhält man dann

$$-v_1=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^4+\ldots.$$

$$-v_2=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+2}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+2}\right)^4+\ldots.$$

$$-v_3=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+3}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+3}\right)^4+\ldots.$$

. . . .

folglich, in vertikaler Richtung summirend, wie es hier erlaubt ist, $-(v_1+v_2+v_3+\ldots.)=\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}+\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}+\ldots.$, und

$$(4)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-lp-\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}-\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}-\ldots.$$

Addirt man hiezu die Gleichung (2)

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-l(p+1)+\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}-\ldots.;$$

so kommt

$$(5)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-\tfrac{1}{2}lp-\tfrac{1}{2}l(p+1)-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}-\tfrac{1}{5}s_5^{(p)}-\tfrac{1}{7}s_7^{(p)}-\ldots$$

Die vorhergehenden Methoden reichen, wie man sieht, vollständig aus, um C auf 14 Decimalen zu berechnen. Wollte man mehr Stellen haben, so müsste man die Potenzsummen auf mehr als 16 Decimalstellen berechnen. Inzwischen ist aber bekannt genug, dass es noch viele andere stark convergirende Reihen für C giebt, deren Anwendung zu einer äusserst grossen Genauigkeit führt. Dahin gehört z. B. die halbconvergente Reihe

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-lp-\frac{1}{2p}+\frac{\overset{1}{B}}{2p^2}-\frac{\overset{3}{B}}{2p^4}+\frac{\overset{5}{B}}{2p^6}-\ldots.,$$

wo $\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \overset{5}{B}, \ldots.$ die auf einander folgenden Bernoullischen Zahlen sind. Mascheroni findet C mittelst dieser Reihe auf 32 Decimalen, indem er $p=100$ setzt.

Uebrigens giebt es auch noch andere stark convergirende Reihen für C, in denen gleichfalls die Potenzsummen vorkommen. Aus der Gleichung z. B.

$$l\Gamma(x+1)=-Cx+x-l(1+x)+\tfrac{1}{2}x^2s_2-\tfrac{1}{3}x^3s_3+\ldots.$$

erhält man für $x=\tfrac{1}{2}$:

$$C = 1 + 2l\tfrac{1}{3} - l\pi + \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} s_2$$
$$- \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 s_3$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^3 s_4$$
$$- \ldots.$$

Dabei mag schliesslich bemerkt werden, dass man diese Reihe in folgende, um so stärker convergirende, je grösser p ist, verwandeln kann:

$$C = 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p} + l\frac{4}{\pi} - 2\sum_{p=1}^{p=p} l\frac{2p+1}{2p}$$
$$+ \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} s_2^{(p)}$$
$$- \tfrac{1}{3} \cdot (\tfrac{1}{2})^2 s_3^{(p)}$$
$$+ \tfrac{1}{4} \cdot (\tfrac{1}{2})^3 s_4^{(p)}$$
$$- \ldots.$$

XXIX.

Ueber einen Satz von den Krümmungshalbmessern der krummen Oberflächen.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

In den Comptes rendus der Pariser Akademie vom 27. September v. J. stellt Babinet einen Satz auf, der im Allgemeinen auf das Folgende hinauskommt:

„Durch die Normale in einem Punkte einer krummen Oberfläche lege man m Ebenen, die mit einander lauter gleiche Winkel bilden, heisse $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_m$ die Krümmungshalbmesser der Schnittkurven in dem betreffenden Punkte, endlich R und r die beiden Hauptkrümmungshalbmesser der Oberfläche in demselben Punkte, so ist

$$\frac{1}{m}\left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \ldots + \frac{1}{\varrho_m}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{r}\right).\text{“} \quad \ldots \quad (1)$$

Da endlich allgemein $\frac{1}{k}-\frac{1}{k(2k+1)}=\frac{2}{2k+1}$, so kommt, wenn man $p-1$ statt p und zur Abkürzung

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+3}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+5}\right)^m+\ldots.=\sigma_m^{(p)}$$

setzt:

$$(3)\quad C=2(1-l2)+2(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\ldots.+\frac{1}{2p-1})-lp-\tfrac{2}{3}\sigma_3^{(p)}-\tfrac{2}{5}\sigma_5^{(p)}-\tfrac{2}{7}\sigma_7^{(p)}-..$$

Nach der vorhergehenden Betrachtung ist 2 der kleinste Werth, welchen man hier für p setzen darf. Jedoch gilt die Formel auch noch für $p=1$, wenn man dann nur das Glied $2(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots.+\frac{1}{2p-1})$ als verschwindend ansieht, wie auf folgende Art erhellt.

Für $p=2$ kommt $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(2)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(2)}-\ldots$ oder, da $\sigma_m^{(2)}=\sigma_m^{(1)}-(\frac{1}{3})^m$ ist, $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(1)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(1)}-\ldots.. +\frac{2}{3}.(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}.(\frac{1}{3})^5+\ldots..$ Da nun $\frac{2}{3}.(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}.(\frac{1}{3})^5+\ldots.=l2-\frac{2}{3}$, so kommt

$$(3^*)\quad C=2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\sigma_3-\tfrac{2}{5}\sigma_5-\tfrac{2}{7}\sigma_7-\ldots.,$$

wo jetzt $\sigma_m=(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{5})^m+(\frac{1}{7})^m+\ldots.$ gesetzt worden.

Bekanntlich ist

$$\sigma_m=s_m-\frac{1+s_m}{2^m},$$

wo, wie vorher, $s_m=(\frac{1}{2})^m+(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{4})^m+\ldots.$, und nach der ersten der vorhergehenden Tafeln erhält man demnach leicht die folgende Tafel:

$\sigma_3=0.05179\ 97902\ 646450$	$\sigma_{13}=0.00000\ 06280\ 554218$
$\sigma_5=0.00452\ 37627\ 951397$	$\sigma_{15}=0.00000\ 00697\ 247031$
$\sigma_7=0.00047\ 15486\ 523764$	$\sigma_{17}=0.00000\ 00077\ 448394$
$\sigma_9=0.00005\ 13451\ 838438$	$\sigma_{19}=0.00000\ 00008\ 604441$
$\sigma_{11}=0.00000\ 56660\ 510900$	$\sigma_{21}=0.00000\ 00000\ 956012.$

Die Fehlergrenze bei der Rechnung nach (3*) lässt sich auf folgende Art bestimmen. Bleibt man bei dem Gliede $\frac{2}{2r-1}\sigma_{2r-1}$ stehen, so kommt es darauf an, eine Grenze für die Summe aller folgenden Glieder aufzufinden. Nun ist offenbar jeder Werth in der vorhergehenden Tafel kleiner als der 9te Theil des vorhergehenden, folglich

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}=\frac{1}{p+n}-\frac{2p+2n-1}{(p+n)2p+2n+1)}$$

$$-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}.\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots..$$

$$=\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}-\tfrac{1}{2}.\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}.\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots.,$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}<\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}.$$

Die Glieder der in Rede stehenden Reihe sind also kleiner als die der convergenten Reihe

$$\frac{2}{(p+1)(2p+3)},\quad \frac{2}{(p+2)(2p+5)},\quad \frac{2}{(p+3)(2p+7)},\ldots.$$

weshalb die Reihe selbst ebenfalls convergirt.

Nach der obigen Doppelreihe ist also, wenn man in vertikaler Richtung summirt:

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots.+\frac{1}{p}-l(p+1)+\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$$

$$-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots.,$$

wo die Summe Σ sich von $n=1$ bis $n=\infty$ erstreckt. Die Summe $\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$ lässt sich auf eine endliche Reihe zurückbringen; denn sie ist

$$=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\ldots.+\frac{1}{p(2p+1)}+\frac{1}{(p+1)(2p+3)}+\text{ in inf.}$$

$$-\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\ldots.+\frac{1}{p(2p+1)}\right\},$$

und der Minuendus dieser Differenz (σ) ist bekanntlich $=2(1-l2)$; folglich hat man

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}=2(1-l2)-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\frac{1}{3.7}-\ldots.-\frac{1}{p(2p+1)},$$

also

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\ldots.+\frac{1}{p}-l(p+1)+2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3$$

$$-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots.-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\ldots.-\frac{1}{p(2p+1)}.$$

Da endlich allgemein $\frac{1}{k}-\frac{1}{k(2k+1)}=\frac{2}{2k+1}$, so kommt, wenn man $p-1$ statt p und zur Abkürzung

$$\left(\frac{1}{2p+1}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+3}\right)^m+\left(\frac{1}{2p+5}\right)^m+\dots=\sigma_m^{(p)}$$

setzt:

$$(3)\quad C=2(1-l2)+2(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\dots+\frac{1}{2p-1})-lp-\tfrac{2}{3}\sigma_3^{(p)}-\tfrac{2}{5}\sigma_5^{(p)}-\tfrac{2}{7}\sigma_7^{(p)}-\dots$$

Nach der vorhergehenden Betrachtung ist 2 der kleinste Werth, welchen man hier für p setzen darf. Jedoch gilt die Formel auch noch für $p=1$, wenn man dann nur das Glied $2(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2p-1})$ als verschwindend ansieht, wie auf folgende Art erhellt.

Für $p=2$ kommt $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(2)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(2)}-\dots$ oder, da $\sigma_m^{(2)}=\sigma_m^{(1)}-(\frac{1}{3})^m$ ist, $C=2(1-l2)+\frac{2}{3}-l2-\frac{2}{3}\sigma_3^{(1)}-\frac{2}{5}\sigma_5^{(1)}-\dots$ $+\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}\cdot(\frac{1}{3})^5+\dots$ Da nun $\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^3+\frac{2}{5}\cdot(\frac{1}{3})^5+\dots=l2-\frac{2}{3}$, so kommt

$$(3^*)\quad C=2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\sigma_3-\tfrac{2}{5}\sigma_5-\tfrac{2}{7}\sigma_7-\dots,$$

wo jetzt $\sigma_m=(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{5})^m+(\frac{1}{7})^m+\dots$ gesetzt worden.

Bekanntlich ist

$$\sigma_m=s_m-\frac{1+s_m}{2^m},$$

wo, wie vorher, $s_m=(\frac{1}{2})^m+(\frac{1}{3})^m+(\frac{1}{4})^m+\dots$, und nach der ersten der vorhergehenden Tafeln erhält man demnach leicht die folgende Tafel:

$\sigma_3=0.05179\ 97902\ 646450$	$\sigma_{13}=0.00000\ 06280\ 554218$
$\sigma_5=0.00452\ 37627\ 951397$	$\sigma_{15}=0.00000\ 00697\ 247031$
$\sigma_7=0.00047\ 15486\ 523764$	$\sigma_{17}=0.00000\ 00077\ 448394$
$\sigma_9=0.00005\ 13451\ 838438$	$\sigma_{19}=0.00000\ 00008\ 604441$
$\sigma_{11}=0.00000\ 56660\ 510900$	$\sigma_{21}=0.00000\ 00000\ 956012.$

Die Fehlergrenze bei der Rechnung nach (3*) lässt sich auf folgende Art bestimmen. Bleibt man bei dem Gliede $\frac{2}{2r-1}\sigma_{2r-1}$ stehen, so kommt es darauf an, eine Grenze für die Summe aller folgenden Glieder aufzufinden. Nun ist offenbar jeder Werth in der vorhergehenden Tafel kleiner als der 9te Theil des vorhergehenden, folglich

$$\tfrac{1}{2}s_2 + \tfrac{1}{4}s_4 + \ldots + \tfrac{1}{34}s_{34} = 0.34657\ 35902\ 792760$$
$$\tfrac{1}{3}s_3 + \tfrac{1}{5}s_5 + \ldots + \tfrac{1}{35}s_{35} = 0.07621\ 07448\ 174049$$
$$\text{Unterschied} = 0.27036\ 28454\ 618711.$$

$$C = 0.27036\ 28454\ 618711$$
$$+0.30685\ 28194\ 400547\ (=1-l2)$$
$$= 0.57721\ 56649\ 019258.$$

Die vier letzten Decimalen irrthümlich. Die Werthe der n türlichen Logarithmen sind aus dem Recueil de Tables loga rithmiques etc. par Schultze. à Berlin. 1778. genommei woselbst sie auf 48 Decimalen berechnet sind.

Mit viel wenigern Gliedern der Reihe (2) reicht man aus, wer man für p einen grössern Werth nimmt, z. B. 5. Dann muss ma sich freilich erst die Mühe geben, die Werthe von $(\frac{1}{6})^m + (\frac{1}{7})^m + (\frac{1}{8})^m +$ zu berechnen, was auf die Berechnung von $(\frac{1}{2})^m + (\frac{1}{3})^m + (\frac{1}{4})^m + (\frac{1}{5})$ zurückkommt. Diese Mühe ist aber nicht hoch anzuschlage denn man verwandelt die Brüche $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ leicht in Decimalbrüch findet daraus durch Division mit resp. 2, 3, 4, 5 die Quadrat $(\frac{1}{2})^2$, $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{1}{4})^2$, $(\frac{1}{5})^2$, daraus auf ähnliche Art die Cuben $(\frac{1}{2})^3$, $(\frac{1}{3})^3$, $(\frac{1}{4})^3$, $(\frac{1}{5})^3$, u. s. w. Auf diese Art habe ich folgende Tafel con struirt:

$s_2^{(5)} = 0.18132\ 29557\ 371153$	$s_{10}^{(5)} = 0.00000\ 00214\ 656932$
$s_3^{(5)} = 0.01639\ 48661\ 225573$	$s_{11}^{(5)} = 0.00000\ 00034\ 262708$
$s_4^{(5)} = 0.00197\ 13046\ 987925$	$s_{12}^{(5)} = 0.00000\ 00005\ 512400$
$s_5^{(5)} = 0.00026\ 59663\ 059214$	$s_{13}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 892429$
$s_6^{(5)} = 0.00003\ 81792\ 469662$	$s_{14}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 145203$
$s_7^{(5)} = 0.00000\ 56948\ 548451$	$s_{15}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 023720$
$s_8^{(5)} = 0.00000\ 08716\ 186059$	$s_{16}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 003887$
$s_9^{(5)} = 0.00000\ 01358\ 653913$	$s_{17}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 000638$
	$s_{18}^{(5)} = 0.00000\ 00000\ 000105.$

Die letzte Decimale ist übrigens unsicher.

Für $p=5$ wird nun die Formel (2)

$$C = 0.49157\ 38641\ 052783 + \tfrac{1}{2}s_2^{(5)} - \tfrac{1}{3}s_3^{(5)} + \tfrac{1}{4}s_4^{(5)} - \ldots$$

Geht man bis zur 16ten Potenz incl., so wird der Fehler $\Delta < \frac{1}{17}s_{17}^{(5)}$, d. i. $< 0.00000\ 00000\ 000037$, und man erhält also 14 richtige Decimalen. Die Rechnung giebt

$$\tfrac{1}{2}s_2^{(5)} + \tfrac{1}{4}s_4^{(5)} + \ldots + \tfrac{1}{16}s_{16}^{(5)} = 0.09116\ 07783\ 969767$$
$$\tfrac{1}{3}s_3^{(5)} + \tfrac{1}{5}s_5^{(5)} + \ldots + \tfrac{1}{15}s_{15}^{(5)} = 0.00551\ 89776\ 007188$$
$$\text{Diff.} = 0.08564\ 18007\ 962579.$$

$$l(1+x)=\frac{x}{1+x}+\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3+\dots$$

rhält man dann

$$-v_1=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^4+\dots$$

$$-v_2=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+2}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+2}\right)^4+\dots$$

$$-v_3=\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+3}\right)^3+\tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+3}\right)^4+\dots$$

. . . .

›lglich, in vertikaler Richtung summirend, wie es hier erlaubt ist, $-(v_1+v_2+v_3+\dots)=\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}+\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}+\dots$, und

$$(4)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-lp-\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}-\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}-\dots$$

ddirt man hiezu die Gleichung (2)

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-l(p+1)+\tfrac{1}{2}s_2^{(p)}-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}+\tfrac{1}{4}s_4^{(p)}-\dots;$$

› kommt

$$5)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-\tfrac{1}{2}lp-\tfrac{1}{2}l(p+1)-\tfrac{1}{3}s_3^{(p)}-\tfrac{1}{5}s_5^{(p)}-\tfrac{1}{7}s_7^{(p)}-\dots$$

Die vorhergehenden Methoden reichen, wie man sieht, vollăndig aus, um C auf 14 Decimalen zu berechnen. Wollte man ehr Stellen haben, so müsste man die Potenzsummen auf mehr s 16 Decimalstellen berechnen. Inzwischen ist aber bekannt :nug, dass es noch viele andere stark convergirende Reihen für giebt, deren Anwendung zu einer äusserst grossen Genauigkeit hrt. Dahin gehört z. B. die halbconvergente Reihe

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\dots+\frac{1}{p}-lp-\frac{1}{2p}+\frac{\overset{1}{B}}{2p^2}-\frac{\overset{3}{B}}{2p^4}+\frac{\overset{5}{B}}{2p^6}-\dots,$$

› $\overset{1}{B}, \overset{3}{B}, \overset{5}{B}, \dots$ die auf einander folgenden Bernoullischen Zahı sind. Mascheroni findet C mittelst dieser Reihe auf 32 Deıalen, indem er $p=100$ setzt.

Uebrigens giebt es auch noch andere stark convergirende ihen für C, in denen gleichfalls die Potenzsummen vorkommen. us der Gleichung z. B.

$$l\Gamma(x+1)=-Cx+x-l(1+x)+\tfrac{1}{2}x^2s_2-\tfrac{1}{3}x^3s_3+\dots$$

ält man für $x=\tfrac{1}{2}$:

Es ist nun meine Aufgabe, den Unterschied der Grö $s_p - lp$ vom wahren Werthe des C, wenn p einen bestimmten We erhält, auf eine für die Rechnung bequeme Art zu bestimm Zu dem Ende sei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-lp=C_p$; dann kommt

$$C_{p+1}-C_p = \frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p}),$$

$$C_{p+2}-C_{p+1} = \frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+1}),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_{p+k}-C_{p+k-1} = \frac{1}{p+k}-l(1+\frac{1}{p+k-1});$$

also durch Addition zu beiden Seiten

$$C_{p+k}-C_p = \frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p})+\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+1}+\ldots$$

$$\ldots+\frac{1}{p+k}-l(1+\frac{1}{p+k-1}),$$

oder, für C_p seinen Werth gesetzt,

$$C_{p+k}=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p+1})$$

$$+\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+2})+\ldots+\frac{1}{p+k-1}-l(1+\frac{1}{p+k-1})+\frac{1}{p+k}.$$

Setzt man nun $k=\infty$, wobei C_{p+k} in C übergeht, so erhält m die unendliche Reihe

$$(1)\quad C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+u_1+u_2+u_3+\ldots,$$

wo

$$\begin{cases} u_1=\frac{1}{p+1}-l(1+\frac{1}{p+1}), \\ u_2=\frac{1}{p+2}-l(1+\frac{1}{p+2}), \\ u_3=\frac{1}{p+3}-l(1+\frac{1}{p+3}), \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

Die Reihe u_1, u_2, u_3,.... ist convergent, wie sich aus d vorgehenden Betrachtung unmittelbar ergiebt; es erhellet di übrigens auch auf nachstehende Weise. Durch Entwickelung d Logarithmus findet man

$$\frac{1}{p+k} - l\left(1+\frac{1}{p+k}\right) = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^3 + \ldots,$$

lglich ist offenbar $u_k < \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2$, und hieraus, so wie aus em Umstande, dass die Reihe $\left(\frac{1}{p+1}\right)^2, \left(\frac{1}{p+2}\right)^2, \left(\frac{1}{p+3}\right)^2, \ldots$ onvergent ist, ergiebt sich die Convergenz der Reihe $u_1, u_2, u_3, \ldots$ iese Convergenz geht aber nur langsam von Statten, und um eshalb eine stärker convergirende Reihe zu erhalten, löse man ie Glieder u_1, u_2, u_3,.... in unendliche convergirende Reihen auf nd summire die resultirende Doppelreihe dadurch, dass man sie eine andere einfache Reihe umgestaltet.

Um aber u_k in eine unendliche Reihe zu verwandeln, kann an mehrere Formeln anwenden. Zuerst giebt die Anwendung er Formel $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \ldots (-1 < x < 1)$:

$$u_k = \tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+k}\right)^2 - \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{p+k}\right)^3 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{p+k}\right)^4 - \ldots,$$

so

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+1}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+1}\right)^4 - \ldots \\ u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+2}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+2}\right)^4 - \ldots \\ u_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p+3}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{p+3}\right)^3 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p+3}\right)^4 - \ldots \end{cases}$$

. . . .

Man sieht hieraus, dass sämmtliche Vertikalreihen convergent nd, dass ferner auch ihre Summen eine convergente Reihe bil-n; allein keineswegs darf hieraus im Allgemeinen geschlossen erden, dass die Summe der letztern Reihe der Summe $u_1+u_2+u_3+\ldots$ eich sein muss *). In unserm Falle ist dieser Schluss indessen

---

*) Die Theorie der Convergenz der Doppelreihen ist nach den Vorbeiten Cauchy's keineswegs als abgeschlossen zu betrachten, indem uchy (Cours d'Analyse p. 537 ff.) blos den Fall in Betracht gezogen, ss die sämmtlichen Horizontalreihen. und die Reihe ihrer Summen nvergent sind, und diese doppelte Eigenschaft noch bestehen bleibt, enn alle Glieder der Doppelreihe auf ihre numerischen 'erthe reducirt werden. Findet die letzte Bedingung nicht statt, führt die weitere Untersuchung, mit der ich jetzt beschäftigt bin, f anscheinend sehr merkwürdige Resultate, von denen ich hier folndes hervorhebe. Die Doppelreihe sei

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2}) - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}),\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3}) - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}),\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4}) - \tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5}), \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^2 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2,\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^2 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2,\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^2 - \tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5})^2, \ldots$$
$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{2})^3 - \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3,\ \tfrac{1}{3}(1-\tfrac{1}{3})^3 - \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3,\ \tfrac{1}{4}(1-\tfrac{1}{4})^3 - \tfrac{1}{5}(1-\tfrac{1}{5})^3, \ldots$$

. . . .

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}=\frac{1}{p+n}-\frac{2p+2n-1}{(p+n)2p+2n+1)}$$
$$-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots\ldots$$
$$=\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}-\tfrac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^2+\tfrac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{p+n}\right)^3-\ldots\ldots,$$

und folglich, wie man leicht findet,

$$l(1+\frac{1}{p+n})-\frac{2p+2n-1}{(p+n)(2p+2n+1)}<\frac{2}{(p+n)(2p+2n+1)}.$$

Die Glieder der in Rede stehenden Reihe sind also kleiner als die der convergenten Reihe

$$\frac{2}{(p+1)(2p+3)},\quad \frac{2}{(p+2)(2p+5)},\quad \frac{2}{(p+3)(2p+7)},\ldots\ldots,$$

weshalb die Reihe selbst ebenfalls convergirt.

Nach der obigen Doppelreihe ist also, wenn man in vertikaler Richtung summirt:

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$$
$$-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots\ldots,$$

wo die Summe Σ sich von $n=1$ bis $n=\infty$ erstreckt. Die Summe $\Sigma\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}$ lässt sich auf eine endliche Reihe zurückbringen; denn sie ist

$$=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\frac{1}{3.7}+\ldots\ldots+\frac{1}{p(2p+1)}+\frac{1}{(p+1)(2p+3)}+\text{ in inf.}$$
$$-\left\{\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{p(2p+1)}\right\},$$

und der Minuendus dieser Differenz (σ) ist bekanntlich $=2(1-l2)$; folglich hat man

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{(p+n)(2p+2n+1)}=2(1-l2)-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\frac{1}{3.7}-\ldots\ldots-\frac{1}{p(2p+1)},$$

also

$$C=1+\tfrac{1}{2}+\ldots\ldots+\frac{1}{p}-l(p+1)+2(1-l2)-\tfrac{2}{3}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^3$$
$$-\tfrac{2}{5}\Sigma\left(\frac{1}{2p+2n+1}\right)^5-\ldots\ldots-\frac{1}{1.3}-\frac{1}{2.5}-\ldots\ldots-\frac{1}{p(2p+1)}.$$

IV.

Man hat

$$x\cos\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\cos 2\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^3\cos 3\varphi+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\cos 4\varphi+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=2-2\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}\,.\cos\frac{\psi}{2},$$

$$x\sin\varphi+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2\sin 2\varphi+\frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^3\sin 3\varphi+\frac{1}{4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}x^4\sin 4\varphi+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=2\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}\cdot\sin\frac{\psi}{2};$$

worin ψ bestimmt wird durch

$$\cos\psi=\frac{1-x\cos\varphi}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}},\quad \sin\psi=\frac{x\sin\varphi}{\sqrt{1-2x\cos\varphi+x^2}}$$

und zwischen 0 und 2π liegt. $x>0$ und <1; auch darf $x=1$ sein, wenn weder $\sin^2\varphi$, noch $\cos^2\varphi$ gleich 1 ist.

V.

Unter den gleichen Bedingungen hat man:

$$x\cos\varphi+\frac{1}{1.2}x^2\cos 2\varphi+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^3\cos 3\varphi+\frac{1}{3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^4\cos 4\varphi+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=3x\cos\varphi-\frac{4}{3}+\frac{4}{3}(1-2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{3}{2}}.\cos\tfrac{3}{2}\psi,$$

$$x\sin\varphi+\frac{1}{1.2}x^2\sin 2\varphi+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{2}x^3\sin 3\varphi+\frac{1}{3.4}\cdot\frac{1.3}{2.4}x^4\cos 4\varphi+\ldots \text{ in inf.}$$

$$=3x\sin\varphi-\frac{4}{3}(1-2x\cos\varphi+x^2)^{\frac{3}{2}}\sin\tfrac{3}{2}\psi.$$

XXXII.

Miscellen.

Bemerkung zu der Abhandlung Nr. I. in Thl X. S. 2. Z.

Vom Herausgeber.

Bei der Angabe des Coefficienten der terrestrischen St
brechung nach verschiedenen Beobachtern in der Note a.
S. 2. habe ich den Begriff dieses Coefficienten in dem Sin
Gauss genommen, worüber man Archiv. Thl. I. S. 76. vergl
kann. Um jedoch jedem Missverständnisse vorzubeugen, be
ich, dass in den Lehrbüchern der Geodäsie gewöhnlich die
ten der a. a. O. angegebenen Grössen der Coefficient der te
schen Refraction genannt werden, indem man nämlich de
kel am Mittelpunkte der Erde nur mit diesen Hälften multip
muss, um die terrestrische Refraction zu erhalten, was All
einer blossen Ansicht von Thl. I. S. 76. sogleich verst
werden wird.

Weil sich erwarten liess, dass über die in Thl. IX. S. 9
Archivs bei Gelegenheit der Lehre von dem Obelisken von
einer analytischen Behandlung benutzte stereometrische A
mir eine grössere Anzahl von Mittheilungen zugehen würde
der im Archiv dargebotene Raum meistens sehr beschränk
so habe ich über diese Aufgabe, mit Ausnahme des in T
Nr. V. abgedruckten Aufsatzes des Herrn Oberlehrers S
witz in Heiligenstadt, bis jetzt geschwiegen, darf nun aber
länger anstehen, die mir gemachten Mittheilungen, unter A
des Datums der Einsendung, nach und nach abdrucken zu l
Alle diese Mittheilungen abdrucken zu lassen, möchte
nicht rathsam sein, da natürlich dabei viele Wiederholunge
kommen müssten, was ich, wenigstens zum Theil, die ge
Leser des Archivs schon bei den folgenden Mittheilungen
zu entschuldigen bitte. Wenn ich mehr mittheile, als ich
eigentlich für nöthig halte, so geschieht dies nur, um geg

ehrten Herren Einsender so wenig als möglich eine Ungerech-
keit zu begehen, was bei der Herausgabe eines Journals leider
weilen nicht ganz zu vermeiden ist, weshalb ich daher, wenn
geschehen sein sollte, nur um Verzeihung und Nachsicht bit-
n kann. G.

---

chreiben des Herrn Fabriken-Kommissionsraths A. Brix zu Berlin an den Herausgeber.

In dem mir so eben zugegangenen ersten Hefte vom 9ten Bande hres geschätzten Archivs finde ich zwei Aufsätze aus Ihrer Feder, emlich über den Satz von dem Inhalte der Obelisken, und über ie Entstehung der Körper dieser Art. Beide Aufsätze behandeln emnach einen Gegenstand, der mich um so mehr interessirt, als h bereits vor einer Reihe von Jahren darin gearbeitet habe, wenn-leich die von mir gefundenen Resultate erst nach Mittheilung er von Herrn Koppe gefundenen Formel für den Inhalt der belisken im 25sten Bande S. 129. des Crelle'schen Journals r reine und angewandte Mathematik (conf. auch S. 130—148. es Anhangs zur 2ten Auflage meiner Statik) veröffentlicht wor-en sind. Es ist nicht meine Absicht,. hier auf einen Prioritäts-treit einzugehen, obgleich es mir leicht wäre, durch die Hefte einer Zuhörer den Beweis zu liefern, dass meine Resultate schon ehrere Jahre vor Herrn Koppe's Mittheilung der oben genann-n Formel da waren, auch Herr Koppe selbst öffentlich aner-annt hat, dass ihm die Benennung „Obelisken" von dem irklichen Geheimen Ober-Regierungsrath, Herrn Beuth, Excel-enz, angegeben worden sei. Dass sie von mir herrührt, könnten enfalls die Ministerial-Akten beweisen, wenn darauf irgend ein ewicht zu legen wäre. Ich meinerseits lege kein solches Gewicht arauf, und bin daher weit davon entfernt, Herrn Koppe die ihm ktisch gebührende Priorität bestreiten zu wollen; dagegen kann h nicht leugnen, dass es mich einigermassen überrascht hat, ei Anführung der Arbeiten der Herren Koppe, Steiner und retschneider die meinigen so gänzlich mit Stillschweigen über-angen zu sehen *). Kann und darf auch ein Mitarbeiter an Ihrem rchiv nicht mehr Anspruch auf Gerechtigkeit von Ihrer Seite achen, als irgend ein anderer, so hat dieser Mitarbeiter als olcher doch auch eben so wenig mehr Anspruch auf gänzliches gnoriren seiner Leistungen, wenn die seiner Concurrenten ge-annt werden.

Nach dieser Expectoration, die Sie meiner menschlichen chwachheit zu Gute halten wollen, erlauben Sie mir noch eine emerkung in Bezug auf Ihren zweiten Aufsatz.

---

*) Der Herausgeber kann deshalb Herrn Brix, mit dem er seit lan-r Zeit in den freundschaftlichsten Beziehungen zu stehen die Ehre d die Freude gehabt hat, und noch hat, nur um Verzeihung bitten.

Sie tadeln darin, und gewiss mit Recht, dass man nach der Erklärung der Obelisken, ohne sich um deren Realität weiter zu kümmern, sogleich einige Eigenschaften derselben bewiesen und dann mit einer gewissen Eilfertigkeit den körperlichen Inhalt — und die Lage des Schwerpunktes, hätten Sie mit Rücksicht auf meine Abhandlung im Crelle'schen Journal hinzusetzen können — zu bestimmen gesucht habe, wahrscheinlich, um nur recht bald etwas Anwendbares für die Praxis zu gewinnen. In der That war letzteres bei meiner Behandlung des fraglichen Gegenstandes der nächste Zweck, was schon darin seine Erklärung findet, weil ich durch die Praxis eben auf ihn geführt wurde. Nichtsdestoweniger habe ich mich ebenfalls des von Ihnen gerügten Verstosses gegen die euklidische Strenge theilhaftig gemacht, und deshalb beeile ich mich, diese Sünde so viel wie möglich wieder gut zu machen, indem ich Ihnen Folgendes zur beliebigen Benutzung für Ihr Archiv mittheile.

Ich schliesse mich der Verstellungsweise an, welche Sie S. 89. Ihres Archivs von der Entstehung eines Obelisken geben. Denkt man sich demgemäss durch die Eckpunkte eines ebenen Polygons $A_1A_2A_3....A_n$ beliebige, nicht in die Ebene des Polygons fallende gerade Linien L_1, L_2, L_3,.... L_n so gelegt, dass jede von ihnen die nächstvorhergehende schneidet, so kann man diese Linien als die Seitenkanten eines seiner Länge nach vorläufig noch unbegrenzten Obelisken betrachten, dafern sich beweisen lässt, dass die letzte Linie L_n, welche die vorletzte L_{n-1} schneidet, eine solche Lage hat, dass sie zugleich die erste L_1 schneiden muss. Es kömmt also nur auf den Nachweis der Möglichkeit an, durch den im Raum gegebenen Punkt A_n eine gerade Linie L_n so zu legen, dass sie zwei andere im Raum gegebene Geraden L_1 und L_{n-1} schneidet, d. h. mit jeder von diesen in einer Ebene liegt.

Sie geben nun von diesem letzteren Problem eine elegante Auflösung im analytischen Gewande, und wiederholen am Schlusse den Wunsch, dass eine Auflösung bloss durch Konstruction gefunden werden möge, damit dieselbe in den Elementen der Stereometrie Platz finden könne. Irre ich nicht, so dürfte die folgende Lösung geeignet sein, dieses Bedürfniss genügend zu befriedigen:

Eine im Raum gegebene Gerade und ein ausserhalb derselben gegebener Punkt bestimmen allemal die Lage einer Ebene. Man lege daher durch die Linie L_{n-1} und den Punkt A_n eine Ebene, dann durch L_1 und A_n eine zweite Ebene, so geben beide Ebenen eine gerade Durchschnittslinie L_n, welche die gesuchte ist. Denn sie geht durch den Punkt A_n und schneidet, hinreichend verlängert, die Linien L_1 und L_{n-1}, oder ist mit letzteren parallel.

Berlin, den 28sten Januar 1847.

Auflösung einer Aufgabe, auf welcher die Realität der Obelisken beruht.

Von Herrn Dr. Schellen, Lehrer der Mathematik an der Realschule zu Düsseldorf.

Im ersten Hefte des IX. Theiles S. 89. dieser Zeitschrift stellt der Herausgeber derselben bei Gelegenheit der Untersuchung über die Realität der Koppeschen Obelisken die Aufgabe: „Wenn zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben sind, durch diesen Punkt eine die beiden gegebenen geraden Linien schneidende *) gerade Linie zu legen.

Wir sind durchaus der Ansicht des Herausgebers, dass diese Aufgabe und der Nachweis ihrer Auflösbarkeit der Theorie der Obelisken vorangehen muss. Die von jenem gegebene analytische Auflösung kann natürlich in den Elementarbüchern der Stereometrie keine Aufnahme finden. Wir theilen daher folgende Auflösung obiger Aufgabe mit, welche nur gewöhnliche stereometrische Kenntnisse voraussetzt.

Die beiden gegebenen Linien im Raume bezeichnen wir mit A und B, den gegebenen Punkt mit O. Wir unterscheiden nun sogleich mehrere Fälle:

1) die beiden Linien A und B sind parallel;
   - *a*) der Punkt O liegt in der Ebene dieser Parallelen A und B,
   - *b*) der Punkt O liegt ausserhalb der Ebene dieser Parallelen A und B.

Im Falle *a*) lassen sich offenbar unzählig viele Linien von der verlangten Beschaffenheit ziehen.

Im Falle *b*) ziehe man durch O zu einer der gegebenen Linien A oder B eine Parallele, so ist diese die verlangte Linie, denn sie schneidet die gegebenen Linien im Unendlichen.

2) Die beiden gegebenen Linien A und B sind nicht parallel und liegen
   - *a*) in einer Ebene,
   - *b*) nicht in einer Ebene.

Im Falle *a*) mag der Punkt O in der Ebene der A und B liegen oder nicht: die gesuchte Linie wird diejenige sein, welche den Punkt O mit dem Durchschnittspunkte der Linien A und B verbindet.

Der letztere Fall *b*) ist der allgemeinere, und auf ihn beziehen sich die folgenden Untersuchungen.

---

*) Dieses Wort in dem Sinne, dass der Parallelismus nicht ausgeschlossen ist.

In Taf. VI. Fig. 7. sind die gegebenen Linien A und B, der gegebene Punkt O. Dieser Punkt O liegt mit A offenbar in einer und derselben Ebene; wir legen nun durch O eine, die beiden Linien A und B schneidende Ebene, oder wir ziehen Oa beliebig nach A, ebenso Ob beliebig nach B und verbinden a mit b. Jede durch O gehende, die Linie A schneidende Gerade liegt in der Ebene OaA, welche die Ebene des Papiers sein mag. Soll also eine solche Gerade auch noch die Linie B schneiden, so muss sie durch denjenigen Punkt der Ebene OaA gehen, in welchem die Linie B dieser Ebene begegnet. Es könnte nun der Fall sein, dass die Linie B diese Ebene OaA nicht träfe, sondern ihr parallel wäre: dann hätte man aber nur durch O in der Ebene OaA zur Linie B eine Parallele zu ziehen, welche offenbar die verlangte Linie wäre. Im Allgemeinen schneidet aber die Linie B die Ebene OaA und der Treffpunkt sei x. Wäre dieser Punkt gefunden, so würde die gesuchte Linie offenbar die Linie Ox sein. Man kann nun entweder den Punkt x selbst oder, noch einfacher, die Richtung der Linie xO auf folgende Weise bloss durch Construction finden.

Der Kürze wegen bezeichnen wir die Ebene Oab mit (G), Ebene Oax, oder was dasselbe ist, Ebene OaA mit (A), Ebene axB mit (B) und endlich Ebene Oxb mit (C); so sind von den drei Ebenen (G), (C), (B) die ebenen Winkel resp. $\angle abO$, $\angle xbO$, $\angle xba$ an der körperlichen Ecke b bekannt, also kann man die drei Neigungswinkel

1) der Ebenen (G) und (B) an der Kante ab
2) „ „ (G) „ (C) „ „ „ Ob ....(I)
3) „ „ (B) „ (C) „ „ „ xb

durch eine Construction in der Ebene (graphisch) finden *).

Gehen wir nun zur körperlichen Ecke O, so sind daran gegeben

1) der ebene Winkel aOb,
2) der Neigungswinkel der Ebenen (G) und (C) an der Kante Ob, (I, 2) ... (II)
3) der Neigungswinkel der Ebenen (G) und (A) an der Kante Oa.

Denn um diesen letzten Winkel zu erhalten, brauchen wir nur O und b mit einem beliebigen Punkte der Linie A (z. B. mit x_1) zu verbinden, so sind die drei ebenen Winkel der Ecke O, nämlich $\angle x_1 Oa$, $\angle x_1 Ob$, $\angle aOb$, bekannt, und es lässt sich daraus der Neigungswinkel der Ebenen (G) und (A) construiren *). Aber aus den 3 Daten (II), nämlich zweien Neigungswinkeln und dem zwischenliegenden ebenen Winkel einer körperlichen Ecke O, lassen sich die andern ebenen Winkel durch Construction finden **). Also

*) Grunert, Lehrb. der Mathem. Theil. II. Stereom. §. 101.
**) Ebendaselbst §. 104.

kann der ebene Winkel aOx, d. h. die Neigung der gesuchten Linie gegen die bekannte Richtung Oa gefunden werden.

Den 17ten Februar 1847.

Eine Bemerkung zu Nr. X. im 1sten Hefte des 9ten Bandes.

Von Herrn M. Füldner, Gymnasiallehrer zu Neu-Strelitz.

Der Herr Herausgeber dieses Archivs macht darauf aufmerksam, dass man, um die Möglichkeit des Obelisken darzuthun, die Aufgabe zu lösen habe: „wenn zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben sind, durch diesen Punkt eine die beiden gegebenen geraden Linien schneidende gerade Linie zu legen.“ Da hiebei der Parallelismus natürlich nicht ausgeschlossen ist, so wäre die Aufgabe wohl präciser so zu stellen: „wenn zwei gerade Linien im Raume und ein in keiner derselben liegender Punkt gegeben sind, durch diesen Punkt eine gerade Linie zu legen, welche mit jeder der gegebenen in einer Ebene liegt.“ Eine ganz elementare synthetische Auflösung ist folgende: Durch den gegebenen Punkt und jede der gegebenen geraden Linie ist eine Ebene bestimmt, welche beide Ebenen sich in einer geraden Linie schneiden müssen, da sie beide durch denselben Punkt gelegt sind. Die Durchschnittslinie ist die verlangte, wie sogleich erhellt. Liegen die beiden gegebenen Linien in derselben Ebene, so ist die Durchschnittslinie entweder mit beiden parallel, wenn sie nämlich selbst parallel sind, oder geht durch den Durchschnittspunkt beider, wenn sie convergent sind, wie dies ja in jedem Lehrbuche der Stereometrie bewiesen wird. Der ebenfalls noch mögliche Fall, dass die beiden gegebenen Linien und der gegebene Punkt in derselben Ebene liegen, wird durch die Natur des Obelisken ausgeschlossen. Aus Obigem erhellt zugleich auch noch, dass die drei Seitenkanten des dreiseitigen Obelisken immer in einen Punkt zusammenlaufen, der dreiseitige Obelisk also immer eine abgekürzte Pyramide ist.

Den 31sten März 1847.

Synthetische Lösung der im Archiv Band IX. Seite 89. gestellten Aufgabe.

Von Herrn Fischer, Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule zu Bayreuth.

Aufgabe. Zwei Gerade und ein Punkt ausser denselben sind gegeben, man soll eine dritte Gerade durch den Punkt legen, welche die ersten beiden Linien schneidet.

Lösung I. Man lege durch jede einzelne Gerade und den Punkt eine Ebene und bestimme die Durchschnittslinie beider Ebenen, so ist diese letzte Linie die gesuchte.

Lösung II. Man lege durch den Punkt und eine Gerade eine Ebene, bestimme den Durchgangspunkt der anderen Geraden durch die Hilfsebene und verbinde den gefundenen Punkt mit dem gegebenen, so hat man die verlangte Gerade.

Besondere Betrachtungen.

Obige Lösung wird auf das Postulat, durch zwei Punkte eine Gerade zu legen, zurückgeführt, wenn die gegebenen Geraden sich schneiden; die Lösung wird unbestimmt, wenn die gegebenen Geraden und der Punkt mit ihnen in einerlei Ebene liegen; sie wird endlich unmöglich

a) wenn die durch eine Gerade und den Punkt gelegte Ebene zur anderen Geraden parallel wird: die gesuchte ist dann parallel zur zweiten gegebenen;

b) wenn die zwei Geraden parallel sind und der gegebene Punkt ausser ihrer Ebene liegt: die gesuchte ist parallel zu beiden gegebnen.

Anmerkung. Die Aufgabe gehört nothwendig in die Elemente der Geometrie und zu einer ganzen Gruppe von Aufgaben, von denen man bisher nur die einzige behandelte: eine Gerade zu finden, welche zu zwei gegebenen (gekreuzten) Geraden senkrecht ist.

Den 31sten Januar 1848.

Anmerkung des Herausgebers. In dem Augenblicke, wo dieses Heft geschlossen wird, geht mir eine ausführliche sehr schöne Abhandlung des Herrn Prof. Dr. Matzka zu Tarnow in Galizien über diesen Gegenstand zu, welche denselben sehr vollständig erledigt; diese Abhandlung wird in einem der nächsten Hefte erscheinen.

Berichtigung.

In Thl. XI. Heft 1. S. 89. Z. 9. v. o. statt

$$N=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{p}}{2}+\sqrt{h+\frac{p}{4}}\right\}$$

muss es heissen:

$$N=\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\sqrt{p}}{2}-\sqrt{h+\frac{p}{4}}\right\}.$$

XXXIII.

Ueber die Auflösung der Gleichungen des dritten Grades.

Von dem
Herausgeber
und dem
Schulamts-Kandidaten Herrn W. Schlesicke
zu Greifswald.

Einleitung.

Der Herausgeber des Archivs, welcher schon in zwei früheren Abhandlungen (Thl. VI. Nr. I. und Nr. LII.) von der Auflösung der cubischen Gleichungen gehandelt hat, kommt in dem vorliegenden Aufsatze noch einmal auf diesen viel besprochenen Gegenstand zurück. Die nächste Veranlassung zu diesem Aufsatze gab die dem Herausgeber von einem seiner liebsten Schüler, dem in der Ueberschrift genannten jetzigen Schulamts-Kandidaten Herrn W. Schlesicke aus Königsberg i. Pr., bei Gelegenheit einer ganz anderen calculatorischen Arbeit, welche die Auflösung cubischer Gleichungen erforderte, gemachte Bemerkung, dass sich durch eine besondere Transformation einer vollständigen cubischen Gleichung sogleich eine quadratische Hülfsgleichung zu deren Auflösung erhalten lasse, ohne vorher das zweite Glied der cubischen Gleichung wegschaffen zu müssen. Es ist also die vorliegende Abhandlung ganz als eine Arbeit von uns beiden zu betrachten, und namentlich rührt die Grundidee allein von Herrn Schlesicke her. Was sonst dem einen oder dem anderen angehört, darüber wollen wir hier nicht in's Einzelne eingehen und am allerwenigsten mit einander rechten, da es bei einem schon so viel und so oft behandelten Gegenstande wohl gewiss nicht unsere Absicht sein kann, uns damit einen gewissen Ruhm zu erwerben, indem wir vielmehr nur wünschen, der Sache zu dienen, und vielleicht ein zweckmässiges Hülfsmittel für den Unterricht in der so wichtigen Lehre von den Gleichungen des dritten Grades den Lehrern darzubieten. Beschwerlich ist übrigens die Wegschaffung des zweiten Gliedes der cubischen Gleichungen, bevor man zu ihrer Auflösung übergehen kann, immer, wie Jeder wissen wird, wer sich viel mit der Auflösung solcher Gleichungen zu beschäftigen Ver-

anlassung gehabt hat; und wenn daher auch freilich die schaffung dieses Gliedes bei unserer folgenden Auflösung lich nur umgangen ist, so dürfte dieselbe doch vielleicht in Beziehung einige Bequemlichkeit vor der gewöhnlichen Auf darbieten, worüber wir das Urtheil den Lesern anheim stell

G.

Die aufzulösende Gleichung des dritten Grades sei

$$1)\quad x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Wenn man in dieser Gleichung

$$2)\quad x=\frac{u^2-\frac{1}{3}au-\frac{1}{3}(b-\frac{1}{3}a^2)}{u}$$

setzt, und zugleich auf beiden Seiten der Gleichung mit u^3 tiplicirt, so erhält man nach einigen leichten Reductione Gleichung

$$3)\quad u^6+(\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c)u^3-\tfrac{1}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3=0,$$

welche, indem man

$$4)\quad v=u^3$$

setzt; ferner zu der Gleichung

$$5)\quad v^2+(\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c)v-\tfrac{1}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3=0$$

führt, so dass also durch diese Substitutionen die Auflösung gegebenen cubischen Gleichung 1) auf die Auflösung der qu tischen Gleichung 5) zurückgeführt ist.

Setzen wir aber der Kürze wegen

$$6)\quad \begin{cases} A=\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c, \\ B=-\tfrac{4}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3; \end{cases}$$

so erhält die quadratische Gleichung 5) die Form

$$7)\quad v^2+Av+\tfrac{1}{4}B=0,$$

und führt, auf bekannte Weise aufgelöst, wenn die beiden W der Quadratwurzel aus A^2-B durch $\pm C$ bezeichnet werden,

$$8)\quad C^2=A^2-B$$

gesetzt wird, zu den beiden Wurzeln:

$$9)\quad v=-\tfrac{1}{2}(A\mp C).$$

Daher haben wir nach 4) zur Bestimmung von u die Gleichu

$$10)\quad u^3 = -\tfrac{1}{2}(A \mp C)$$

der

$$11)\quad u^3 + \tfrac{1}{2}(A \mp C) = 0.$$

Bezeichnen wir eine Wurzel dieser Gleichung durch u_1, so lass also

$$u_1{}^3 + \tfrac{1}{2}(A \mp C) = 0$$

st, und setzen allgemein

$$u^3 + \tfrac{1}{2}(A \mp C) = U;$$

so ergiebt sich durch Subtraction

$$U = u^3 - u_1{}^3 = (u - u_1)(u^2 + u_1 u + u_1{}^2),$$

und die beiden anderen Wurzeln der Gleichung

$$U = u^3 + \tfrac{1}{2}(A \mp C) = 0$$

müssen also durch Auflösung der quadratischen Gleichung

$$u^2 + u_1 u + u_1{}^2 = 0$$

estimmt werden. Dadurch erhält man, wenn die beiden andern esuchten Wurzeln durch u_2, u_3 bezeichnet werden, ohne Schwierigkeit:

$$u_2 = -u_1 \cdot \frac{1 - \sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},\quad u_3 = -u_1 \cdot \frac{1 + \sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2};$$

so dass also die drei Wurzeln der cubischen Gleichung

$$u^3 + \tfrac{1}{2}(A \mp C) = 0$$

setzt

$$12)\quad \begin{cases} u_1 = u_1, \\ u_2 = -u_1 \cdot \dfrac{1 - \sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}, \\ u_3 = -u_1 \cdot \dfrac{1 + \sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} \end{cases}$$

sind.

Bezeichnen wir aber die drei Wurzeln der Gleichung

$$u^3 + \tfrac{1}{2}(A - C) = 0$$

durch $\overset{1}{u}_1$, $\overset{1}{u}_2$, $\overset{1}{u}_3$; die drei Wurzeln der Gleichung

$$u^3 + \tfrac{1}{2}(A + C) = 0$$

durch $\underset{1}{u_1}$, $\underset{1}{u_2}$, $\underset{1}{u_3}$; so ist nach dem Vorhergehenden

Hieraus sieht man, dass, wenn man eine Wurzel der Gleic

$$u^3+\tfrac{1}{2}(A-C)=0$$

in eine Wurzel der Gleichung

$$u^3+\tfrac{1}{2}(A+C)=0$$

multiplicirt, das Product nur

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1},$$

oder

$$-\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}\cdot\frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},$$

oder endlich

$$-\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}\cdot\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}$$

sein kann.

Nun ist entweder

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}=-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

oder es ist nicht

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}=-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).$$

Im letzteren Falle ist nach dem Obigen entweder

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}=\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},$$

oder es ist

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}=\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}.$$

Ist aber

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}=\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},$$

so ist

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}.\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{(1-\sqrt{3}.\sqrt{-1})(1+\sqrt{3}.\sqrt{-}}{2.2}$$

d. i.

$$\overset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}.\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}=\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

also

$$-\overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 . \frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = -\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).$$

Ist dagegen

$$\overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 = \tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},$$

so ist

$$\overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 . \frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = \tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).\frac{(1+\sqrt{3}.\sqrt{-1})(1-\sqrt{3}.\sqrt{-1})}{2.2},$$

d. i.

$$\overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 . \frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = \tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

lso

$$-\overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 . \frac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = -\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).$$

Hält man dies mit dem Obigen zusammen, so ergiebt sich auf anz unzweideutige Weise, dass es immer eine Wurzel der Gleichung

$$u^3+\tfrac{1}{2}(A-C)=0$$

nd eine Wurzel der Gleichung

$$u^3+\tfrac{1}{2}(A+C)=0$$

iebt, deren Product

$$-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2)$$

t.

Lassen wir nun $\overset{1}{u}_1$ und $\underset{1}{u}_1$ die Wurzeln der beiden in Rede ehenden Gleichungen sein, deren Product $-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2)$ ist, so ss also

$$17)\quad \overset{1}{u}_1\underset{1}{u}_1 = -\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2)$$

t, so ist nach dem Obigen, wie leicht erhellet, auch

$$18)\quad \overset{1}{u}_2\underset{1}{u}_3 = -\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

d

$$19)\quad \overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2 = -\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2).$$

ch dem Obigen ist aber allgemein

$$x = \frac{u^2 - \frac{1}{3}au - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)}{u}.$$

Also können wir

$$x = \frac{\overset{1}{u}_1{}^2 - \frac{1}{3}a\overset{1}{u}_1 - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)}{\overset{1}{u}_1}$$

setzen. Dann ist auch

$$x = \frac{\overset{1}{u}_1\underset{1}{u_1}(\overset{1}{u}_1 - \frac{1}{3}a) - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)\underset{1}{u_1}}{\overset{1}{u}_1\underset{1}{u_1}},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$x = \frac{\overset{1}{u}_1\underset{1}{u_1}(\overset{1}{u}_1 - \frac{1}{3}a) + \overset{1}{u}_1\underset{1}{u_1}\underset{1}{u_1}}{\overset{1}{u}_1\underset{1}{u_1}},$$

also

$$x = -\frac{1}{3}a + \overset{1}{u}_1 + \underset{1}{u_1}.$$

Ferner können wir

$$x = \frac{\overset{1}{u}{}^2_2 - \frac{1}{3}a\overset{1}{u}_2 - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)}{\overset{1}{u}_2}$$

setzen. Dann ist auch

$$x = \frac{\overset{1}{u}_2\underset{1}{u_3}(\overset{1}{u}_2 - \frac{1}{3}a) - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)\underset{1}{u_3}}{\overset{1}{u}_2\underset{1}{u_3}},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$x = \frac{\overset{1}{u}_2\underset{1}{u_3}(\overset{1}{u}_2 - \frac{1}{3}a) + \overset{1}{u}_2\underset{1}{u_3}\underset{1}{u_3}}{\overset{1}{u}_2\underset{1}{u_3}},$$

also

$$x = -\frac{1}{3}a + \overset{1}{u}_2 + \underset{1}{u_3}.$$

Endlich können wir auch

$$x = \frac{\overset{1}{u}{}^2_3 - \frac{1}{3}a\overset{1}{u}_3 - \frac{1}{3}(b - \frac{1}{3}a^2)}{\overset{1}{u}_3}$$

setzen. Dann ist auch

$$x=\frac{\overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2(\overset{1}{u}_3-\tfrac{1}{3}a)-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2)\underset{1}{u}_2}{\overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2},$$

d. i. nach dem Vorhergehenden

$$x=\frac{\overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2(\overset{1}{u}_3-\tfrac{1}{3}a)+\overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2\underset{1}{u}_2}{\overset{1}{u}_3\underset{1}{u}_2},$$

also

$$x=-\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_3+\underset{1}{u}_2.$$

Demnach ist:

$$20)\quad x=\begin{cases}-\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_1+\underset{1}{u}_1,\\ -\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_2+\underset{1}{u}_3,\\ -\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_3+\underset{1}{u}_2;\end{cases}$$

also nach dem Obigen:

$$21)\quad x=\begin{cases}-\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_1+\underset{1}{u}_1,\\ -\tfrac{1}{3}a-\overset{1}{u}_1.\dfrac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}-\underset{1}{u}_1.\dfrac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2},\\ -\tfrac{1}{3}a-\overset{1}{u}_1.\dfrac{1+\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}-\underset{1}{u}_1.\dfrac{1-\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2};\end{cases}$$

oder

$$22)\quad x=\begin{cases}-\tfrac{1}{3}a+\overset{1}{u}_1+\underset{1}{u}_1,\\ -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}(\overset{1}{u}_1+\underset{1}{u}_1)+\tfrac{1}{2}(\overset{1}{u}_1-\underset{1}{u}_1)\sqrt{3}.\sqrt{-1},\\ -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}(\overset{1}{u}_1+\underset{1}{u}_1)-\tfrac{1}{2}(\overset{1}{u}_1-\underset{1}{u}_1)\sqrt{3}.\sqrt{-1}.\end{cases}$$

Man muss nun zwei Fälle unterscheiden, jenachdem die Grösse C reell oder imaginär, d. h. nach dem Obigen, jenachdem

$$A^2-B\overset{=}{>}0 \text{ oder } A^2-B<0$$

ist.

Wenn zuerst C reell, d. h.

$$A^2-B\overset{=}{>}0$$

ist, so sollen

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)} \text{ und } \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

die reellen Cubikwurzeln aus den beiden Grössen

$$-\tfrac{1}{2}(A-C) \text{ und } -\tfrac{1}{2}(A+C),$$

d. h. die reellen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$u^3+\tfrac{1}{2}(A-C)=0 \text{ und } u^3+\tfrac{1}{2}(A+C)=0$$

bezeichnen; dann ist

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}.\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}$$
$$=\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(A-C)(A+C)}=\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}(A^2-C^2)}$$
$$=\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}B}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3}=-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

und nach dem Vorhergehenden ist man folglich

$$23)\quad \begin{cases} \overset{1}{u_1}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}, \\ \underset{1}{u_1}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)} \end{cases}$$

zu setzen berechtigt, wo nun $\overset{1}{u_1}$ und $\underset{1}{u_1}$ beide reelle Grössen sind. Also ist nach 22) in diesem Falle:

$$24)\quad x=\begin{cases} -\tfrac{1}{3}a+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}, \\ -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\} \\ \qquad +\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\sqrt{3}.\sqrt{-1}, \\ -\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\} \\ \qquad -\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\sqrt{3}.\sqrt{-1}; \end{cases}$$

welches die drei Wurzeln der gegebenen cubischen Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0$$

sind. Zur Bestimmung der Hülfsgrössen A, B, C hat man nach dem Obigen die Formeln:

$$25)\quad \begin{cases} A=\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c, \\ B=-\tfrac{4}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3, \\ C=\sqrt{A^2-B}. \end{cases}$$

Wenn C nicht verschwindet, d. h. wenn

$$A^2-B>0$$

ist, so sind die zweite und dritte der drei Wurzeln 24) imaginär und ungleich, und die gegebene Gleichung hat also eine reelle und zwei ungleiche imaginäre Wurzeln.

Wenn dagegen C verschwindet, d. h. wenn

$$A^2-B=0$$

ist, so sind die zweite und dritte der Wurzeln 24) reell und gleich, und die gegebene Gleichung hat also drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind, nämlich die Wurzeln

$$26)\quad \begin{cases} -\frac{1}{3}a+2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A}, \\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A}, \\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A}. \end{cases}$$

Wenn ferner C imaginär, d. h.

$$A^2-B<0$$

ist, so ist

$$C=\sqrt{B-A^2}.\sqrt{-1},$$

oder, wenn wir

$$27)\quad D=\sqrt{B-A^2}$$

setzen,

$$C=D\sqrt{-1}.$$

Setzen wir nun

$$28)\quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}D\sqrt{-1}}=m+n\sqrt{-1},$$

wo m und n reelle Grössen sein sollen, so ist

$$-\tfrac{1}{2}A+\tfrac{1}{2}D\sqrt{-1}=(m+n\sqrt{-1})^3$$
$$=m(m^2-3n^2)+n(3m^2-n^2)\sqrt{-1},$$

also

$$29)\quad m(m^2-3n^2)=-\tfrac{1}{2}A,\quad n(3m^2-n^2)=\tfrac{1}{2}D.$$

Folglich ist

$$-\tfrac{1}{2}(A+C)=-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}D\sqrt{-1}=m(m^2-3n^2)-n(3m^2-n^2)\sqrt{-1}$$
$$=m^3-3m^2n\sqrt{-1}-3mn^2+n^3\sqrt{-1}=(m-n\sqrt{-1})^3,$$

und wir sind daher, gleichzeitig mit 28),

$$30)\quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}D\sqrt{-1}}=m-n\sqrt{-1},$$

zu setzen berechtigt, so dass also gleichzeitig, d. h. mit Beziehung der obern und untern Zeichen auf einander,

$$31)\quad \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A\mp C)}=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A\pm\tfrac{1}{2}D\sqrt{-1}}=m\pm n\sqrt{-1}$$

ist.

Also ist

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}\,.\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}=(m+n\sqrt{-1})(m-n\sqrt{-1})=m^2+n^2,$$

und folglich

$$(m^2+n^2)^3=\tfrac{1}{4}(A-C)(A+C)=\tfrac{1}{4}(A^2-C^2)=\tfrac{1}{4}B,$$

d. i. nach dem Obigen

$$(m^2+n^2)^3=-\tfrac{1}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3,$$

also, weil dies eine Gleichung zwischen reellen Grössen ist,

$$m^2+n^2=-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2)\ ^{*}).$$

Folglich ist

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}\,.\,\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}=(m+n\sqrt{-1})(m-n\sqrt{-1})=-\tfrac{1}{3}(b-\tfrac{1}{3}a^2),$$

und

$$m+n\sqrt{-1}\ \text{und}\ m-n\sqrt{-1}$$

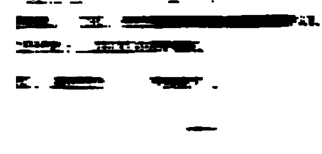
sind daher offenbar zwei Wurzeln der Gleichungen $u^3+\frac{1}{2}(A-C)=0$ und $u^3+\frac{1}{2}(A+C)=0$, deren Product $-\frac{1}{3}(b-\frac{1}{3}a^2)$ ist. Daher ist man nach dem Obigen berechtigt

$$32)\quad \begin{cases} \overset{1}{u}_1=m+n\sqrt{-1}, \\ \underset{1}{u_1}=m-n\sqrt{-1} \end{cases}$$

zu setzen. Führt man aber diese Werthe von $\overset{1}{u}_1$ und $\underset{1}{u_1}$ in die Gleichungen 22) ein, so erhält man nach einigen ganz leichten Reductionen:

---

*) Dass im vorliegenden Falle $B=-\frac{4}{27}(b-\frac{1}{3}a^2)^3$, und daher auch $-\frac{1}{27}(b-\frac{1}{3}a^2)^3$, eine positive Grösse ist, versteht sich nach dem Vorhergehenden von selbst, folgt aber auch augenblicklich aus der Bedingung $A^2-B<0$, welche, wenn B negativ wäre, offenbar nicht erfüllt sein könnte.



$2m,$

$m-n\sqrt{3},$

$-m+n\sqrt{3};$

dass im vorliegenden Falle die
…chen Gleichungen jederzeit alle
…nders bemerkenswerth ist.

…ntwickelung bloss mit Hülfe der
…wesen. Wenn es sich nun aber
… der drei reellen Wurzeln 33) selbst
…lich auf die Bestimmung der bei-
…der Gleichung

$$\sqrt{-1}=m+n\sqrt{-1}$$

…gebra nicht mehr ausreicht, sondern
…stande der Mathematik die Goniome-
…t.

…an zuvörderst

$$-1=\varrho(\cos\varphi+\sin\varphi\sqrt{-1}),$$

…se sein soll; so hat man zur Bestimmung
…n Gleichungen

$$\cos\varphi=-\tfrac{1}{2}A,\quad \varrho\sin\varphi=\tfrac{1}{2}D;$$

…n man diese Gleichungen quadrirt und dann

$$\varrho^2=\tfrac{1}{4}(A^2+D^2),$$

…v sein soll,

$$35)\quad \varrho=\tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+D^2}$$

…an mittelst dieser Formel ϱ gefunden, so ergiebt
…der Gleichungen

$$36)\quad \cos\varphi=-\frac{A}{2\varrho},\quad \sin\varphi=\frac{D}{2\varrho}.$$

…beiden Gleichungen, d. h. den beiden Gleichungen 34),
…genügt werden muss, so muss man bei der Bestimmung
…folgenden Regeln beachten:

…n die Grössen

$$A,\ D$$

…ive

$$x=\begin{cases}-\frac{1}{3}a+2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A},\\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A},\\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A};\end{cases}$$

und sind sämmtlich reell.

Wenn

$$A^2-B<0$$

ist, so setze man

$$D=\sqrt{B-A^2},$$

und berechne den Winkel φ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{D}{A},$$

indem man beachtet, dass, wenn die Grössen

$$A,\ D$$

respective

positiv, positiv;
positiv, negativ;
negativ, positiv;
negativ, negativ

sind, der Winkel φ so genommen werden muss, dass resp

$$90^0<\varphi<180^0,$$
$$180^0<\varphi<270^0,$$
$$0<\varphi<90^0,$$
$$270^0<\varphi<360^0$$

ist. Dann berechne man ϱ mittelst einer der beiden Formeln

$$\varrho=-\frac{A}{2\cos\varphi}=\frac{D}{2\sin\varphi}$$

und die Grössen m, n mittelst der Formeln

$$m=\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$n=\varrho^{\frac{1}{3}}\sin\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Hierauf ergeben sich die drei reellen Wurzeln, welche die bene Gleichung in diesem Falle jederzeit hat, mittelst der For

$$x=\begin{cases}-\frac{1}{3}a+2m,\\ -\frac{1}{3}a-m-n\sqrt{3},\\ -\frac{1}{3}a-m+n\sqrt{3}.\end{cases}$$

die gegebene cubische Gleichung folglich als aufgelöst zu betrachten ist.

Zum Schluss dieses Aufsatzes wollen wir nun noch die ganze Auflösung der cubischen Gleichungen, wie sie sich aus dem Obigen ergiebt, im Folgenden zusammenstellen.

Die aufzulösende cubische Gleichung sei die vollständige Gleichung

$$x^3+ax^2+bx+c=0.$$

Man berechne zuerst die beiden Hülfsgrössen

$$A=\tfrac{2}{27}a^3-\tfrac{1}{3}ab+c,$$
$$B=-\tfrac{4}{27}(b-\tfrac{1}{3}a^2)^3$$

aus den Coefficienten der aufzulösenden Gleichung, und daraus ferner die Grösse

$$A^2-B.$$

Wenn dann

$$A^2-B \geqq 0$$

ist, so setze man

$$C=\sqrt{A^2-B},$$

und die drei Wurzeln der aufzulösenden Gleichung sind dann, wenn

$$\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)} \text{ und } \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}$$

die reellen Cubikwurzeln aus

$$-\tfrac{1}{2}(A-C) \text{ und } -\tfrac{1}{2}(A+C)$$

bezeichnen:

$$x=\left\{\begin{array}{l}
-\tfrac{1}{3}a+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)},\\
-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\\
\qquad+\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\sqrt{3}.\sqrt{-1},\\
-\tfrac{1}{3}a-\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\\
\qquad-\tfrac{1}{2}\{\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A-C)}-\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}(A+C)}\}\sqrt{3}.\sqrt{-1}.
\end{array}\right.$$

Für

$$A^2-B=0$$

werden diese drei Wurzeln:

die der Kurve, auf der sich der gesehene Punkt bewegt und

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

die Gleichung der Oberfläche, auf der die scheinbaren Orte angegeben werden sollen.

Sei ferner t die von einem bestimmten Anfange an bis zu irgend einem beliebigen Zeitpunkte verflossene Zeit, und

$$x = \varphi(t), \quad x = \varphi_1(t) \tag{4}$$

seien die Funktionen der Zeit, welche die Werthe der Abscissen der Kurven (1) und (2) ausdrücken, so werden auch die Ordinaten y und z der beiden Kurven als Funktionen der Zeit gegeben sein, wenn man für x seinen Werth als Funktion von t setzt.

Man findet also für die Kurve (1):

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \delta(t)$$
$$\text{wenn } \psi(t) = f(\varphi(t)), \; \delta(t) = F(\varphi(t)); \tag{5}$$

für die (2):

$$x = \varphi_1(t), \; y = \psi_1(t), \; z = \delta_1(t)$$
$$\text{wenn } \psi_1(t) = f_1(\varphi_1(t)), \; \delta_1(t) = F_1(\varphi_1(t)). \tag{6}$$

Die Gerade, die durch diese Punkte geht, hat zu Gleichungen:

$$x - \varphi(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)} (z - \delta(t)),$$

$$y - \psi(t) = \frac{\psi_1(t) - \psi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)} (z - \delta(t))$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} (x - \varphi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) = (z - \delta(t))(\varphi_1(t) - \varphi(t)), \\ (y - \psi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) = (z - \delta(t))(\psi_1(t) - \psi(t)). \end{array} \right\} \tag{7}$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen die Grösse t, so findet man eine Gleichung

$$\mathfrak{F}_1(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

welche die Gleichung der durch alle diese Linien gebildeten Oberfläche ist. Die Durchschnittskurve der durch (8) und der durch (3) ausgedrückten Fläche ist die gesuchte Kurve des scheinbaren Ortes. Gehen wir zu Anwendungen über.

1) Ein Auge bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit a horizontal, während ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit von einer Höhe h herunter fällt. Man soll den scheinbaren Ort dieses fallenden Körpers auf einer vertikalen, der Richtung des Auges parallelen Ebene bestimmen, welche von dieser Linie um die Grösse k entfernt ist.

Diese Auflösung der cubischen Gleichungen dürfte sich namentlich dadurch empfehlen, dass sie wenigstens eine directe Wegschaffung des zweiten Gliedes der aufzulösenden Gleichung nicht erfordert, und in allen Fällen alle drei Wurzeln derselben in völlig entwickelten Ausdrücken, die auch für die numerische Rechnung, wie es uns scheint, hinreichende Bequemlichkeit darbieten, liefert. Wir glauben daher diese Auflösung einiger Beachtung der Leser wohl empfehlen zu dürfen.

XXXIV.

Ueber die Bestimmung des scheinbaren Ortes.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Die allgemeine Aufgabe lautet:

„Ein sehender Punkt bewegt sich nach irgend einem gegebenen Gesetze auf einer Kurve und sieht einen andern Punkt, der sich nach einem gleichfalls bekannten Gesetze auf einer Kurve bewegt; man verlangt die Kurve zu kennen, welche der letzte Punkt auf einer gegebenen Oberfläche zu beschreiben scheint."

Dieses Problem kommt offenbar auf folgendes zurück:

„Man denke sich durch irgend eine Lage des sehenden Punktes nach der ihr entsprechenden des gesehenen eine gerade Linie gezogen, suche die Oberfläche, welche durch alle solche gerade Linien gebildet wird, und bestimme dann den Durchschnitt dieser Oberfläche mit der gegebenen, so ist die Durchschnittskurve der scheinbare Ort des gesehenen Punktes."

Um diess nun zu bewerkstelligen, seien

$$y=f(x),\quad z=F(x) \tag{1}$$

die Gleichungen der Kurve, auf der sich der sehende Punkt bewegt;

$$y=f_1(x),\quad z=F_1(x) \tag{2}$$

die der Kurve, auf der sich der gesehene Punkt bewegt und

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = 0 \tag{3}$$

die Gleichung der Oberfläche, auf der die scheinbaren Orte angegeben werden sollen.

Sei ferner t die von einem bestimmten Anfange an bis zu irgend einem beliebigen Zeitpunkte verflossene Zeit, und

$$x = \varphi(t), \quad x = \varphi_1(t) \tag{4}$$

seien die Funktionen der Zeit, welche die Werthe der Abscissen der Kurven (1) und (2) ausdrücken, so werden auch die Ordinaten y und z der beiden Kurven als Funktionen der Zeit gegeben sein, wenn man für x seinen Werth als Funktion von t setzt.

Man findet also für die Kurve (1):

$$x = \varphi(t), \; y = \psi(t), \; z = \delta(t)$$
$$\text{wenn } \psi(t) = f(\varphi(t)), \; \delta(t) = F(\varphi(t)); \tag{5}$$

für die (2):

$$x = \varphi_1(t), \; y = \psi_1(t), \; z = \delta_1(t)$$
$$\text{wenn } \psi_1(t) = f_1(\varphi_1(t)), \; \delta_1(t) = F_1(\varphi_1(t)). \tag{6}$$

Die Gerade, die durch diese Punkte geht, hat zu Gleichungen:

$$x - \varphi(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)} (z - \delta(t)),$$

$$y - \psi(t) = \frac{\psi_1(t) - \psi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)} (z - \delta(t))$$

oder

$$\left. \begin{aligned} (x - \varphi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) &= (z - \delta(t))(\varphi_1(t) - \varphi(t)), \\ (y - \psi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) &= (z - \delta(t))(\psi_1(t) - \psi(t)). \end{aligned} \right\} \tag{7}$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen die Grösse t, so findet man eine Gleichung

$$\mathfrak{F}_1(x, y, z) = 0, \tag{8}$$

welche die Gleichung der durch alle diese Linien gebildeten Oberfläche ist. Die Durchschnittskurve der durch (8) und der durch (3) ausgedrückten Fläche ist die gesuchte Kurve des scheinbaren Ortes. Gehen wir zu Anwendungen über.

1) Ein Auge bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit a horizontal, während ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit von einer Höhe h herunter fällt. Man soll den scheinbaren Ort dieses fallenden Körpers auf einer vertikalen, der Richtung des Auges parallelen Ebene bestimmen, welche von dieser Linie um die Grösse k entfernt ist.

Man nehme an, es fangen das Auge und der Körper ihre Bewegungen zu gleicher Zeit an; der Ausgangspunkt des Auges sei Anfangspunkt der Koordinaten, die Richtung desselben Axe der x, die Axe der z vertikal und die positive Axe der y gegen die gegebene Ebene gewendet. Die Gleichungen (5) sind also hier

$$x = at,\ y = 0,\ z = 0;$$

die (6) dagegen

$$x = b,\ y = c,\ z = h - \frac{gt^2}{2};$$

wenn b und c die horizontalen Koordinaten des Fusspunktes der Linie sind, welche der fallende Körper beschreibt. Demnach

$$\varphi(t) = at,\ \psi(t) = 0,\ \delta(t) = 0;\ \varphi_1(t) = b,\ \psi_1(t) = c,\ \delta_1(t) = h - \frac{gt^2}{2};$$

worin g die Beschleunigung durch die Schwerkraft bezeichnet.

Die Gleichungen (7) werden also zu:

$$(x - at)\left(h - \frac{gt^2}{2}\right) = z(b - at),$$

$$y\left(h - \frac{gt^2}{2}\right) = zc;$$

woraus

$$2a^2(hy - cz)(c - y)^2 - gy(cx - by)^2 = 0$$

für die Gleichung (8) erfolgt.

Die Gleichung (3) ist hier

$$y = k;$$

Demnach erhält man als Gleichung des scheinbaren Ortes:

$$2a^2(hk - cz)(c - k)^2 - gk(cx - bk)^2 = 0,$$

welche Gleichung eine der wirklichen Kurve identische Kurve ausdrückt, die mit ihr in der Entfernung k parallel gezogen ist.

Setzt man statt $x : x + \frac{bk}{c}$, statt $z : z + \frac{hk}{c}$, so wird diese Gleichung zu

$$2a^2(c - k)^2 cz + gkc^2x^2 = 0,$$

$$x^2 = -\frac{2a^2(c - k)^2}{gkc} z.$$

Demnach ist die Kurve des scheinbaren Ortes eine Parabel, deren Scheitel zu Koordinaten hat:

$$x=\frac{bk}{c},\ y=k,\ z=\frac{hk}{c}$$

und deren Parameter $-\dfrac{2a^2(c-k)^2}{gkc}$ ist. Die Axe derselben ist parallel der Axe der z.

Hieraus ergeben sich einige merkwürdige Folgerungen. Wäre nämlich $k=c$, so fände man, dass der Körper eine gerade, senkrechte Linie zu durchlaufen scheine, was sich von selbst versteht, da er alsdann seine wirkliche Bahn zu durchlaufen scheint und durchläuft. Im Anfange der Bewegung ist der Körper scheinbar in dem Punkte, dessen Koordinaten:

$$x=\frac{bk}{c},\ y=k,\ z=\frac{hk}{c};$$

d. h. im Scheitel der Parabel. Am Ende der Zeit t dagegen ist der Körper in dem Punkte, dessen Koordinaten:

$$x=\frac{kb+(c-k)at}{c},\ y=k,\ z=\frac{k(2k-gt^2)}{2c}.$$

Nimmt man dagegen den Scheitel der Parabel (in der Ebene der xz) zum Anfangspunkt der Koordinaten, so sind die Koordinaten dieser zwei Punkte:

$$x=0,\ y=k,\ z=0;$$

$$x=\frac{(c-k)at}{c},\ y=k,\ z=-\frac{gkt^2}{2c}.$$

Demnach scheint der Körper in der Zeit t (von Anfang an) die Länge:

$$\frac{t}{2c}\sqrt{g^2k^2t^2+a^2(c-k)^2}-\frac{a^2(c-k)^2}{2gkc}\log\left\{\frac{\sqrt{g^2k^2t^2+a^2(c-k)^2}-gk\ldots}{\sqrt{g^2k^2t^2+a^2(c-k)^2}+gk\ldots}\right.$$

zu durchlaufen, während das Auge die Länge at durchläuft.

2) Ein Punkt bewegt sich horizontal mit gleichförmiger Geschwindigkeit a in einer geraden Linie, während ein Auge sich in einem ebenfalls horizontalen Kreise mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit b bewegt. Welches ist die Kurve des scheinbaren Ortes auf einer Ebene, die parallel ist mit der Richtung des gesehenen Punktes, vertikal steht und von dem Mittelpunkte des Kreises um die Grösse k entfernt ist?

Es sei r der Halbmesser des Kreises, seine Ebene die der xy, sein Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten, die Axe der z nach oben gerichtet. Sei ferner die Gleichung der vom gesehenen Punkte beschriebenen geraden Linie:

$$y=c,\ z=d;$$

indem wir die Axe der x ihr parallel annehmen und deren p…

tiven Theil nach der Richtung der Bewegung hin gehen lassen; dessgleichen sei der positive Theil der Axe der y gegen dieselbe gerichtet. Endlich sei

$$y=f$$

die Gleichung der erwähnten Vertikalebene.

Es sei im Anfange der Bewegung das Auge in der positiven Axe der y, der gesehene Punkt in einer Stelle, deren Abscisse $x=k$ sei, so ist für diesen Fall:

$$x=r\sin(bt),\ y=r\cos(bt),\ z=0$$

für den sehenden Punkt, d. h.

$$\varphi(t)=r\sin(bt),\ \psi(t)=r\cos(bt),\ \delta(t)=0;$$

dessgleichen

$$\varphi_1(t)=k+at,\ \psi_1(t)=c,\ \delta_1(t)=d.$$

Die Gleichungen (7) werden also:

$$(x-r\sin(bt))d=z(k+at-r\sin(bt)),$$
$$(y-r\cos(bt))d=z(c-r\cos(bt)).$$

Diese zwei Gleichungen mit der Gleichung

$$y=f$$

bestimmen vollständig die gesuchte Kurve.

Wir wollen sie nur für den Fall ableiten, dass $a=0$, d. h. der gesehene Punkt in Ruhe sei. Alsdann findet sich:

$$r^2(z-d)^2=(zk-dx)^2+(cz-df)^2$$

als Gleichung der Projektion der gesuchten Kurve auf die Ebene der xz, welche Projektion aber der Kurve selbst identisch ist. Die gesuchte Kurve ist somit vom zweiten Grade. Sie ist

α) eine Ellipse, wenn $r<c$;
β) eine Parabel, „ $r=c$;
γ) eine Hyperbel, „ $r>c$.

Diese Andeutungen mögen genügen.

XXXV.

Ein neues Verfahren, ohne Wink Messinstrumente, fast ohne alle Ken nisse in der Geometrie, und nur mit ringem Gebrauch der Messkette s zerschnittene Fluren genau und sch aufzunehmen und zu cartiren; also viele Landwirthe und andere geeig die die Geometrie nur nebensächl betrieben haben; jedoch auch in vie Fällen für Feldmesser von Profess anscheinend vorzugsweise brauchb

Von dem
Herrn Vermessungs-Revisor Nernst
zu Bessin auf der Insel Rügen.

Es sind bisher noch wohl keine Absteckstäbe, Messflag oder dergleichen vorgeschlagen worden, womit man viele im Fr auf einmal damit bezeichnete Punkte in einiger Entfernung auf ungefähr 600 Schritte) sicher und genau von einander un scheiden, und darnach diese Punkte leicht benennen könnte. P tisch am brauchbarsten dürften solche Messflaggen wie Taf. Fig. 1. einzurichten sein. Die offenen Endflächen des Cylin *aa*, etwa 1 Fuss im Durchmesser, werden durch gewöhnl kleine Tonnenbänder, der Mantel des Cylinders durch versc denfarbiges Zeug gebildet. Man nehme schwarzes, rothes weisses Zeug, Farben, die allenthalben ächt zu haben sind, wichtig ist, Regen und Sonnenschein widerstehend, und die in der Ferne am besten zu unterscheiden sind. Mit diesen Farben kann man, in der Ferne deutlich unterscheidbar, 21 schiedene solche Cylinderflaggen herstellen. Nämlich, indem den Farben nur die Anfangsbuchstaben hergesetzt werden:

s.	s. r.	s. r. w.	s. r. s.
r.	s. w.	s. w. r.	s. w. s.
w.	r. s.	r. s. w.	r. s. r.
	r. w.	r. w. s.	r. w. r.
	w. s.	w. s. r.	w. s. w.
	w. r.	w. r. s.	w. r. w.

Die Streifen dürfen natürlich nur horizontal gehen, da die Cylinderflaggen sonst nicht von allen Seiten gleich aussehen würden. Mehr als drei Streifen zu nehmen ist nicht rathsam, da dann Undeutlichkeit entstehen könnte. Glaubt man mehr als 21 zu gebrauchen, was indessen nicht so oft vorkommen mögte, so muss man lieber eine neue Farbe hinzu nehmen. Gelb oder hellblau würde am besten sein; indessen sieht in der Ferne das Gelbe leicht weiss, das Hellblaue schwarz aus. Die Streifen brauchen nicht breiter als 1′ zu sein. Man muss nothwendig in so fern eine feste Ordnung beibehalten, dass man immer von oben an die Flaggen benennt. Die Flaggen selbst sind, ein für allemal, oben mit Bändern zum Anhängen versehen, da sonst beim Abwehen z. B. r. w. s. statt s. w. r. unrichtig wieder angehängt werden könnte. Viele Verrichtungen, so auch diese, gelingen nur, wenn man keine, auch nicht die unscheinbarste, Vorsichtsmassregel ausser Acht lässt.

(Es erhellet, dass diese Cylinderflaggen auch beim Messen des Details mit dem Messtisch von wesentlichem Nutzen sein würden.)

Zu diesen Flaggen kann man grösstentheils kleine leichte, natürlich aber nur gerade Stangen nehmen. Ausserdem gebraucht man mehrere bedeutend grössere Stangen, etwa mit Stroh kenntlicher gemacht. Man errichte mit drei Strohstangen (Taf. VII. Fig. 2.) in oder um einer aufzunehmenden Flur zunächst ein nur ganz ungefähr gleichseitiges Dreieck *ABC*. Mit den Cylinderflaggen bezeichne man innerhalb des Dreiecks alle bemerkenswerthen Punkte in den Grenzen und landwirthschaftlichen Conturen, in ganz beliebiger Reihenfolge, so dass diese Conturen von einer Flagge zur andern als gerade anzunehmen sind; während man dabei zugleich, nach und nach, in einer dabei entstehenden ganz ungefähren Handzeichnung, etwa wie in Taf. VII. Fig. 3., bemerkt, in welchen Punkten und Conturen man jede einzelne Flagge senkrecht errichtet hat. Es erfordert diese Handzeichnung nicht etwa Fertigkeit, oder geometrische, sondern nur moralische Genauigkeit, dass die notirten Farben nicht verwechselt werden können.

Man messe hierauf die drei Seiten des Dreiecks *ABC*. Während man hierbei von *B* nach *C* sich bewegt, werden die sämmtlichen Flaggenstangen, die man im Dreieck *ABC* ausgesteckt hat, nach und nach, aber wahrscheinlich ausser der Reihe, mit der Strohstange *A* in eine gerade Linie kommen. Wo dies geschieht, wird die jedesmalige Entfernung, immer von *B* ab gemessen,

$$x = \begin{cases} -\tfrac{1}{3}a + 2\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A}, \\ -\tfrac{1}{3}a - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A}, \\ -\tfrac{1}{3}a - \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}A}; \end{cases}$$

und sind sämmtlich reell.

Wenn

$$A^2 - B < 0$$

ist, so setze man

$$D = \sqrt{B - A^2},$$

und berechne den Winkel φ mittelst der Formel

$$\tang \varphi = -\frac{D}{A},$$

indem man beachtet, dass, wenn die Grössen

$$A,\ D$$

respective

positiv, positiv;
positiv, negativ;
negativ, positiv;
negativ, negativ

sind, der Winkel φ so genommen werden muss, dass resp

$$\begin{aligned} 90^0 &< \varphi < 180^0, \\ 180^0 &< \varphi < 270^0, \\ 0 &< \varphi < 90^0, \\ 270^0 &< \varphi < 360^0 \end{aligned}$$

ist. Dann berechne man ϱ mittelst einer der beiden Formeln

$$\varrho = -\frac{A}{2\cos\varphi} = \frac{D}{2\sin\varphi}$$

und die Grössen m, n mittelst der Formeln

$$m = \varrho^{\frac{1}{3}} \cos \tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$n = \varrho^{\frac{1}{3}} \sin \tfrac{1}{3}\varphi.$$

Hierauf ergeben sich die drei reellen Wurzeln, welche die bene Gleichung in diesem Falle jederzeit hat, mittelst der For

$$x = \begin{cases} -\tfrac{1}{3}a + 2m, \\ -\tfrac{1}{3}a - m - n\sqrt{3}, \\ -\tfrac{1}{3}a - m + n\sqrt{3}. \end{cases}$$

Das Detail ist aber oft so ausnehmend verwickelt, dass bei einer rein mechanischen Methode die Wahrscheinlichkeit des Irrens die geringere sein dürfte; bei der obigen ist man aber auch der wunderlichsten Figuren immer vollkommen Herr.

Wenn oben angegeben wurde, dass auch Feldmesser von Fach sich dieser Methode mit Vortheil bedienen könnten, so ist es dann, wenn nach irgend einer Methode das Netz über eine Flur gelegt und das Detail nur einigermassen verwickelt ist. Wären die Dreiecke des Netzes zu gross für diese Methode, so können sie erst durch drei in den Dreiecksseiten errichtete Strohstangen leicht entsprechend in vier Dreiecke zerlegt und dann ganz wie oben angegeben verfahren werden.

XXXVI.

Beweis des obersten Grundsatzes der Methode der kleinsten Quadrate.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

1.

Die Methode der kleinsten Quadrate gründet sich bekannter Maassen auf die als Grundsatz hingestellte Annahme, dass aus mehreren, für eine zu suchende Grösse durch gleich genaue Beobachtungen gefundenen Werthen der wahrscheinlichste Werth dieser Grösse dem arithmetischen Mittel dieser Beobachtungswerthe gleich sei. Da sich nicht läugnen lässt, dass in dieser Voraussetzung etwas Willkürliches liege, indem es ja der Mittel aus mehreren Grössen, also auch ihrer Berechnungsweisen, unzähligerlei gibt; so bleibt eine gründliche und allgemeine Rechtfertigung dieses obersten Princips einer so höchst folgenreichen und nützlichen Doctrin gewiss wünschenswerth. Ich hoffe, die hier mitgetheilte sei mir geglückt und der Beachtung der Mathematiker nicht unwürdig.

2.

Für eine zu bestimmende Grösse, welche x heissen mag, habe man durch Beobachtungen die Werthe a, b, c,.... gefun-

$$x=\begin{cases}-\frac{1}{3}a+2\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A},\\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A},\\ -\frac{1}{3}a-\sqrt[3]{-\frac{1}{2}A};\end{cases}$$

und sind sämmtlich reell.

Wenn

$$A^2-B<0$$

ist, so setze man

$$D=\sqrt{B-A^2},$$

und berechne den Winkel φ mittelst der Formel

$$\operatorname{tang}\varphi=-\frac{D}{A},$$

indem man beachtet, dass, wenn die Grössen

$$A,\ D$$

respective

positiv, positiv;
positiv, negativ;
negativ, positiv;
negativ, negativ

sind, der Winkel φ so genommen werden muss, dass resp

$$90^0<\varphi<180^0,$$
$$180^0<\varphi<270^0,$$
$$0<\varphi<90^0,$$
$$270^0<\varphi<360^0$$

ist. Dann berechne man ϱ mittelst einer der beiden Formel

$$\varrho=-\frac{A}{2\cos\varphi}=\frac{D}{2\sin\varphi}$$

und die Grössen m, n mittelst der Formeln

$$m=\varrho^{\frac{1}{3}}\cos\tfrac{1}{3}\varphi,$$
$$n=\varrho^{\frac{1}{3}}\sin\tfrac{1}{3}\varphi.$$

Hierauf ergeben sich die drei reellen Wurzeln, welche die bene Gleichung in diesem Falle jederzeit hat, mittelst der Fo

$$x=\begin{cases}-\frac{1}{3}a+2m,\\ -\frac{1}{3}a-m-n\sqrt{3},\\ -\frac{1}{3}a-m+n\sqrt{3}.\end{cases}$$

$$x-m=f(a-m,\, b-m,\, c-m, \dots)$$

berechnet werden.

3.

Der Unterschied der beiden letzten Gleichungen gibt die Gleichung

$$f(a,b,c,\dots)-f(a-m,\, b-m,\, c-m,\dots)=m,$$

welche für alle Werthe von m, a, b, c,.... gelten muss.

Zur Entwickelung des Subtrahends benutzen wir Folgendes. Nimmt man von einer nach mehreren von einander unabhängigen Veränderlichen u, v, w,.... sich richtenden Function $f(u, v, w,\dots)$ ihre partiellen Differentialquotienten, und bezeichnet man diese Kürze halber nur durch $\varphi(u)$, $\chi(v)$, $\psi(w)$,....; so gibt bekanntlich der erweiterte Taylorsche Lehrsatz das Entwickelungsgesetz

$$f(u+\Delta u,\, v+\Delta v,\, w+\Delta w,\dots)=f(u,v,w,\dots)$$
$$+\varphi(u+\zeta\Delta u)\,\Delta u+\chi(v+\eta\Delta v)\,\Delta v+\psi(w+\vartheta\Delta w)\,\Delta w+\dots$$

wo ζ, η, ϑ,.... absolute Zahlen zwischen 0 und 1 sind.

Setzt man demnach $u=a$, $v=b$, $w=c$,...., $\Delta u=\Delta v=\Delta w=\dots=-m$, so verwandelt sich obige Gleichung in

$$[\varphi(a-\zeta m)+\chi(b-\eta m)+\psi(c-\vartheta m)+\dots]\,m=m;$$

daher auch noch, weil m jede Grösse annehmen kann, in

$$\varphi(a-\zeta m)+\chi(b-\eta m)+\psi(c-\vartheta m)+\dots=1.$$

Diese Functionalgleichung soll aber für jeden Betrag der von einander ganz unabhängigen Grössen m, a, b, c,.... bestehen; das vermag sie jedoch (wie man sich leicht überzeugt, wenn man von den Grössen a, b, c,.... eine allein abändert) bloss dann, wenn jeder Summand unveränderlich ist, folglich die Functionen φ, χ, ψ,.... gewisse von m, a, b, c,.... ganz unabhängige Constanten p, q, r,.... sind, nemlich wenn

$$\varphi(u)=\frac{df}{du}=p,\quad \chi(v)=\frac{df}{dv}=q,\quad \psi(w)=\frac{df}{dw}=r,\dots$$

ist. Dann ist

$$p+q+r+\dots=1.$$

Demnach lässt sich nun leicht die Form der Function f bestimmen. Denn weil

$$df=\frac{df}{du}du+\frac{df}{dv}dv+\frac{df}{dw}dw+\dots,$$

also auch

die der Kurve, auf der sich der gesehene Punkt bewegt und

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = 0 \qquad (3)$$

die Gleichung der Oberfläche, auf der die scheinbaren Orte angegeben werden sollen.

Sei ferner t die von einem bestimmten Anfange an bis zu irgend einem beliebigen Zeitpunkte verflossene Zeit, und

$$x = \varphi(t), \quad x = \varphi_1(t) \qquad (4)$$

seien die Funktionen der Zeit, welche die Werthe der Abscissen der Kurven (1) und (2) ausdrücken, so werden auch die Ordinaten y und z der beiden Kurven als Funktionen der Zeit gegeben sein, wenn man für x seinen Werth als Funktion von t setzt.

Man findet also für die Kurve (1):

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \delta(t)$$
$$\text{wenn } \psi(t) = f(\varphi(t)), \quad \delta(t) = F(\varphi(t)); \qquad (5)$$

für die (2):

$$x = \varphi_1(t), \quad y = \psi_1(t), \quad z = \delta_1(t)$$
$$\text{wenn } \psi_1(t) = f_1(\varphi_1(t)), \quad \delta_1(t) = F_1(\varphi_1(t)). \qquad (6)$$

Die Gerade, die durch diese Punkte geht, hat zu Gleichungen:

$$x - \varphi(t) = \frac{\varphi_1(t) - \varphi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)}(z - \delta(t)),$$

$$y - \psi(t) = \frac{\psi_1(t) - \psi(t)}{\delta_1(t) - \delta(t)}(z - \delta(t))$$

oder

$$\left.\begin{aligned}(x - \varphi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) &= (z - \delta(t))(\varphi_1(t) - \varphi(t)),\\ (y - \psi(t))(\delta_1(t) - \delta(t)) &= (z - \delta(t))(\psi_1(t) - \psi(t)).\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Eliminirt man zwischen diesen beiden Gleichungen die Grösse t, so findet man eine Gleichung

$$\mathfrak{F}_1(x, y, z) = 0, \qquad (8)$$

welche die Gleichung der durch alle diese Linien gebildeten Oberfläche ist. Die Durchschnittskurve der durch (8) und der durch (3) ausgedrückten Fläche ist die gesuchte Kurve des scheinbaren Ortes. Gehen wir zu Anwendungen über.

1) Ein Auge bewegt sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit a horizontal, während ein Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit von einer Höhe h herunter fällt. Man soll den scheinbaren Ort dieses fallenden Körpers auf einer vertikalen, der Richtung des Auges parallelen Ebene bestimmen, welche von dieser Linie um die Grösse k entfernt ist.

$$=\frac{pa+qb+rc+....=x}{ha+ib+kc+.....}.$$

Dann folgt hieraus ebenfalls

$$x=\frac{ha+ib+kc+....}{h+i+k+....}.$$

Dabei leuchtet zugleich ein, dass die Zahlen h, i, k,.... nicht mehr wie die früheren p, q, r,.... mit ihren eigentlichen Beträgen, sondern nur mit ihren gegenseitigen Verhältnissen in Rechnung zu bringen sind; folglich jedes System solcher Zahlen durch jedes andere ihnen proportionaler Zahlen ersetzt werden kann.

4.

Nachdem wir nun die allgemeine Form des Rechnungsausdruckes von x gefunden haben, benutzen wir zur näheren Erforschung der Hilfs-Verhältnisszahlen h, i, k,.... den folgenden Satz:

II. Die durch Beobachtungen zu bestimmende Grösse x ist ein *Mittel* der für sie gefundenen Beobachtungswerthe a, b, c,....; wenn anders bei der Auffindung dieser Werthe lediglich der Zufall insofern wirksam gewesen war, als diese im Vergleich gegen die gesuchte Grösse nicht durchgängig zu gross oder zu klein sich ergeben haben.

Denn sind die beobachteten Werthe a, b, c,.... von x — wie man jederzeit voraussetzt — in so weit zufällig gefunden worden, dass man keinerlei vorwiegenden Grund hat, sämmtliche diese Werthe zu gross oder zu klein anzunehmen; so muss man zugestehen, dass einige derselben zu gross, andere hingegen zu klein sich ergeben haben, und dass sohin die gesuchte Grösse ein Mittel ihrer Beobachtungswerthe ist.

Nun ist der die Berechnung von x leitende Quotient bekanntlich dann gewiss ein Mittel der Grössen a, b, c,...., namentlich ein sogenanntes arithmetisches, wenn die multiplicativen Verhältnisszahlen h, i, k,.... insgesammt in einerlei Aggregations-Beziehung vorkommen, also einstimmig oder kurzweg durchaus positiv sind; wogegen es zweifelhaft bleibt, wenn sie ungleichstimmig sind. Mithin müssen gesammte anzunehmenden Multiplicatoren h, i, k,.... der Beobachtungswerthe a, b, c,.... positiv sein;

oder: die durch Beobachtungen zu suchende Grösse ist (irgend) *ein arithmetisches Mittel* der für sie aufgefundenen Beobachtungswerthe.

5.

Bis jetzt haben wir erwiesen, dass die wahre zu suchende Grösse x ein arithmetisches Mittel ihrer Beobachtungswerthe ist, wofern nur zu jedem solchen Werthe der passliche Multiplicator

bekannt ist. Allein es gibt kein Mittel, die ganz richtigen multiplicativen Verhältnisszahlen aufzufinden, daher auch keine Versicherung, dass man die wahre Unbekannte selbst gefunden habe; mithin kann man nur erwarten, aus den Beobachtungswerthen für diese Unbekannte einen solchen Werth aufzufinden, der sich von ihr möglichst wenig unterscheidet, und für sich den höchsten Grad der Wahrscheinlichkeit hat, und darum auch der wahrscheinlichste Werth dieser Unbekannten genannt wird.

Auch dieser wahrscheinlichste Werth der gesuchten Grösse muss ein arithmetisches Mittel der Beobachtungswerthe sein, welche hier nur andere Multiplicatoren erhalten müssen, die jedoch von den früheren desto weniger unterschieden sein werden, je weniger dieser wahrscheinlichste Werth von der wahren Unbekannten selbst verschieden ausfällt.

Denn 1. kann zufällig mit der gesuchten Grösse selbst ihr wahrscheinlichster Werth übereinfallen, wenn nemlich das Zuklein der Beobachtungswerthe mit ihrem Zugross in der Zusammenfassung sich gegenseitig aufhebt.

2. Je grösser die Anzahl der Beobachtungen ist, desto öfter muss die zu suchende Grösse selbst theils völlig genau, theils höchst nahe beobachtet werden, und desto öfter ein Zugross mit einem gleichen Zuklein der Beobachtungswerthe sich ausgleichen; desto genauer muss daher auch der wahrscheinlichste Werth mit der gesuchten Grösse übereinkommen; ja bei unendlich grosser Anzahl der Beobachtungen muss sogar völliges Zusammentreffen derselben statt finden: und doch kann die Rechnungsweise nur die nemliche bleiben, mag die Menge der Beobachtungswerthe klein oder gross sein.

3. Endlich — und dies ist das entscheidenste — muss ja auch der wahrscheinlichste Werth der Unbekannten, so wie diese selbst eine gewisse einzige oder bestimmte Grösse sein, und diese Grundbedingung allein hat uns den ersten Lehrsatz (I.) und die auf ihn gestützte Ableitung (3) an die Hand gegeben.

6.

Die (positiven oder absoluten) Verhältnisszahlen h, i, k,...., welche den einzelnen Beobachtungswerthen a, b, c,.... als Multiplicatoren zugesellt werden und dadurch auf den Betrag der gesuchten Grösse x oder ihres wahrscheinlichsten Werthes Einfluss nehmen, folglich nicht willkürlich angenommen werden können, sind von der Grösse der Beobachtungswerthe unabhängig, daher, von anderen Eigenschaften zusammengefasst, von der so genannten Güte oder Genauigkeit der Beobachtungswerthe, denen sie angehören, abhängig; welche selbst wieder nach der angewandten Beobachtungsweise, nach den mancherlei Mitteln und Werkzeugen, nach den mehr oder weniger günstigen Umständen, der grösseren oder geringeren Sorgfalt der Beobachtung u. dgl. geschätzt oder bemessen wird, was freilich schwierig und nur wenig sicher geschehen kann.

Nur in dem besonderen — aber glücklicher Weise am häufigsten eintretenden — Falle, wo alle Beobachtungen auf gleiche Weise mit einerlei Mitteln, unter den nemlichen Umständen, mit gleicher Sorgfalt u. s. f. ausgeführt wurden, und man folglich die gefundenen Beobachtungswerthe allesammt für gleich gut oder genau erachten kann, unterliegt es keinerlei Anstand, jene Güte-Verhältnisszahlen $h, i, k, \ldots$ der Beobachtungswerthe $a, b, c, \ldots$ sämmtlich unter sich gleich oder der Eins proportional anzunehmen. Ist dann n die Anzahl dieser beobachteten Werthe, so ist der gesuchten Grösse wahrscheinlichster Werth

$$=\frac{a+b+c+\ldots}{n},$$

d. i. das arithmetische Mittel der Beobachtungswerthe.

7.

Für den letzten Fall hat Herr Professor Encke in seinem astronomischen Jahrbuche für 1834 einen interessanten Beweis gegeben, der sich vornehmlich auf eine Eigenschaft der symmetrischen Functionen und darauf stützt, dass der behauptete Satz — wenigstens wie Herrn Röber's verdienstlicher Auszug unter Artikel „Experiment" im „Handwörterb. d. Chemie u. Physik, herausgeg. v. August u. A., Berlin 1842", sich ausdrückt — „offenbar" bei zwei Beobachtungswerthen gelten muss. Da jedoch das Zugeständniss dieses Einzelfalls nicht unbedenklich ist, daher solches „offenbar" nur als Nothbeweis sich ansehen lässt; so möge mir die Anführung meiner, auf das logische Princip vom zureichenden Grunde gestützten Rechtfertigung desselben gestattet sein.

Sind durch zwei directe und gleich gute Beobachtungen für eine auszumittelnde Grösse x die beiden ungleichen Werthe a und b gefunden worden; so muss, weil bei der Auffindung dieser Beobachtungswerthe bloss der Zufall thätig vorausgesetzt wird, es eben so wahrscheinlich sein, einen zu grossen als zu kleinen Werth für x gefunden zu haben. Mithin hat man keinerlei vorwiegenden Grund, die zu ermittelnde Grösse eher grösser als kleiner denn beide Beobachtungswerthe, oder eher dem einen als dem anderen derselben gleich anzunehmen; folglich muss sie ein Mittel beider sein. Da aber hat man wieder keinen überwiegenden Grund, diese Grösse näher an dem grösseren als an dem kleineren Beobachtungswerthe vorauszusetzen; folglich muss sie zwischen ihnen mitten inne liegen. Das aber kann nur die halbe Summe, das arithmetische Mittel beider Beobachtungswerthe, $\frac{a+b}{2}$; folglich ist dieses der wahrscheinlichste Werth der gesuchten Grösse.

8.

Noch bleibt mir in Kürze nachzuweisen übrig, dass und wie aus dem von mir aufgestellten allgemeineren arithmetischen

Mittel, diejenige von dem Beobachtungsfehler Δ abhängige Fu tion $\varphi(\Delta)$ sich aufstellen lässt, der die Wahrscheinlichkeit Eintrittes dieses Fehlers bekanntlich proportional ist.

Für eine zu suchende Grösse x seien die Beobachtungswe M, M', M'',.... gefunden, deren noch unbekannte Fehler

$$M-x=\Delta,\ M'-x=\Delta',\ M''-x=\Delta'',\dots\ .$$

sind. Dann ist die Wahrscheinlichkeit des Zusammentreffens ser Fehler proportional dem Producte

$$\varphi(\Delta)\varphi(\Delta')\varphi(\Delta'')\dots=\Omega;$$

daher ist jener Werth von x der wahrscheinlichste, für welc Ω ein Maximum ist. Nimmt man von Ω den natürlichen Logar men, differenzirt nach x und setzt $\frac{d\Omega}{dx}=0$; so erfolgt

$$\frac{1}{\varphi(\Delta)}\cdot\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}+\frac{1}{\varphi(\Delta')}\cdot\frac{d\varphi(\Delta')}{d\Delta'}+\frac{1}{\varphi(\Delta'')}\cdot\frac{d\varphi(\Delta'')}{d\Delta''}+\dots=0,$$

oder, wenn man abkürzend $\frac{1}{\varphi(\Delta)}\cdot\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}=\psi(\Delta)$ setzt,

$$\psi(\Delta)+\psi(\Delta')+\psi(\Delta'')+\dots=0.$$

Da aber der wahrscheinlichste Werth von x ein arithmetisc Mittel der Beobachtungswerthe M, M', M'',...., deren Güte-V hältnisszahlen g, g', g'',.... sein mögen, also

$$x=\frac{gM+g'M'+g''M''+\dots}{g+g'+g''+\dots}$$

ist, so folgt hieraus die Gleichung

$$g(M-x)+g'(M'-x)+g''(M''-x)+\dots=0$$

oder

$$g\Delta+g'\Delta'+g''\Delta''+\dots=0.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen für die Δ findet man, we man die zweite mit dem unbestimmten Multiplicator μ multiplic und von der ersten abzieht,

$$(\psi(\Delta)-\mu g\Delta)+(\psi(\Delta')-\mu g'\Delta')+(\psi(\Delta'')-\mu g''\Delta'')+\dots=0.$$

Diese Summe kann aber nur verschwinden, wenn ihre von ein der unabhängigen Summanden selbst allesammt einzeln verschwi den, folglich

$$\psi(\Delta)=\mu g\Delta,\ \psi(\Delta')=\mu g'\Delta',\ \psi(\Delta'')=\mu g''\Delta'',\dots$$

und

$$\mu=\frac{\psi(\Delta)}{g\Delta}=\frac{\psi(\Delta')}{g'\Delta'}=\frac{\psi(\Delta'')}{g''\Delta''}=\dots$$

ist. Es muss demnach $\mu=\frac{\psi(\Delta)}{g\Delta}$ eine von der Veränderlichen Δ ganz unabhängige Constante sein. Dann ist

$$\psi(\Delta)=\frac{1}{\varphi(\Delta)}\cdot\frac{d\varphi(\Delta)}{d\Delta}=\mu g\Delta,$$

also

$$\frac{d\varphi(\Delta)}{\varphi(\Delta)}=\mu g.\Delta d\Delta.$$

Die Integration dieser Gleichung, in der die g von der Grösse des Δ unabhängig ist, gibt

$$l\frac{\varphi(\Delta)}{C}=\mu g.\tfrac{1}{2}\Delta^2,\text{ also }\varphi(\Delta)=Ce^{\frac{1}{2}\mu g\Delta^2},$$

wofern C die Integrations-Constante vorstellt.

Da die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers Δ desto kleiner ausfallen muss, je grösser dieser selbst ist, und da $e=2{\cdot}71828....>1$ ist; so muss der Exponent von e negativ sein, und daher kann man $\frac{1}{2}\mu g=-h^2$ setzen. So erhält man für die gesuchte Function die Form

$$\varphi(\Delta)=Ce^{-(h\Delta)^2},$$

wie auch sonst auf anderen Wegen.

XXXVII.

Nachweis der Möglichkeit oder Erzeugung eines Obelisken.

Ein Anhang zu dem im Archiv, im IX. Bande, 1. Heft, Nr. X., S. 87., von dem Herrn Herausgeber veröffentlichten Aufsatze.

Von

Herrn Dr. Wilhelm Matzka,

Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

Herr Professor Grunert hat seinem höchst gelungenen Beweise (a. a. O. Nr. IX. S. 82.) der von Herrn Koppe gefundenen

Berechnungsregel des Rauminhaltes eines Obelisken den oben erwähnten, über die Entstehung solcher Körper handelnden Aufsatz zugegeben, in dessen Eingang er die Bemerkung macht, dass in der streng wissenschaftlichen reinen Geometrie „jederzeit erst die Realität eines geometrischen Objectes nachgewiesen werden müsse, bevor man es überhaupt unternehmen dürfe, weitere Untersuchungen über dasselbe anzustellen"; mit welcher Ansicht gewiss jeder kritische Geometer vollkommen einverstanden sein wird. Von diesem Probleme hat er selbst eine analytische Auflösung vorgelegt, ich dagegen werde hier die von ihm als wünschenswerth dargestellte synthetische zu geben und die seine zu vervollständigen bemüht sein.

Der Erklärung gemäss (a. a. O. S. 83.) ist ein Obelisk ein Körper, welcher von zwei parallelen gleichvielseitigen Vielecken als Grundebenen und von eben so viel Trapezen als den Seitenebenen eingeschlossen ist. Die Frage ist nun: Wie lässt sich ein solcher Körper construiren?

A. Synthetische Auflösung.

1. Construction aus einem Prisma.

Ein Prisma, z. B. das 5seitige *ABCDEabcde* (Taf. VIII. Fig. 1.) sei gegeben. Man führe in der einen Grundebene zu dem in ihr befindlichen Vielecke *abcde* ein durchweg paralleles $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$, jedoch so, dass keine zwei parallelen Seiten derselben gleich seien. Dazu wird man irgend einen Punkt α zu der der Spitze *a* entsprechenden des neu zu erzeugenden Vieleckes wählen, durch ihn die $\alpha\beta$ || aber (ungleich) $\not\asymp ab$ führen, dann durch β die $\beta\gamma$ || aber $\not\asymp bc$, und, wo nöthig noch so fort weiter vorgehen, bis man die drittletzte Spitze, hier γ, bestimmt hat. Durch diese nun ziehe man $\gamma\delta' \# cd$, so wie durch α die $\alpha\varepsilon' \# ae$. Zum Schlusse des zu zeichnenden Vieleckes führe man noch irgend eine weder durch δ' noch durch ε' gehende Gerade $\delta\varepsilon$ || *de*; so ist sicher $\gamma\delta \not\asymp cd$ und $\alpha\varepsilon \not\asymp ae$. Ist zugleich auch noch $\delta\varepsilon \not\asymp de$, so hat man erreicht, was gefordert wird. Ist aber zufällig $\delta\varepsilon = de$; so braucht man nur, wenn $\alpha\varepsilon$ und $\gamma\delta$ convergiren, die $\delta\varepsilon$ || zu sich um ein Angemessenes zu verrücken, und wenn sie parallel laufen, den Punkt γ in der $\beta\gamma$ etwas zu verschieben und das vorige Verfahren zu wiederholen. — Endlich legt man durch jedes Paar paralleler Seiten der zwei parallel gestellten Vielecke *abcde* und $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ihre Ebene; so entstehen eben so viele Seitenebenen, welche, weil die parallelen Seiten ungleich gemacht wurden, sicher Trapeze sein müssen; was erforderlich ist, damit der Körper $ABCDE\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ ein Obelisk werde.

2. Construction aus einem Vieleck und einer parallelen Ebene.

Eine Abänderung der gelehrten Construction besteht darin, dass man sich ein beliebiges ebenes Vieleck, z. B. *ABCDE*, und

seiner Ebene eine andere P parallel construirt, und in dieser einer beliebigen Spitze α anhebend ein ebensovielseitiges paeles Vieleck $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ so construirt, dass jede zwei parallele Seidieser Vielecke ungleich seien.

Man wird in dieser Absicht durch α und AB eine Ebene en, welche die P in einer zur AB parallelen Geraden schnei-, von der man $\alpha\beta \gtrless AB$ abschneidet. Eben so legt man durch ind BC eine Ebene, diese schneidet die P in einer zur BC allelen Geraden, auf der man die $\beta\gamma \gtrless BC$ abträgt. So fährt n fort bis man zur drittletzten Spitze, hier γ, gelangt ist. So bis hieher verfährt man auch weiter am Schlusse des zu conirenden Vieleckes dem Wesentlichen nach wie in der früher rterten Weise.

3. Construction aus den Seitenkanten.

Sei $ABCDEF$ (Taf. VIII. Fig. 2.) irgend ein ebenes Vieleck. rch eine Spitze A desselben sei eine beliebige, die Ebene des leckes durchstossende, ganze (unendliche) Gerade a geführt. rch einen Punkt dieser Geraden und durch die nächstfolgende tze B lege man eine neue Gerade b. Ingleichen führe man ch einen Punkt der b und durch C die Gerade c; und durch en Punkt der c und durch D die Gerade d. Ueberhaupt verre man in gleicher Weise an allen Spitzen des Vieleckes, bis a vor der vorletzten Spitze, hier E, angelangt ist. Da nun amt Alles auf die richtige Führung der Geraden e durch diese letzte Spitze E und durch einen Punkt der nächst früheren Geen d an; was die folgende Betrachtung vermittelt.

Die durch die letzte Vielecksspitze F zu führende Gerade f l die erste Gerade a schneiden, also muss auch die Ebene eF h. die der Geraden e und des ausser ihr befindlichen Punktes die a schneiden, und darf daher zu dieser a nicht parallel sein. hrt man demnach durch die letzte Vielecksseite EF die Ebene $\parallel a$, so schneidet diese die Ebene dE in einer Geraden e_1, welche verlangten Geraden e nicht geeignet ist. — Dieselbe letzte ade f soll aber auch noch die vorletzte Gerade e schneiden, muss die Ebene aF die e gleichfalls treffen und darf daher dieser Geraden e nicht parallel sein. Legt man demnach durch die Ebene $\mathfrak{E} \parallel aF$, so schneidet sie entweder die Ebene dE einer Geraden e_2, welche dann ebenfalls nicht zur gewünschten letzten Geraden e geeignet ist, oder die Ebene $\mathfrak{E}$ fällt mit der ne dE selbst überein, was nur geschehen kann, wenn $DE \parallel AF$ $d \parallel aF$ ist, wesswegen man da, wo $DE \parallel AF$ ist, schon die ade d nicht $\parallel aF$, also nicht mit der Durchschnittslinie der ene cD und der durch D zur Ebene aF parallelen Ebene überfallend, wählen darf.

Von den zwei Geraden e_1 und e_2 muss wenigstens Eine die schneiden. Führt man nun durch was immer für einen Punkt Geraden d, welcher von jenem einen oder diesen beiden rchschnittspunkten verschieden ist, und durch E die Gerade e; genügt diese vermöge des Obigen gewiss. Legt man nemlich t die Ebenen eF und aF, so schneidet jene die Gerade a,

diese die e, mithin schneidet ihre Durchschnittslinie f beide letzteren Geraden.

Sämmtliche durch die Vielecksspitzen gelegten Geraden a, b, c, d, e, f geben demnach das Gerüste aller Seitenkanten des zu construirenden Obelisken. Legt man sofort durch jede zwei benachbarte, sich schneidende Seitenkanten ihre Ebene, so erhält man die Gesammtschaft der Seitenebenen. Dazu führt man noch als zweite Grundebene eine zur Ebene des Vieleckes parallel, jedoch so, dass zwischen diesen zwei Grundebenen keine zwei benachbarten Seitenkanten sich durchschneiden.

4. Abänderung des Schlusses dieser Construction.

Der Schluss der letzten Construction lässt sich nach folgender Betrachtung abändern.

Vor den zwei letzten Seitenkanten e, f (Taf. VIII. Fig. 3.) angelangt, fordert man, 1. dass e die d schneide, 2. dass f die a treffe, und 3. dass auch e und f einander begegnen. Es ist demnach durch die Grundseite EF eine Ebene $eEFf$ oder kurz $\mathfrak{M}$ dergestalt zu legen, dass sie nicht nur den Geraden d und a, deren jede mit der EF sich kreuzt, begegne, sondern auch die Durchschnittslinie g der Ebenen dE und aF treffe, welche sich mit ihr (der Ebene $\mathfrak{M}$) in den Seitenkanten e und f schneiden, folglich so, dass die Normale m dieser Ebene $\mathfrak{M}$ auf den 3 Geraden d, a, g schief, auf der EF aber senkrecht stehe. Eine solche Normale m ist aber leicht zu construiren.

Legt man nemlich durch was immer für einen Punkt M an die Gerade d senkrecht die Ebene $\mathfrak{D}$, auf a senkrecht die Ebene $\mathfrak{A}$, auf g senkrecht die Ebene $\mathfrak{G}$, endlich auf EF senkrecht die Ebene $\mathfrak{L}$; so schneidet die letztere die drei früheren im Allgemeinen in drei Geraden δ, α, γ. Dann kann jede durch M gehende von δ, α, γ verschiedene Gerade der Ebene $\mathfrak{L}$, weil sie auf EF senkrecht, auf d, a, g aber schief steht, die Normale m der zu suchenden Ebene $\mathfrak{M}$ sein, die man construirt, indem man auf m durch die zu ihr senkrechte EF, ihre senkrechte Ebene errichtet.

Nur wenn die Ebene $dE \parallel aF$ ist, also die Gerade g verschwindet, wird jedenfalls $e \parallel f$. Damals ist aber $DE \parallel AF$ und $d \parallel a$. Wo demnach $DE \parallel AF$ ist, darf man nicht auch noch $d \parallel a$ wählen.

Da wo nur $DE \parallel AF$, nicht aber $d \parallel aF$ ist, muss $g \parallel DE \parallel AF$ sein, folglich, weil die Ebene $\mathfrak{M}$ jederzeit von der Grundebene verschieden gedacht wird, muss sie die Gerade g sicher schneiden, wesswegen hier das Legen der senkrechten Ebene $\mathfrak{G}$ überflüssig ist.

Sind von den 3 Geraden d, a, g zwei oder alle unter sich parallel, so genügt jede der parallelen schon allein für die andere oder für beide andere.

Anmerkung. Augenfällig sind die zwei ersten Constructionen mittels der zweiten Grundebene weit einfacher als die zwei letzten mittels der Seitenkanten.

B. Algebraische oder analytische Auflösung.

1. Ausgehend von der Construction der zweiten Grundebene.

Construirt man wie vorhin (in 1. und 2.) zur Grundebene *ABCDE* (Taf. VIII. Fig. 4.) eine parallel gestellte *abcde*, deren Seiten von den parallelen verschieden sind, so kommt es am Schlusse doch immer nur darauf an, zu einem Viereck *ACDE* ein anderes *acde* so zu construiren, dass *cd* ‖ aber $\gtrless CD$, *de* ‖ aber $\gtrless DE$ und *ea* ‖ aber $\gtrless EA$, also der Winkel $d=D$ und $e=A$ sei, während die Seite *ac* mit den Winkeln *a* und *c* zwar gegeben ist, aber nur zufällig *ac* ‖ oder $=AC$ und $a=A$, also $c=C$ sein kann.

Projicirt man (orthogonal) die geschlossene Polygonale *acde* auf die Senkrechte der Seite *ae*; so haben die Seiten *ac*, *cd*, *de*, *ea* beziehungsweise die Projectionswinkel a, $a+c+G$, $-e$, G, wenn G den gestreckten Winkel vorstellt; daher ist

$$ac.\sin a + cd.\sin(a+c+G) + de.\sin(-e) + ea.\sin G = 0.$$

Es ist aber $a+c=2G-(d+e)=2G-(D+E)$, also

$$ac.\sin a + cd.\sin(D+E) - de.\sin E = 0.$$

Projicirt man (gleichfalls winkelrecht) die geschlossene Polygonale *dcae* auf die Senkrechte der Seite *de*; so haben die Seiten *dc*, *ca*, *ae*, *ed* beziehungsweise die Projectionswinkel d, $d+c+G$, $-e$, G; daher ist

$$dc.\sin d + ca.\sin(d+c+G) + ae.\sin(-e) + ed.\sin G = 0.$$

Es ist aber $d=D$, $d+c=2G-(a+e)=2G-(a+E)$, folglich

$$dc.\sin D + ca.\sin(a+E) - ae.\sin E = 0.$$

Diese Gleichungen müssen, wenn man *de* und *ae* durch die von ihnen verschiedenen Seiten *DE* und *AE* ersetzt, da $\sin E$ nicht Null ist, jedenfalls in Ungleichungen übergehen; mithin ist die Seite *cd* immer so zu wählen, dass gleichzeitig

$$cd \gtrless CD,$$

$$cd.\sin(D+E) \gtrless DE.\sin E - ac.\sin a$$

und

$$cd.\sin D \quad \gtrless AE.\sin E - ac.\sin(a+E)$$

sei; was ohne Zweifel jederzeit möglich ist.

2. Ausgehend von der Construction der Seitenkanten.

Bei dieser Construction sind alle Seitenkanten mit Aussc der zwei letzten nur an die Bedingung gebunden, dass jede gende durch einen beliebigen Punkt der vorhergehenden g Mithin bleibt zum Schlusse mittels der Analysis nur noch die gende Aufgabe zu lösen:

„Zu einem Paar Geraden, (1) und (2), sollen d zwei Punkte, $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ und $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$, welche ausser ihnen mit keiner von beiden in einer Ebene liegen, ein P andere sich schneidende Geraden, (3) und (4), so gef werden, dass die eine (3) der ersteren (1) und die dere (4) der zweiten (2) von jenen begegne.

Seien die Gleichungen der gegebenen, die erste und letzte Seitenkante vorstellenden Geraden

$$(1)\qquad \frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1},$$

$$(2)\qquad \frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2};$$

und die der zwei zu suchenden, die letzte und vorletzte Se kante vorstellenden Geraden

$$(3)\qquad \frac{x-\xi_1}{\alpha_1}=\frac{y-\eta_1}{\beta_1}=\frac{z-\zeta_1}{\gamma_1},$$

$$(4)\qquad \frac{x-\xi_2}{\alpha_2}=\frac{y-\eta_2}{\beta_2}=\frac{z-\zeta_2}{\gamma_2}.$$

Dann sind eigentlich nur die zweierlei α, β, γ zu bestim welche, so wie die bekannten zweierlei a, b, c, Zahlen vorste die den Cosinus der, von der positiven Richtung der betreffe Geraden mit den positiven Richtungen der winkelrechten Co natenaxen der x, y, z gebildeten, hohlen Winkel proportional s

Nun soll erstens die Gerade (3) die (1) schneiden. I ist zunächt erforderlich, dass sie beide in einerlei Ebene, nam lich in der die Gerade (1) und den ausser ihr befindlichen P $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ enthaltenden Ebene liegen. Seien A_1, B_1, C_1 propo nal den Cosinus der (wie vorher bestimmten) Winkel der Nor dieser Ebene mit den Coordinatenaxen; so müssen, weil d Normale nicht nur auf der Geraden (1), sondern auch auf durch die Punkte $(x_1y_1z_1)$ und $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ gehenden Geraden, bei die Cosinus ihrer Winkel den Unterschieden $x_1-\xi_1$, y_1- $z_1-\zeta_1$ proportional sind, senkrecht stehen muss, die Gleichu gelten:

$$A_1a_1+B_1b_1+C_1c_1=0,$$
$$A_1(x_1-\xi_1)+B_1(y_1-\eta_1)+C_1(z_1-\zeta_1)=0;$$

aus denen man die Proportionen findet:

$$(5)\quad \begin{cases} A_1 : b_1(z_1 - \zeta_1) - c_1(y_1 - \eta_1) = \\ B_1 : c_1(x_1 - \xi_1) - a_1(z_1 - \zeta_1) = \\ C_1 : a_1(y_1 - \eta_1) - b_1(x_1 - \xi_1), \end{cases}$$

mittels derer sich die Proportionalen A_1, B_1, C_1 bestimmen lassen.

Damit in diese Ebene auch die gleich ihr durch den Punkt $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ gehende Gerade (3) falle, muss auf ihrer Normale auch diese Gerade senkrecht sein; mithin erhält man für die Forderung, dass die Geraden (3) und (1) in einerlei Ebene liegen, die Bedingungsgleichung

$$(6)\quad A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1 = 0.$$

Dieselben Geraden sollen sich aber auch durchschneiden, dafür nicht zu einander parallel sein; folglich dürfen die Cosinus ihrer Winkel mit einerlei Coordinatenaxen nicht insgesammt proportional, d. h. von den drei Verhältnissen dürfen

$$(7)\quad \frac{\alpha_1}{a_1},\ \frac{\beta_1}{b_1},\ \frac{\gamma_1}{c_1}$$

höchstens ein Paar gleich sein.

Zweitens soll die Gerade (4) die (2) schneiden. Darum muss, wenn A_2, B_2, C_2 den Cosinus der Winkel der Normale ihrer Ebenen proportional sind, in ähnlicher Weise wie vorhin

$$(8)\quad \begin{cases} A_2 : b_2(z_2 - \zeta_2) - c_2(y_2 - \eta_2) = \\ B_2 : c_2(x_2 - \xi_2) - a_2(z_2 - \zeta_2) = \\ C_2 : a_2(y_2 - \eta_2) - b_2(x_2 - \xi_2), \end{cases}$$

und

$$(9)\quad A_2\alpha_2 + B_2\beta_2 + C_2\gamma_2 = 0$$

sein; und zugleich dürfen von den drei Verhältnissen

$$(10)\quad \frac{\alpha_2}{a_2},\ \frac{\beta_2}{b_2},\ \frac{\gamma_2}{c_2}$$

höchstens ein Paar gleich sein.

Drittens endlich sollen die Geraden (3) und (4) selbst einander durchschneiden. Dazu müssen die Cosinus der Winkel, welche die Normale der sie beide enthaltenden Ebene mit den Coordinatenaxen bildet, insofern sie auf jenen Geraden senkrecht steht, gemäss den Proportionen (5) den Unterschieden

$$\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1,\ \gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1,\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$$

proportional sein; und weil dieselbe Normale auch auf der durch die Punkte $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ und $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ gehenden Geraden — der vorletzten Grundseite — senkrecht stehen muss, wird die Bedingungsgleichung bestehen:

$$(11) \qquad (\xi_1 - \xi_2)(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + (\eta_1 - \eta_2)(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + (\zeta_1 - \zeta_2)(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) = 0.$$

Damit endlich diese Geraden zu einander nicht parallel se dürfen von den drei Verhältnissen

$$(12) \qquad \frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \; \frac{\beta_1}{\beta_2}, \; \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

höchstens ein Paar gleich ausfallen.

Für die zu suchenden zwei Triaden von Cosinus-Proporti len α_1, β_1, γ_1 und α_2, β_2, γ_2 hat man demnach einerseits die Gleichungen (6), (9), (11) und andererseits die drei Bedingu (7), (10), (12). Zwei Unbekannte, z. B. γ_1, γ_2, lassen sich jenen Gleichungen eliminiren, und man erhält sofort blos] Gleichung mit vier Unbekannten. Von diesen ist sonach je e z. B. β_1 und β_2, völlig frei wählbar, und die zwei übrigen, α_1 und α_2, müssen so bestimmt werden, dass der letzten sie haltenden Gleichung und jenen drei Bedingungen Genüge gesche Dies ist aber sicher jederzeit möglich, weil diese Unbekannte jener Gleichung blos in der ersten Potenz erscheinen und zugl stetig sind.

C. Annahme einer allgemeineren Erklärung des Obelisken.

Bisher hatten wir die engste Erklärung des Obelisken fe gehalten, der zufolge sämmtliche Seitenebenen desselben oh Ausnahme Trapeze sein müssen, folglich keine zwei parall Grundkanten einander gleich, und keine zwei unmittelbar na einander folgende Seitenkanten unter sich parallel sein dürft Dies geschah hauptsächlich darum, weil diese Einschränkung die Construction wesentlich erschweren. Allein die Erklärung d Obelisken muss, wenn anders die Lehre desselben umfasse brauchbar sein soll, dermassen, und wie es auch schon sein E finder, Herr Professor Koppe, gethan, so erweitert werden, da wenn auch nicht alle, so wenigstens manche Seitenebenen Pa lelogramme, also manche Paare paralleler Grundkanten gleich, od manche Paare benachbarter Seitenkanten parallel seien. Demg mäss legen wir folgende weiteste Erklärung des Obelisk zu Grunde.

Ein Obelisk ist ein Körper, der von zwei parallelen u parallel gestellten gleichvielseitigen ebenen Vielecken als Gru ebenen und von den Ebenen jeglicher zwei parallelen Vielec seiten (Grundkanten) als Seitenebenen begrenzt ist.

Nach dieser Erklärung wird der Obelisk insbesonde ein Prisma, wenn jede zwei parallelen Grundkanten gleich od die Grundebenen congruent sind.

Legt man diese allgemeinere Erklärung zu Grunde, so vereinfacht sich die Construction des Obelisken namhaft. Denn

1. bei der Construction der zweiten Grundebene braucht man die nach einander folgenden Seiten derselben jenen der ersten Grundebene blos parallel, übrigens nach Gefallen ungleich oder gleich zu machen.

2. Bei der Construction der Seitenkanten hat man nur allein zu fordern, dass jede folgende in derjenigen Ebene liege, welche die Spitze der Grundebene, durch die sie zu führen ist, und die vorhergehende Seitenkante enthält. Nur die letzte Seitenkante f in Taf. VIII. Fig. 2. wird sich ergeben, wenn man die Ebene eF und aF legt, wonach ihre Durchschnittslinie jene Kante sein wird. Ist nun

a) die $e \parallel a$, so ist auch $f \parallel (e$ und $a)$;

b) schneidet e die a, muss auch f sie beide im selben Punkte schneiden; und

c) endlich, wenn e und a sich kreuzen, kann e bloss ausnahmsweise zu Einer aus ihnen parallel sein, in der Regel wird sie jedoch beiden in getrennten Punkten begegnen.

Man kann also fast immer erwarten, dass f sowohl die e als auch die a schneiden werde, und nur selten wird sie zu Einer aus ihnen, und noch seltener zu beiden parallel ausfallen.

Anmerkung. Diese letztere Construction nun wurde eigentlich von dem Herrn Herausgeber des Archivs a. a. O. als Lösung einer analytisch-geometrischen Aufgabe mitgetheilt. Denn seine Gleichungen (2) und (11) kommen der letzten Seitenkante als Durchschnittslinie der zwei durch seinen Punkt $(a_3 b_3 c_3)$ und durch je eine der beiden gegebenen Geraden zu, und dass sie die vorletzte und erste Seitenkante, d. i. jede dieser gegebenen Geraden, schneide, hängt davon ab, dass sowohl von den drei Verhältnissen

$$\cos\varphi : \cos\alpha_1, \; \cos\psi : \cos\beta_1, \; \cos\chi : \cos\gamma_1$$

als auch von folgenden dreien:

$$\cos\varphi : \cos\alpha_2, \; \cos\psi : \cos\beta_2, \; \cos\chi : \cos\gamma_2$$

nicht mehr als zwei gleich ausfallen, oder dass von den Proportionalitäten

$$\cos\alpha_1 : \cos\beta_1 : \cos\gamma_1 = \cos\alpha_2 : \cos\beta_2 : \cos\gamma_2$$
$$= C_1 A_2 - A_1 C_2 : A_1 B_2 - B_1 A_2 : B_1 C_2 - C_1 B_2$$

keine zwei vollständig bestehen.

XXXVIII.

Ueber die Differenziation der Exponenzialgrössen und des Logarithmus.

Von dem
Herrn Professor Dr. O. Schlömilch
an der Universität zu Jena.

Wenn man in der Differenzialrechnung die Differenziation der einfachsten Funktionen ausführen, also die Differenzialquotienten von

$$x^\mu,\ a^x \text{ und } \log x$$

entwickeln will, so bedarf man bekanntlich dazu des Nachweises, dass sich die Grössen

$$1)\qquad \frac{(1+\delta)^\mu-1}{\delta},\ (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}},\ \frac{a^\delta-1}{\delta}$$

bestimmten angebbaren Gränzen nähern, sobald man δ bis zur Null abnehmen lässt. Gewöhnlich zeigt man diess mit Hülfe des binomischen Satzes für ganze positive Exponenten, wie auch der Verfasser in seinem Handbuche der Differenzialrechnung gethan hat; es bleibt aber wünschenswerth, den Nachweis der Existenz jener Gränzen unabhängig von dem Binomialtheoreme zu liefern, um nachher dieses selbst mit Hülfe der Differenzialrechnung ableiten zu können. Für den ersten der in No. 1) verzeichneten Ausdrücke ist diese Forderung bereits durch den Aufsatz No. II. Bd. X. des Archivs erfüllt, und es bleibt daher noch übrig, dasselbe für die anderen Ausdrücke in 1) zu leisten, was hier geschehen soll.

Für jedes ganze positive m und beliebige y gilt bekanntlich die Formel

$$\frac{y^m-1}{y-1}=1+y+y^2+y^3+\ldots+y^{m-1},$$

woraus für $y=1+x$ folgt:

$$\frac{(1+x)^m-1}{x}=1+(1+x)+(1+x)^2+\ldots+(1+x)^{m-1}.$$

Geben wir auf der rechten Seite dem als positiv vorausgesetzten x seinen kleinsten Werth Null, so folgt

$$\frac{(1+x)^m-1}{x} > m,$$

oder nach Multiplikation mit x und Transposition von -1:

$$(1+x)^m > 1+mx.$$

Setzen wir $x=\frac{1}{m\alpha}$, wo α eine positive Grösse ist, und erheben die so entstehende Ungleichung

$$(1+\frac{1}{m\alpha})^m > 1+\frac{1}{\alpha}$$

auf die Potenz α, so wird

$$(1+\frac{1}{m\alpha})^{m\alpha} > (1+\frac{1}{\alpha})^\alpha,$$

wobei wir $m\alpha=\beta$ setzen wollen. Da m eine von der Einheit verschiedene positive ganze Zahl ist, so muss offenbar $m\alpha > \alpha$, d. h. $\beta > \alpha$ sein, und wir können daher die obige Ungleichung auch so aussprechen: für $\alpha < \beta$ ist zugleich

$$(1+\frac{1}{\alpha})^\alpha < (1+\frac{1}{\beta})^\beta,$$

und hieraus folgt, dass der Ausdruck

2) $$(1+\frac{1}{\omega})^\omega$$

fortwährend wächst, sobald man ω immer zunehmen lässt.

Das Wachsthum der in 2) verzeichneten Grösse geht aber nicht ins Unendliche fort und zwar vermöge des Theoremes, dass für $mx < 2$

3) $$(1+x)^m < \frac{2+mx}{2-mx}$$

ist. Für $m=1$ findet man diesen Satz leicht bestätigt; denn man hat offenbar

$$2+x-x^2 < 2+x,$$

woraus wegen $2+x-x^2=(1+x)(2-x)$ folgt

4) $$1+x < \frac{2+x}{2-x}.$$

Dass aber der Satz auch allgemeiner für jedes positive m gilt, lässt sich mittelst des Schlusses von m auf $m+1$ darthun. Mul-

tiplizirt man nämlich die Ungleichungen 3) und 4), so folgt

$$5)\qquad (1+x)^{m+1} < \frac{4+2(m+1)x+2mx^2}{4-2(m+1)x+2mx^2}.$$

Wendet man darauf den bekannten Satz an, dass für positive a, b, c und $a<b$

$$\frac{b+c}{a+c} < \frac{b}{a}$$

ist *), so folgt für $a=4-2(m+1)x$, $b=4+2(m+1)x$, $c=2mx^2$:

$$\frac{4+2(m+1)x+2mx^2}{4-2(m+1)x+2mx^2} < \frac{4+2(m+1)x}{4-2(m+1)x},$$

wobei aber a, d. h. $4-2(m+1)x$, positiv ausfallen muss. Nach 5) ist nun auch

$$(1+x)^{m+1} < \frac{4+2(m+1)x}{4-2(m+1)x},$$

d. h.

$$(1+x)^{m+1} < \frac{2+(m+1)x}{2-(m+1)x}$$

für $(m+1)x<2$; dasselbe stimmt mit dem überein, was aus der Ungleichung 3) folgt, wenn man $m+1$ für m schreibt.

Nimmt man in 3) $x=\frac{1}{m}$, so ergiebt sich für jedes positive m

$$(1+\frac{1}{m})^m < 3,$$

woraus man ersieht, dass der Ausdruck $(1+\frac{1}{m})^m$ mit m nicht gleichzeitig ins Unendliche wachsen kann, sondern sich einer bestimmten Gränze nähern muss, welche <3 ist. Dieser Satz lässt sich auf bekannte Weise dahin erweitern, dass auch

$$\text{Lim}(1+\frac{1}{\omega})^\omega$$

eine bestimmte endliche Grösse sein muss, wobei nun ω eine

*) Wenn $a<b$, ist auch $ac<bc$, ferner

$$ab+ac<ab+bc$$

oder

$$(b+c)a<(a+c)b$$

und durch Division mit $a(a+c)$ folgt daraus der obige Satz.

beliebige positive unendlich wachsende Zahl bedeutet. Für $\omega=\frac{1}{\delta}$, worin δ gegen die Null convergirt, ergiebt sich daraus der zu beweisende Satz, dass

$$\operatorname{Lim}(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}$$

eine endliche bestimmte Grösse ist. Bezeichnen wir dieselbe mit e, so folgt weiter

$$\operatorname{Lim}\frac{\log(1+\delta)}{\delta}=\operatorname{Lim}\log[(1+\delta)^{\frac{1}{\delta}}]=\log e.$$

Da hier nichts darauf ankommt, nach welchem Gesetze δ abnimmt, wenn es nur der Null beliebig nahe gebracht werden kann, so setze man

$$\delta=a^{\varepsilon}-1,$$

wobei a die Basis der obigen Logarithmen und ε eine bis zur Null abnehmende Grösse bezeichnen möge. Es wird dann

$$\operatorname{Lim}\frac{\varepsilon}{a^{\varepsilon}-1}=\log e,\ \text{bas}\,a$$

oder umgekehrt, und wenn man wieder δ für ε schreibt,

$$\operatorname{Lim}\frac{a^{\delta}-1}{\delta}=\frac{1}{\log e},\ \text{bas}\,a;$$

womit das letzte der in Rede stehenden Theoreme bewiesen ist.

XXXIX.

Ueber den Integralsinus und Integralcosinus.

Von dem

Herrn Professor Dr. O. Schlömilch

an der Universität zu Jena.

Einige Untersuchungen aus der Theorie bestimmter Integrale erfordern die Betrachtung zweier transscendenten Funktionen, deren Definitionen durch die Gleichungen

$$Si(\omega)=\tfrac{1}{1}\frac{\omega}{1}-\tfrac{1}{3}\frac{\omega^3}{1.2.3}+\tfrac{1}{5}\frac{\omega^5}{1.2.3.4.5}-\ldots,$$

$$Ci(\omega)=0{,}5772156+\tfrac{1}{2}l(\omega^2)-\tfrac{1}{2}\frac{\omega^2}{1.2}+\tfrac{1}{4}\frac{\omega^4}{1.2.3.4}-\tfrac{1}{6}\frac{\omega^6}{1.2\ldots 6}+\ldots$$

gegeben sind, und für welche ich die Namen „Integralsinus" und „Integralcosinus" vorgeschlagen habe. Man kann übrigens statt der obigen Definitionen auch die folgenden setzen:

1) $$Si(\omega)=\int_0^\omega \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

2) $$Ci(\omega)=\int_\infty^\omega \frac{\cos x}{x}\,dx;$$

deren compendiöse Form sich gut zur Entdeckung verschiedener Eigenschaften unserer Funktionen eignet. Setzt man gleichzeitig $\omega=mu$ und $x=my$, so gehen die Formeln 1) und 2) in die folgenden über:

3) $$Si(mu)=\int_0^u \frac{\sin my}{y}\,dy,$$

4) $$Ci(mu)=\int_\infty^u \frac{\cos my}{y}\,dy;$$

in denen m eine beliebige constante positive endliche Grösse bezeichnet. Wir wollen von diesen Formeln einige Anwendungen mittheilen.

I. Es ist für $\pi > y \geqq 0$:

$$\tfrac{1}{2}y=\sin y-\tfrac{1}{2}\sin 2y+\tfrac{1}{3}\sin 3y-\ldots.$$

Dividirt man beiderseits mit y und integrirt darauf zwischen $y=0$ bis $y=u$, wobei $u<\pi$ sein muss, weil nur für $u<\pi$ die obige Gleichung besteht, so ergiebt sich unter Benutzung von No. 3)

5) $$\tfrac{1}{2}u=Si(u)-\tfrac{1}{2}Si(2u)+\tfrac{1}{3}Si(3u)-\ldots$$
$$u<\pi.$$

Von grösserem Interesse sind die folgenden Betrachtungen.

II. Man setze in der Formel 3) $m=1, 3, 5, \ldots 4n+1$ und nehme alle so entstehenden speziellen Gleichungen mit wechselnden Zeichen zusammen; es ist dann

$$Si(u)-Si(3u)+Si(5u)-\ldots+Si(\overline{4n+1}\,u)$$
$$=\int_0^u[\sin y-\sin 3y+\sin 5y-\ldots+\sin(4n+1)y]\frac{dy}{y},$$

und wenn man die unter dem Integralzeichen stehende Reihe summirt,

$$Si(u) - Si(3u) + Si(5u) - \ldots + Si(\overline{4n+1}u)$$
$$= \int_0^u \frac{\sin(4n+2)y}{2\cos y} \frac{dy}{y}.$$

Lassen wir n ins Unendliche wachsen, so wird

6) $$Si(u) - Si(3u) + Si(5u) - Si(7u) + \ldots \text{ in inf.}$$
$$= \tfrac{1}{2} \operatorname{Lim} \int_0^u \frac{\sin(4n+2)y}{\cos y} \frac{dy}{y},$$

wo es nun darauf ankommt, den rechts angedeuteten Gränzwerth zu finden. Wir unterscheiden zu diesem Zwecke zwei Fälle, ob nämlich $u < \frac{\pi}{2}$ ist oder nicht. Im ersten Falle kann man den Satz anwenden

$$\operatorname{Lim} \int_0^u \frac{\sin ky}{y} f(y) dy = \frac{\pi}{2} f(0),$$

worin das Zeichen Lim sich auf das unbegränzte Wachsen der Grösse k bezieht und nur vorausgesetzt wird, dass $f(y)$ während des willkührlichen Intervalles $y=0$ bis $y=u$ nicht unendlich werde *). Da für $k = 4n+2$, $f(y) = \frac{1}{\cos y}$ und $u < \frac{\pi}{2}$ diese Bedingung erfüllt ist, so haben wir jetzt

$$\operatorname{Lim} \int_0^u \frac{\sin(4n+2)y}{y} \frac{dy}{\cos y} = \frac{\pi}{2},$$

und folglich nach No. 5) für $u < \frac{\pi}{2}$:

7) $$\frac{\pi}{4} = Si(u) - Si(3u) + Si(5u) - \ldots$$

Ist dagegen $u \geqq \frac{\pi}{2}$, so darf das vorhin citirte Theorem nicht unmittelbar angewendet werden, weil $f(y)$ dann wenigstens einmal unendlich würde während des Intervalles $y=0$ bis $y=u$. Zerlegt man aber $\sin(4n+2)y$ in $\sin(\overline{4n+1}y + y)$, so wird

8) $$\int_0^u \frac{\sin(4n+2)y}{\cos y} \frac{dy}{y}$$
$$= \int_0^u \frac{\sin(4n+1)y}{y} dy + \int_0^u \frac{\cos(4n+1)y}{\cos y} \frac{\sin y}{y} dy.$$

Den Gränzwerth, gegen welchen das erste Integral rechts für unendlich wachsende n convergirt, findet man leicht mittelst des vorigen Theoremes für $k = 4n+1$, $f(y) = 1$; derselbe ist

*) Man s. des Verf. Analytische Studien II. §. 3.

$$\operatorname{Lim}\int_0^u \frac{\sin(4n+1)y}{y}\,dy=\frac{\pi}{2}.$$

Um auch den Gränzwerth des zweiten Integrales zu erh[illegible] erinnern wir uns an folgenden Satz *): „wenn $f(y)$ innerhal[illegible] Intervalles $y=0$ bis $y=u$ endlich bleibt und u ein unge[illegible] Vielfache von $\frac{\pi}{2}$, also etwa $u=(2s+1)\frac{\pi}{2}$ ist, so hat man $k=4n+1$

$$\operatorname{Lim}\int_0^u \frac{\cos ky}{\cos y}f(y)\,dy$$

$$=\pi\{f(\tfrac{1}{2}\pi)+f(\tfrac{3}{2}\pi)+f(\tfrac{5}{2}\pi)+\ldots+\tfrac{1}{2}f(\tfrac{2s+1}{2}\pi)\};$$

wenn dagegen u kein solches Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, so gieb[illegible] doch immer zwei auf einander folgende ungerade Vielfache $\frac{\pi}{2}$, zwischen denen u enthalten ist, so dass man

$$(2s+1)\frac{\pi}{2}<u<(2s+3)\frac{\pi}{2}$$

setzen darf. In diesem Falle findet die Gleichung

$$\operatorname{Lim}\int_0^u \frac{\cos ky}{\cos y}f(y)\,dy$$

$$=\pi\{f(\tfrac{1}{2}\pi)+f(\tfrac{3}{2}\pi)+f(\tfrac{5}{2}\pi)+\ldots+f(\tfrac{2s+1}{2}\pi)\}$$

statt.“ Da nun $\frac{\sin y}{y}$ immer endlich bleibt, so kann man $f(y)=$[illegible] setzen und hat dann für $u=(2s+1)\frac{\pi}{2}$:

$$\operatorname{Lim}\int_0^u \frac{\cos(4n+1)y}{\cos y}\frac{\sin y}{y}\,dy$$

$$=\tfrac{2}{1}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\ldots+\frac{(-1)^s}{2}\cdot\frac{2}{2s+1};$$

dagegen

$$=\tfrac{2}{1}-\tfrac{2}{3}+\tfrac{2}{5}-\ldots+(-1)^s\frac{2}{2s+1},$$

wenn u zwischen $(2s+1)\frac{\pi}{2}$ und $(2s+3)\frac{\pi}{2}$ liegt. Substituiren die gefundenen Resultate in No. 8) und 6), so ergiebt sich fol[illegible] des Theorem: die Summe der Reihe

*) A. a. O. §. 4.

$$Si(u) - Si(3u) + Si(5u) - Si(7u) + \dots$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^s}{2}\,\frac{1}{2s+1},$$

n $u = (2s+1)\frac{\pi}{2}$ ist, dagegen

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^s}{2s+1},$$

n u zwischen $(2s+1)\frac{\pi}{2}$ und $(2s+3)\frac{\pi}{2}$ fällt.

Nimmt man hierzu noch die Formel 7), so hat man in jedem e den Werth der gesuchten Summe.

II. Eine ähnliche Betrachtung lässt sich auf die Gleichung 4) enden. Schreiben wir die letztere in der Form

$$-Ci(mu) = \int_u^\infty \frac{\cos my}{y}\,dy,$$

n $m = 1, 3, 5, \dots 2n+1$ und addiren alle so entstehenden chungen, so wird

$$-[Ci(u) + Ci(3u) + Ci(5u) + \dots + Ci(\overline{2n+1}u)]$$

$$= \int_u^\infty [\cos y + \cos 3y + \cos 5y + \dots + \cos(2n+1)y]\,\frac{dy}{y}$$

$$= \int_u^\infty \frac{\sin(2n+2)y}{2\sin y} \cdot \frac{dy}{y}.$$

Zerlegt man $\sin(2n+2)y$ in $\sin(\overline{2n+1}y + y)$ und lässt dann n dlich wachsen, so wird

$$-[Ci(u) + Ci(3u) + Ci(5u) + \dots]$$

$$= \tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}\int_u^\infty \frac{\sin(2n+1)y}{\sin y}\,\frac{\cos y}{y}\,dy + \tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}\int_u^\infty \frac{\cos(2n+1)y}{y}\,dy.$$

zweite Gränzwerth rechts ist Null zufolge des Satzes, dass aupt für unendlich wachsende k,

$$\operatorname{Lim}\int_a^b f(y)\cos ky\,dy = 0$$

, sobald $f(y)$ von $y = a$ bis $y = b$ endlich bleibt, was hier der ist, sobald u die Null übersteigt. Wir haben daher für $u > 0$

$$Ci(u) + Ci(3u) + Ci(5u) + Ci(7u) + \dots$$

$$= -\tfrac{1}{2}\operatorname{Lim}\int_u^\infty \frac{\sin ky}{\sin y}\,\frac{\cos y}{y}\,dy.$$

Ferner giebt es folgendes Theorem *): wenn u ein Vie von π, etwa $s\pi$ ist, so hat man

$$\mathrm{Lim}\int_0^u \frac{\sin ky}{\sin y} f(y)\,dy$$
$$=\pi\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\dots+\tfrac{1}{2}f(s\pi)\};$$

fällt dagegen u zwischen $s\pi$ und $(s+1)\pi$, so ist

$$\mathrm{Lim}\int_0^u \frac{\sin ky}{\sin y} f(y)\,dy$$
$$=\pi\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+\dots+f(s\pi)\}.$$

Für $s=\infty$ vereinigen sich beide Gleichungen zu der ei

$$\mathrm{Lim}\int_0^\infty \frac{\sin ky}{\sin y} f(y)\,dy$$
$$=\pi\{\tfrac{1}{2}f(0)+f(\pi)+f(2\pi)+f(3\pi)+\dots\}.$$

Zieht man hiervon erst die eine und dann die andere der vorigen Gleichungen ab, so folgt

$$\mathrm{Lim}\int_u^\infty \frac{\sin ky}{\sin y} f(y)\,dy$$
$$=\pi\{\tfrac{1}{2}f(s\pi)+f(\overline{s+1}\pi)+f(\overline{s+2}\pi)+\dots\}$$

für $u=s\pi$; dagegen

$$=\pi\{f(\overline{s+1}\pi)+f(\overline{s+2}\pi)+f(\overline{s+3}\pi)+\dots\}$$

wenn u zwischen $s\pi$ und $(s+1)\pi$ liegt. Wenden wir die $f(y)=\frac{\cos y}{y}$ auf die Gleichung 9) an, so ergiebt sich die die Summe der Reihe

$$Ci(u)+Ci(3u)+Ci(5u)+Ci(7u)+\dots$$

ist

$$=\frac{(-1)^{s+1}}{2}\left\{\frac{1}{2s}-\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s+2}-\dots\right\}$$

für $u=s\pi$, dagegen

$$=\frac{(-1)^s}{2}\left\{\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{s+3}-\dots\right\}$$

sobald u zwischen $s\pi$ und $(s+1)\pi$ ea

*) A. a. O. §. 3.

Für $s=0$, d. h. für $\pi > u > 0$, beträgt z. B. jene Summe $\frac{1}{2}l2$. — Obwohl die hier entwickelten Sätze als spezielle Anwendungen weit allgemeinerer Theoreme erscheinen (deren Beweise übrigens nur höchst elementare Betrachtungen erfordern), so sind sie doch vielleicht desswegen nicht ohne Interesse, weil sie den Zusammenhang aufdecken, in welchem der Integralsinus und Integralcosinus zu den harmonischen Reihen stehen.

XL.

Theorie der Modular- (elliptischen) Funktionen.

Von dem

Herrn Doctor J. Dienger,

Lehrer der Mathematik und Physik an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

In dem Folgenden wollen wir versuchen, diejenigen Sätze hervorzuheben, die nöthig sind, um zu einer vollständigen Kenntniss dieser Klasse von Funktionen zu gelangen, ohne dabei die Masse von Formeln aufzubieten, die das Studium dieser Funktionen erschweren und verwickeln. Wir lehnen uns dabei an das an Formeln und Umfang reiche Werk von Dr. Gudermann: „Theorie der Modular-Funktionen und Modular-Integrale. (Berlin bei Reimer 1844.)" Sind die im Folgenden aufgestellten Formeln keineswegs neu, so ist vielleicht doch eben dadurch, dass nur das Wesentliche hervorgehoben worden, der weitern Verbreitung der Kenntniss dieser Funktionen ein Dienst geleistet; und diess ist auch einziger Zweck vorliegender Abhandlung.

§. 1.

Die veränderlichen Grössen x und y seien so beschaffen, dass sie der Gleichung

$$x^2+2\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}\,xy+y^2-m^2a^2x^2y^2=a^2 \;\dots\; (1)$$

genügen, wenn $a^2<1$, $m^2<1$. Aus dieser Gleichung ergiebt sich leicht, indem man in Bezug auf x differenzirt:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{1}{\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.x+y-m^2a^2x^2y} \\ \quad + \dfrac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.y+x-m^2a^2xy^2}=0.\end{array}\right\}\ldots(2)$$

Nun ergiebt sich aber aus der Gleichung (1):

$$x=-\frac{\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.y+\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2y^2+m^2a^2y^4}}{1-m^2a^2y^2},$$

$$y=-\frac{\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.x+\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2x^2+m^2a^2x^4}}{1-m^2a^2x^2};$$

wenn man für $y=0$ $x=+a$, für $x=0$ $y=+a$ voraussetzt.

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{array}{l}x-m^2a^2y^2x+\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.y=\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2y^2+m^2a^2y^4}, \\ y-m^2a^2x^2y+\sqrt{(1-a^2)(1-m^2a^2)}.x=\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2x^2+m^2a^2x^4}\end{array}\right\}(3)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung (2), so erhält man:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2x^2+m^2a^2x^4}}+\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{a^2-(m^2+1)a^2y^2+m^2a^2y^4}}=0$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}+\frac{\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}=0.\;\ldots\;(4)$$

Es ist somit die Gleichung (4) als eine erste Differenzialgleich[ung] der Gleichung (1) zu betrachten, und die Systeme von Werth[en] von x und y, welche der Gleichung (1) genügen, erfüllen a[uch] die durch (4) ausgesprochene Beziehung. Das Integral der Gl[ei]chung (4) ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}+\int\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}=C.\;\ldots\;(5)$$

Diese Gleichung wird mit (1) zusammenfallen, wenn die willkü[r]liche Konstante passend bestimmt ist.

Setzt man

$$v=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} \qquad\qquad x=\varphi(v)$$

woraus

$$u=\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}, \qquad\qquad y=\varphi(u)$$

ist die Gleichung (4):

$$\frac{\partial v}{\partial x}\partial x+\frac{\partial v}{\partial y}\partial y=0$$

d die (5):

$$v+u=C.$$

Da diese Gleichung eine Beziehung zwischen x und y ausspricht, wird C von a und m abhängen. Nun muss aber für $x=0$ $=a$, und für $y=0$ $x=a$ sein; diess ist nur der Fall, wenn

$$C=\int_0^a\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}},$$

dass

$$\left.\begin{aligned}\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}+\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}\\=\int_0^a\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-m^2z^2)}}.\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

iese Gleichung folgt aus (1), ist ihr also gleichbedeutend.

Aus ihr folgt:

$$a=\varphi(C)=\varphi(v+u).$$

an wird daher sagen können:

Ist

$$v=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}},\quad u=\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}},$$

ferner $v+u$ eine konstante Grösse, und folgt aus diesen Gleingen: $x=\varphi(v)$, also $y=\varphi(u)$, setzt man ferner $a=\varphi(u+v)$, sind die Grössen x, y, a durch die Gleichung (1) verbunden.

§. 2.

Es seien, wie im vorstehenden Paragraphen, v und x durch e Gleichung

$$v=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}\;\ldots\ldots\ldots\;(1)$$

rbunden, in welcher $m^2<1$, $x^2\leqq 1$, so nennen wir x den Molar-Sinus von v für den Modulus m und bezeichnen ihn durch (v), während v das Argument (arg.) heissen mag. Die Grösse $\sqrt{1-x^2}$ soll Modular-Kosinus heissen für den Modulus m, und

bezeichnet werden durch $\mathrm{cn}\,v$; die Grösse $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ heisse M[illegible]lar-Tangente von $v = \mathrm{tn}\,v$; $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ heisse Modular-Kotangente = [illegible] $\sqrt{1-m^2x^2}$ aber heisse Modular-Differente $= \mathrm{dn}\,v$. Endlich w[illegible] wir die Grösse $\sqrt{1-m^2}$ durch m' bezeichnen und die auf [illegible] Modulus m' bezogenen Modularfunktionen durch

$$\mathrm{sn}'v,\ \mathrm{cn}'v,\ \mathrm{tn}'v,\ \mathrm{ctn}'v,\ \mathrm{dn}'v.$$

Man hat sonach:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{cn}^2 v + \mathrm{sn}^2 v = 1,\\
&\mathrm{tn}\,v = \frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{cn}\,v},\\
&\mathrm{ctn}\,v = \frac{\mathrm{cn}\,v}{\mathrm{sn}\,v},\\
&\mathrm{dn}\,v = \sqrt{1-m^2\,\mathrm{sn}^2 v} = \sqrt{\mathrm{cn}^2 v + m'^2\,\mathrm{sn}^2 v}\\
&\qquad = \sqrt{m'^2 + m^2\,\mathrm{cn}^2 v};
\end{aligned}\right\} \ldots$$

aus welchen Gleichungen, nach Art der Behandlung der cykli[illegible] Funktionen, man leicht neue bilden kann, aus denen hervo[illegible] dass wenn eine der fünf Modularfunktionen gegeben ist, ma[illegible] andern vier daraus ableiten kann.

Für $m=0$ erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathrm{sn}\,v &= \sin v,\\
\mathrm{cn}\,v &= \cos v,\\
\mathrm{tn}\,v &= \mathrm{tang}\,v,\\
\mathrm{ctn}\,v &= \mathrm{cotg}\,v,\\
\mathrm{dn}\,v &= 1.
\end{aligned}$$

Für $m=1$ ergiebt sich

$$v = \int_0^x \frac{\partial x}{1-x^2} = \log\cdot\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

woraus

$$x = \frac{e^v - e^{-v}}{e^v + e^{-v}} < 1.$$

Da also, was auch immer $m(>0$ und $<1)$ sei, x oder $\mathrm{sn}\,v$ i[illegible] kleiner als 1 ist, so giebt es eine Grösse φ, so dass

$$\mathrm{sn}\,v = \sin\varphi,\ \text{daher}\ \mathrm{cn}\,v = \cos\varphi,\ \mathrm{tn}\,v = \mathrm{tang}\,\varphi,\ \mathrm{ctn}\,v = \mathrm{cotg}\,\varphi,$$

$$\mathrm{dn}\,v = \sqrt{1-m^2\sin^2\varphi} = \sqrt{\cos^2\varphi + m'^2\sin^2\varphi}.$$

Diese Grösse φ nennt man die Amplitude des Argumentes v, für den Modulus m, und die Bezeichnung ist

$$\varphi = \operatorname{am} v. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

§. 3.

Wir wollen nun den Gang der Modularfunktionen etwas näher erörtern. Dazu ist es nöthig, dass wir die Differentialquotienten derselben kennen.

Aus der Gleichung (1) des §. 2. folgt zuerst

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-m^2x^2}} = \frac{1}{\operatorname{cn} v . \operatorname{dn} v},$$

also, da $x = \operatorname{sn} v$:

$$\frac{\partial . \operatorname{sn} v}{\partial v} = \operatorname{cn} v . \operatorname{dn} v. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Da

$$\operatorname{sn}^2 v + \operatorname{cn}^2 v = 1,$$

so ist

$$\operatorname{sn} v \frac{\partial . \operatorname{sn} v}{\partial v} + \operatorname{cn} v \frac{\partial . \operatorname{cn} v}{\partial v} = 0,$$

und setzt man den Werth aus (1), so ergiebt sich:

$$\frac{\partial . \operatorname{cn} v}{\partial v} = -\operatorname{sn} v \operatorname{dn} v. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Ebenso

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial . \operatorname{tn} v}{\partial v} = \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{cn}^2 v}, & \frac{\partial . \operatorname{dn} v}{\partial v} = -m^2 \operatorname{sn} v \operatorname{cn} v \\ \frac{\partial . \operatorname{ctn} v}{\partial v} = \frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{sn}^2 v}, & \frac{\partial . \operatorname{am} v}{\partial v} = \operatorname{dn} v \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (3)$$

Nun ist für $v=0$ $x=0$, also

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{sn}(0)=0,\ \operatorname{cn}(0)=1,\ \operatorname{tn}(0)=0, \\ \operatorname{ctn}(0)=\frac{1}{0},\ \operatorname{dn}(0)=1,\ \operatorname{am}(0)=0. \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (4)$$

Da aber, der Gleichung (1) gemäss, $\frac{\partial . \operatorname{sn} v}{\partial v}$ so lange positiv bleibt als $\operatorname{cn} v$, und für $v=0$ $\operatorname{cn} v=1$ ist, so wächst also $\operatorname{sn} v$ von $v=0$ an so lange bis $\operatorname{cn} v$ negativ wird. Heisst M der kleinste Werth von v (für den Modulus m), für den $\operatorname{cn} v=0$ ist, so hat man

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sn}(M)=1,\ \mathrm{cn}(M)=0,\ \mathrm{tn}(M)=\frac{1}{0}, \\ \mathrm{ctn}(M)=0,\ \mathrm{dn}(M)=m',\ \mathrm{am}(M)=\frac{\pi}{2}; \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \quad (5)$$

und es heisst M der zum Modulus m gehörige Modularquadrant.

Was seine Bestimmung anbelangt, so ist

$$M=\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}, \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (6)$$

oder da $x=\sin\varphi$:

$$M=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}. \quad . \ . \ . \ . \ . \quad (7)$$

Der Gang der Modularfunktionen innerhalb der Werthe 0 und M des Argumentes ist also als bekannt vorauszusetzen.

§. 4.

Setzt man $-x$ statt x in die Gleichung (1) des §. 2., so wird v zu $-v$, und somit ist

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{sn}(-v)=-\mathrm{sn}\,v,\ \mathrm{cn}(-v)=\mathrm{cn}\,v,\ \mathrm{tn}(-v)=-\mathrm{tn}\,v, \\ \mathrm{ctn}(-v)=-\mathrm{ctn}\,v,\ \mathrm{dn}(-v)=\mathrm{dn}\,v,\ \mathrm{am}(-v)=-\mathrm{am}\,v, \end{array}\right\} \quad (1)$$

was auch immer der Werth des Argumentes v sei.

§. 5.

Aus den Gleichungen (3) des §. 1. zieht man, wenn man die erste mit x, die zweite mit y multiplizirt, alsdann subtrahirt, $x=\mathrm{sn}\,a$, $y=\mathrm{sn}\,b$, $a=\mathrm{sn}\,(a+b)$ setzt:

$$\mathrm{sn}\,(a+b)=\frac{\mathrm{sn}^2a-\mathrm{sn}^2b}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b-\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}.$$

Nun ist aber

$$\begin{aligned} &\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{cn}^2b\,\mathrm{dn}^2b-\mathrm{sn}^2b\,\mathrm{cn}^2a\,\mathrm{dn}^2a \\ &=\mathrm{sn}^2a\,(1-\mathrm{sn}^2b)\,(1-m^2\mathrm{sn}^2b)-\mathrm{sn}^2b\,(1-\mathrm{sn}^2a)\,(1-m^2\mathrm{sn}^2a) \\ &=(\mathrm{sn}^2a-\mathrm{sn}^2b)\,(1-m^2\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2b). \end{aligned}$$

Multiplizirt man also in vorstehender Gleichung Zähler und Nenner mit $\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a$, so ergiebt sich:

$$\mathrm{sn}\,(a+b)=\frac{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b+\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a}{1-m^2\mathrm{sn}^2a\,\mathrm{sn}^2b}, \quad . \ . \ . \ . \quad (1)$$

woraus folgt, wenn man $-b$ für b setzt:

$$\operatorname{sn}(a-b)=\frac{\operatorname{sn}a\operatorname{cn}b\operatorname{dn}b-\operatorname{sn}b\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}.$$

Hieraus folgt nun:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{cn}(a+b)&=\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b-\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\\ \operatorname{cn}(a-b)&=\frac{\operatorname{cn}a\operatorname{cn}b+\operatorname{sn}a\operatorname{sn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (2)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tn}(a+b)&=\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a}{1-\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}\\ \operatorname{tn}(a-b)&=\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b-\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a}{1+\operatorname{tn}a\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (3)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{ctn}(a+b)&=\frac{\operatorname{ctn}a\operatorname{ctn}b-\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{dn}b\operatorname{ctn}b+\operatorname{ctn}a\operatorname{dn}a}\\ \operatorname{ctn}(a-b)&=\frac{\operatorname{ctn}a\operatorname{ctn}b+\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b}{\operatorname{ctn}a\operatorname{dn}a-\operatorname{ctn}b\operatorname{dn}b}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (4)$$

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{dn}(a+b)&=\frac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b-m^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\\ \operatorname{dn}(a-b)&=\frac{\operatorname{dn}a\operatorname{dn}b+m^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{sn}b\operatorname{cn}b}{1-m^2\operatorname{sn}^2a\operatorname{sn}^2b}\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (5)$$

Setzt man endlich

$$\operatorname{am}(a+b)=\alpha+\beta,$$

so ist

$$\operatorname{tn}(a+b)=\operatorname{tang}(\alpha+\beta)$$

oder

$$\frac{\operatorname{tang}\alpha+\operatorname{tang}\beta}{1-\operatorname{tang}\alpha\operatorname{tang}\beta}=\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b+\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a}{1-\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a},$$

welcher Gleichung genügt wird, wenn

$$\operatorname{tang}\alpha=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b,\quad \operatorname{tang}\beta=\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a,$$

$$\alpha=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b),\quad \beta=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a);$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{am}(a+b)&=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b)+\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a),\\ \operatorname{am}(a-b)&=\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}a\operatorname{dn}b)-\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=\operatorname{tn}b\operatorname{dn}a);\end{aligned}\right\}\ (6)$$

welche Werthe auch wirklich den Formeln (1) bis (5) genügen.

Setzt man in den vorstehenden Formeln $b=a$, so erhält m leicht die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn} 2a &= \frac{2\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1-m^2\operatorname{sn}^4 a},\\
\operatorname{cn} 2a &= \frac{\operatorname{cn}^2 a - \operatorname{sn}^2 a \operatorname{dn} a}{1-m^2\operatorname{sn}^4 a},\\
\operatorname{tn} 2a &= \frac{2\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a}{1-\operatorname{tn}^2 a \operatorname{dn}^2 a},\\
\operatorname{ctn} 2a &= \frac{\operatorname{ctn}^2 a - \operatorname{dn}^2 a}{2\operatorname{ctn} a \operatorname{dn} a},\\
\operatorname{dn} 2a &= \frac{\operatorname{dn}^2 a - m^2\operatorname{sn}^2 a \operatorname{cn}^2 a}{1-m^2\operatorname{sn}^4 a},\\
\operatorname{am} 2a &= 2\operatorname{arc}(\operatorname{tang} = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (7$$

woraus wieder gefolgert wird:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn} a &= \pm\sqrt{\left(\frac{1-\operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}\right)}\\
\operatorname{cn} a &= \pm\sqrt{\left(\frac{\operatorname{dn} 2a + \operatorname{cn} 2a}{1+\operatorname{dn} 2a}\right)}\\
\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a &= \operatorname{tang}(\tfrac{1}{2}\operatorname{am} 2a).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (8$$

Ueberhaupt kann man hieraus eine Reihe Formeln ableiten ganz ähnliche Weise, wie die entsprechenden Formeln der cy schen Funktionen.

§. 6.

Die Formeln des vorstehenden Paragraphen werden uns fernere Verhalten der Modularfunktionen vor Augen stellen.

Setzt man $a=M$, so erhält man, mit Beachtung der Form des §. 3.:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(M-b) = \frac{\operatorname{cn} b}{\operatorname{dn} b}, \quad \operatorname{cn}(M-b) = m'\frac{\operatorname{sn} b}{\operatorname{dn} b},\\
&\operatorname{tn}(M-b) = \frac{\operatorname{ctn} b}{m'}, \quad \operatorname{ctn}(M-b) = m'\operatorname{tn} b,\\
&\operatorname{dn}(M-b) = \frac{m'}{\operatorname{dn} b}, \quad \operatorname{am}(M-b) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m'\operatorname{tn} b);
\end{aligned}\right\} (1)$$

vorausgesetzt, dass zunächst b zwischen 0 und M sei, obwo diese Formeln für jedes b gelten.

Eben so,

$$\operatorname{am}(M+b) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = m'\operatorname{tn} b).$$

Demnach

$$\operatorname{am}(M+b)=\pi-\operatorname{am}(M-b),$$

und wenn man hier $M-b$ statt b setzt:

$$\operatorname{am}(2M-b)=\pi-\operatorname{am}b,$$
$$\operatorname{am}(2M+b)=\pi+\operatorname{am}b;$$

d. i. für irgend ein ganzes positives r:

$$\operatorname{am}(2rM\pm b)=r\pi\pm\operatorname{am}b.$$

Also aus (2):

$$\operatorname{am}(2rM+M+b)=\operatorname{am}(M+b)+r\pi=r\pi+\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=m'\operatorname{tn}b),$$

d. i.

$$\operatorname{am}((2r+1)M\pm b)=(2r+1)\frac{\pi}{2}\pm\operatorname{arc}(\operatorname{tang}=m'\operatorname{tn}b). \quad \dots (3)$$

Dieselben Formeln gelten für ein negatives $2r$ und $2r+1$.

Hieraus ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(2rM+b)&=\sin(\operatorname{am}(2Mr+b))=\sin(r\pi+\operatorname{am}b)=(-1)^r\operatorname{sn}b,\\
\operatorname{cn}(2rM+b)&=\cos[\operatorname{am}(2rM+b)]=\cos(r\pi+\operatorname{am}b)=(-1)^r\operatorname{cn}b,\\
\operatorname{tn}(2rM+b)&=\operatorname{tang}[\operatorname{am}(2rM+b)]=\operatorname{tang}(r\pi+\operatorname{am}b)=\operatorname{tn}b,\\
\operatorname{ctn}(2rM+b)&=\operatorname{cotg}[\operatorname{am}(2rM+b)]=\operatorname{cotg}(r\pi+\operatorname{am}b)=\operatorname{ctn}b.
\end{aligned}\right\} (4)$$

Setzt man hier $r=2n$, so sieht man, dass die Funktionen $\operatorname{sn}b$, $\operatorname{cn}b$, $\operatorname{tn}b$, $\operatorname{ctn}b$ sich nicht ändern, wenn b sich um $4nM$ ändert; diese Funktionen sind also periodisch und der Umfang einer Periode ist $4M$.

Was die Funktion $\operatorname{dn}b$ anbelangt, so ist

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{dn}(M+b)&=\frac{m'}{\operatorname{dn}b},\\
\operatorname{dn}(2M+b)&=\frac{m'}{\operatorname{dn}(M+b)}=\operatorname{dn}b;
\end{aligned}\right\} (4')$$

diese Funktion verhält sich also wie $\operatorname{tn}b$ und $\operatorname{ctn}b$.

Aus den Formeln (4) folgt:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}((2r+1)M+b)&=(-1)^r\operatorname{sn}(M+b)=(-1)^r\frac{\operatorname{cn}b}{\operatorname{sn}b},\\
\operatorname{cn}((2r+1)M+b)&=(-1)^r\operatorname{cn}(M+b)=(-1)^{r+1}\frac{m'\operatorname{sn}b}{\operatorname{dn}b},\\
\operatorname{tn}((2r+1)M+b)&=\operatorname{tn}(M+b)=-\frac{\operatorname{ctn}b}{m'},\\
\operatorname{ctn}((2r+1)M+b)&=\operatorname{ctn}(M+b)=-m'\operatorname{tn}b,\\
\operatorname{dn}((2r+1)M+b)&=\operatorname{dn}(M+b)=\frac{m'}{\operatorname{dn}b}.
\end{aligned}\right\} \dots (5)$$

Setzt man in den Formeln (4) und (5) b negativ, so erhält man leicht zwei weitere Systeme von Formeln. Setzt man aber $b=0$, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{sn} 2rM=0, & \operatorname{sn}(2r+1)M=(-1)^r, \\ \operatorname{cn} 2rM=(-1)^r, & \operatorname{cn}(2r+1)M=0, \\ \operatorname{tn} 2rM=0, & \operatorname{tn}(2r+1)M=\frac{1}{0}, \\ \operatorname{ctn} 2rM=\frac{1}{0}, & \operatorname{ctn}(2r+1)M=0, \\ \operatorname{dn} 2rM=0, & \operatorname{dn}(2r+1)M=m'. \end{array}\right\} \ldots \quad (6)$$

Was das Vorzeichen von $\frac{1}{0}$ anbelangt, so verhält es sich damit wie bei den cyklischen Funktionen; es ist dasselbe gewissermassen ein doppeltes, je nachdem man zu den unendlich werdenden Funktionen gelangt ist; ob durch ein negatives bis 0 wachsendes, oder ein positives bis 0 abnehmendes b.

§. 7.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun, dass, sobald man die Werthe der Modularfunktionen von 0 bis M kennt, man die Werthe derselben für jedes beliebige Argument zu bestimmen im Stande ist. Allein selbst innerhalb dieser Gränzen lässt sich noch eine Vereinfachung einführen. Aus den Formeln (1) des §. 6. folgt nämlich, wenn man $\frac{M}{2}-b$ statt b setzt:

(1)

$$\operatorname{sn}\left(\frac{M}{2}+b\right)=\frac{\operatorname{cn}\left(\frac{M}{2}-b\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{M}{2}-b\right)},\quad \operatorname{ctn}\left(\frac{M}{2}+b\right)=m'\operatorname{tn}\left(\frac{M}{2}-b\right),$$

$$\operatorname{cn}\left(\frac{M}{2}+b\right)=\frac{m'\operatorname{sn}\left(\frac{M}{2}-b\right)}{\operatorname{dn}\left(\frac{M}{2}-b\right)},\quad \operatorname{dn}\left(\frac{M}{2}+b\right)=\frac{m'}{\operatorname{dn}\left(\frac{M}{2}-b\right)},$$

$$\operatorname{tn}\left(\frac{M}{2}+b\right)=\frac{\operatorname{ctn}\left(\frac{M}{2}-b\right)}{m'},\quad \operatorname{am}\left(\frac{M}{2}+b\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=m'\operatorname{tn}\left(\frac{M}{2}-b\right)\right);$$

durch welche Formeln man die Funktionen für Argumente $>\frac{M}{2}$ aus denen für Argumente $<\frac{M}{2}$ berechnen kann.

Setzt man $b=0$, so erhält man Formeln, die leicht die Modularfunktionen von $\frac{M}{2}$ geben.

§. 8.

Für die Anwendung der Modularfunktionen wäre es nothwendig, dass man Tafeln besässe, aus denen man die Werthe von jeder derselben für ein bestimmtes Argument entnehmen könnte. Solche Tafeln könnten sich leicht auf die gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln beziehen lassen. Denn, wie wir in §. 9. sehen werden, ist es leicht möglich, aus einer gegebenen Amplitude φ das zugehörige Argument v zu berechnen. Man stelle nun für die Moduln von 0 bis 1, diese beiden ausgeschlossen, Tafeln auf, die für jede Amplitude von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ die zugehörigen Argumente v geben, so wird man umgekehrt aus diesen Tafeln für einen Modulus $m\binom{<1}{>0}$ die einem Argumente v zugehörige Amplitude φ finden können. Da aber $\operatorname{sn} v = \sin\varphi$, $\operatorname{cn} v = \cos\varphi$ u. s. f., so kennt man also auch die dem Argumente v zugehörigen Modularfunktionen mit Hilfe der gewöhnlichen trigonometrischen Tafeln. Wäre eine der Modularfunktionen, z. B. $\operatorname{tn} v$, gegeben, so würde man φ dergestalt berechnen, dass

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tn} v,$$

und aus diesem Werthe von φ kann man das Argument v, so wie die übrigen Modularfunktionen finden.

Hätte man also Tafeln, in welchen für die Moduln von 0 bis 1, diese zwei ausgeschlossen, die zu jedem φ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ zugehörigen v (von 0 bis M) zu finden wären, so würden diese vollständig genügen. Es wäre vielleicht genügend, dass sie nach Tausendtheilen des Modulus fortschreiten würden; ihre Einrichtung könnte der der trigonometrischen Tafeln ähnlich sein. Soll überhaupt die Anwendung der Modularfunktionen fruchtbringend sein, so sind solche Tafeln von unabweisbarer Nothwendigkeit. Es bleibt uns also noch zu zeigen, auf welche Weise die Grösse v aus φ berechnet werden kann.

§. 9.

Ganz wie in §. 3. ergiebt sich, wenn $\operatorname{am} v = \varphi$ gesetzt wird,

$$v = \int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1 - m^2\sin^2\varphi}}, \quad \ldots \quad (1)$$

worin φ unter $\frac{\pi}{2}$ vorausgesetzt werden kann, oder höchstens $= \frac{\pi}{2}$.

Um also v aus φ zu bestimmen, haben wir bloss das Integral in eine konvergirende Reihe zu entwickeln. Nun ist, da $m^2\sin^2\varphi < 1$:

$$(1-m^2\sin^2\varphi)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}m^2\sin^2\varphi+\frac{1.3}{2.4}m^4\sin^4\varphi+\frac{1.3.5}{2.4.6}m^6\sin^6\varphi+\ldots,$$

$$\int_0^{\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-m^2\sin^2\varphi}}=\varphi+\frac{1}{2}m^2\int_0^{\varphi}\sin^2\varphi\,\partial\varphi+\frac{1.3}{2.4}m^4\int_0^{\varphi}\sin^4\varphi\,\partial\varphi$$
$$+\frac{1.3.5}{2.4.6}m^6\int_0^{\varphi}\sin^6\varphi\,\partial\varphi+\ldots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}m^{2r}\int_0^{\varphi}\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi.$$

Man setze nun

$$\int_0^{\varphi}\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi=\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}f_r(\varphi),$$

so ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{l} v=\varphi+\left(\frac{1}{2}\right)^2m^2f_1(\varphi)+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2m^4f_2(\varphi)+\ldots \\ \ldots+\left(\frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2.4.6\ldots2r}\right)^2m^{2r}f_r(\varphi)+\ldots \end{array}\right\}\ldots(2)$$

Durch diese Formel, die Funktionen $f(\varphi)$ als bekannt vorausgesetzt, erhält man v aus φ. Zugleich folgt hieraus, dass zu $-m$ die gleichen Modularfunktionen gehören, wie zu m.

Es ist nunmehr noch eine Berechnungsweise der Funktionen $f(\varphi)$ anzugeben. Aber man hat:

$$\frac{\partial[\sin^{2r+1}\varphi.\cos\varphi]}{\partial\varphi}=(2r+1)\sin^{2r}\varphi\cos^2\varphi-\sin^{2r+2}\varphi$$
$$=(2r+1)\sin^{2r}\varphi-(2r+2)\sin^{2r+2}\varphi,$$

daher

$$\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi=(2r+1)\int_0^{\varphi}\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi-(2r+2)\int_0^{\varphi}\sin^{2r+2}\varphi\,\partial\varphi$$

oder

$$(2r+2)\int_0^{\varphi}\sin^{2r+2}\varphi\,\partial\varphi=(2r+1)\int_0^{\varphi}\sin^{2r}\varphi\,\partial\varphi-\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi,$$

$$\frac{1.3.5\ldots(2r+1)}{2.4.6\ldots(2r+2)}(2r+2)f_{r+1}(\varphi)=\frac{1.3.5\ldots(2r+1)}{2.4.6\ldots2r}f_r(\varphi)-\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi,$$

$$f_{r+1}(\varphi)=f_r(\varphi)-\frac{2.4.6\ldots2r}{1.3.5\ldots(2r+1)}\sin^{2r+1}\varphi\cos\varphi;$$

woraus nun, da $f_0(\varphi)=\varphi$:

$$\left.\begin{array}{l}
f_1(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi;\\
f_2(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi,\\
f_3(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi,\\
\vdots\\
f_r(\varphi)=\varphi-\sin\varphi\cos\varphi-\frac{2}{3}\sin^3\varphi\cos\varphi-\frac{2.4}{3.5}\sin^5\varphi\cos\varphi-\ldots\\
\qquad\ldots-\frac{2.4.6\ldots(2r-2)}{3.5.7\ldots(2r-1)}\sin^{2r-1}\varphi\cos\varphi;
\end{array}\right\}(3)$$

wodurch die Funktionen $f(\varphi)$ nun bestimmt sind.

Diese Funktionen sind abnehmend und positiv, da sie Null sind für $\varphi=0$ und ihr Differenzialquotient positiv ist von $\varphi=0$ bis $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Da dieser für ein unendlich grosses r Null ist, so ist $f_r(\varphi)$ für ein unendlich grosses r selbst Null, wenn $\varphi^2<\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$, was man auch auf andere Art beweisen kann. Für $\varphi=\frac{\pi}{2}$ erhält man den Werth von M.

Somit hätten wir die im §. 8. geforderte Aufgabe gelöst, oder die Möglichkeit der Konstruktion der Tafeln gezeigt.

Die unmittelbare Theorie der Modularfunktionen ist damit geschlossen, und wir haben nur noch ihr Verhalten anzugeben, wenn das Argument imaginär oder wenn der Modulus >1 ist.

§. 10.

Ehe wir aber diese Untersuchung vornehmen, wollen wir noch einige Gleichungen aufstellen, welche die Beziehungen der Argumente zu den Modularfunktionen näher darstellen.

I. Ist v ein Argument, dessen Modular-Sinus $=x$, so hat man (§. 2.):

$$v=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-(m^2+1)x^2+m^2x^4}} \quad (1)$$

II. Ist v ein Argument, dessen Modular-Kosinus $=x$, so ist sein Modular-Sinus $=\sqrt{1-x^2}=y$, also

$$\left.\begin{array}{l}
v=\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}=\int_1^x\frac{\frac{\partial.\sqrt{1-x^2}}{\partial x}\partial x}{x\sqrt{m'^2+m^2x^2}}\\
=\int_1^x\frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(m'^2+m^2x^2)}}=\int_1^x\frac{-\partial x}{\sqrt{m'^2+(m^2-m'^2)x^2-m^2x^4}}
\end{array}\right\}(2)$$

v ist Null für $x=1$; da aber x nicht grösser als 1, so kann man auch setzen

$$v=\int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{m'^2+(m^2-m'^2)x^2-m^2x^4}} \quad \ldots\ldots \quad (2')$$

Für $x=0$ ist die Wurzelgrösse $=m$, für $x=1$ ist sie 0, für $x>1$ ist sie imaginär.

III. Sei v ein Argument, dessen Modular-Tangente $=x$, so ist sein Modular-Sinus $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=y$, mithin

(3)

$$v=\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}=\int_0^x \frac{\frac{\partial \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\partial x}\partial x}{\sqrt{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}\sqrt{\left(\frac{1-m^2x^2+x^2}{1+x^2}\right)}}$$

$$=\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1+(m'^2+1)x^2+m'^2x^4}};$$

v ist Null für $x=0$; x aber kann jeden positiven Werth haben. Für $x=\frac{1}{0}$ ist $v=M$.

IV. Ist v ein Argument, dessen Modular-Kotangente $=x$, so ist dessen Modular-Tangente $=\frac{1}{x}=y$, mithin

(4)

$$v=\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1+y^2)(1+m'^2y^2)}}=\int_\infty^x \frac{\frac{\partial \cdot \frac{1}{x}}{\partial x}\partial x}{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}\sqrt{(1+\frac{m'^2}{x^2})}}$$

$$=\int_x^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(m'^2+x^2)}}=\int_x^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{m'^2+(m'^2+1)x^2+x^4}};$$

v ist Null für $x=\infty$; für $x=0$ ist $v=M$.

V. Es sei $\operatorname{dn} v=x$, so ist $\operatorname{sn} v=y=\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}$; demnach

$$\left.\begin{aligned} v&=\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}=\int_1^x \frac{-\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-m'^2)}} \\ &=\int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-m'^2+(m'^2+1)x^2-x^4}}; \end{aligned}\right\} (5)$$

v ist Null für $x=1$, v ist $=M$ für $x=m'$; x ist immer zwischen 1 und m'; für $x=1$ ist die Wurzelgrösse Null, für $x=m'$ ebenfalls Null; ausserhalb dieser Gränzen ist sie imaginär.

VI. Es sei $\tang(\frac{1}{2}\mathrm{am}.v)=x$. Nun ist $\tang\frac{1}{2}\varphi=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$, so

$$x=\tang(\tfrac{1}{2}\mathrm{am}\,v)=\sqrt{\frac{1-\mathrm{cn}\,v}{1+\mathrm{cn}\,v}},\quad \mathrm{cn}\,v=\frac{1-x^2}{1+x^2}=y.$$

aher nach II.:

$$v=\int_1^y\frac{-\partial y}{\sqrt{(1-y^2)(m'^2+m^2y^2)}}=2\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1+2(m'^2-m^2)x^2+x^4}}.\quad (6)$$

VII. Es sei $\frac{1}{\mathrm{sn}(M-v)}=\frac{\mathrm{dn}\,v}{\mathrm{cn}\,v}=x$, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{m^2\mathrm{cn}^2v\,\mathrm{sn}\,v+\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}^2v}{\mathrm{cn}^2v}=\mathrm{sn}\,u(x^2-m^2).$$

ber

$$x=\frac{\sqrt{1-m^2\mathrm{sn}^2v}}{\sqrt{1-\mathrm{sn}^2v}},\quad \mathrm{sn}^2v=\frac{1-x^2}{m^2-x^2}.$$

emnach

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\sqrt{(1-x^2)(m^2-x^2)},$$

so

$$v=\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(m^2-x^2)}}=\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{m^2-(m^2+1)x^2+x^4}}.\quad (7)$$

ist Null für $x=1$, v ist $=M$ für $x=\infty$; also geht x von 1 s ∞.

VIII. Es sei $\mathrm{cn}(M-v)=m'\frac{\mathrm{sn}\,v}{\mathrm{dn}\,v}=x$, so ist

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\mathrm{cn}\,u}{m'}(m'^2+m^2x^2)=\sqrt{(1-x^2)(m'^2+m^2x^2)},$$

$$=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(m'^2+m^2x^2)}}=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{m'^2+(m^2-m'^2)x^2-m^2x^4}}.\quad (8)$$

ür $x=0$ ist $v=0$, für $x=1$ ist $v=M$. Die Wurzelgrösse ist ell von $x=0$ bis $x=1$.

IX. Es sei $\frac{1}{\mathrm{cn}\,v}=x$, so findet man ganz wie oben

$$v=\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{-m^2+(m^2-m'^2)x^2+m'^2x^4}}\ldots\quad (9)$$

ist Null für $x=1$, und ist $=M$ für $x=\infty$; also geht x von 1 s ∞. Für $x^2<1$ ist die Wurzelgrösse imaginär.

X. Es sei $\operatorname{dn}(M-v)=\frac{m'}{\operatorname{dn} v}=x$, so findet man ebenfalls:

$$v=\int_{m'}^{x}\frac{\partial x}{\sqrt{-m'^2+(m'^2+1)x^2-x^4}} \quad \ldots\ldots (10)$$

v ist Null für $x=m'$, und ist $=M$ für $x=1$; also geht x v m' bis 1, innerhalb welcher Gränzen die Wurzelgrösse auch reell i

Aehnliche Formeln lassen sich noch leicht ableiten; die g gebenen genügen aber zu unserem Zwecke.

§. 11.

Die Formeln des vorstehenden Paragraphen werden uns au die Aufgabe lösen, die Verhältnisse der Modularfunktionen an geben, wenn das Argument imaginär ist.

Setzt man nämlich $\operatorname{sn} iv = iz$, so ist also

$$iv=\int_0^z\frac{i\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+m^2z^2)}},\text{ also } v=\int_0^z\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+m^2z^2)}}.$$

Hieraus folgt aber, nach §. 10. III., dass $z=\operatorname{tn}' v$, wenn man d in §. 2. ferner erwähnte Bezeichnung einführt. Demnach ist

$$\operatorname{sn} iv = i \operatorname{tn}' v,$$

wenn $i=\sqrt{-1}$. Hieraus:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{cn} iv=\frac{1}{\operatorname{cn}' v}, \quad \operatorname{tn} iv = i \operatorname{sn}' v,\\
&\operatorname{ctn} iv=\frac{1}{i\operatorname{sn}' v}, \quad \operatorname{dn} iv=\frac{\operatorname{dn}' v}{\operatorname{cn}' v},\\
&\operatorname{am} iv = i\log\left(\frac{1+\operatorname{sn}' v}{\operatorname{cn}' v}\right);
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1)$$

daraus ergiebt sich, wenn man die Formeln des §. 5. beachtet:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(a+bi) &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn}' b + i \operatorname{sn}' b \operatorname{cn}' b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn}'^2 b + m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}'^2 b} \\
&= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn}' b + i \operatorname{sn}' b \operatorname{cn}' b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}'^2 b}, \\
\operatorname{cn}(a+bi) &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn}' b - i \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}' b \operatorname{dn}' b}{\operatorname{cn}'^2 b + m^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}'^2 b} \\
&= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn}' b - i \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}' b \operatorname{dn}' b}{1 - \operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}'^2 b}, \\
\operatorname{tn}(a+bi) &= \frac{\operatorname{sn}(a+bi)}{\operatorname{cn}(a+bi)}, \\
\operatorname{ctn}(a+bi) &= \frac{\operatorname{cn}(a+bi)}{\operatorname{sn}(a+bi)}, \\
\operatorname{dn}(a+bi) &= \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn}' b \operatorname{cn}' b - i m^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn}' b}{1 - \operatorname{dn}^2 a \operatorname{sn}'^2 b}, \\
\operatorname{am}(a+bi) &= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn}' b}{\operatorname{cn}' b}\right) + \operatorname{arc}(\operatorname{tang} = i \operatorname{sn}' b \operatorname{dn} a) \\
&= \operatorname{arc}\left(\operatorname{tang} = \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn}' b}{\operatorname{cn}' b}\right) + \frac{i}{2} \log\left(\frac{1 + \operatorname{sn}' b \operatorname{dn} a}{1 - \operatorname{sn}' b \operatorname{dn} a}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Aus diesen Formeln lassen sich einige bemerkenswerthe Formeln ziehen. Heisst nämlich M' der zu m' gehörige Modularquadrant (§. 3.), so ist nach §. 6., wenn man $b = 2rM'$ setzt:

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{sn}(a+2rM'i) = \operatorname{sn} a, \quad \operatorname{cn}(a+2rM'i) = (-1)^r \operatorname{cn} a, \\
&\operatorname{tn}(a+2rM'i) = (-1)^r \operatorname{tn} a, \quad \operatorname{ctn}(a+2rM'i) = (-1)^r \operatorname{ctn} a, \\
&\operatorname{dn}(a+2rM'i) = (-1)^r \operatorname{dn} a;
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

woraus folgt, dass, wenn a um $4rM'i$ wächst, die fünf Modularfunktionen sich nicht ändern. Setzt man noch $a + 2nM$ statt a, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}
\operatorname{sn}(a+2nM+2rM'i) &= (-1)^n \operatorname{sn} a, \\
\operatorname{cn}(a+2nM+2rM'i) &= (-1)^{r+n} \operatorname{cn} a, \\
\operatorname{tn}(a+2nM+2rM'i) &= (-1)^r \operatorname{tn} a, \\
\operatorname{ctn}(a+2nM+2rM'i) &= (-1)^r \operatorname{ctn} a, \\
\operatorname{dn}(a+2nM+2rM'i) &= (-1)^r \operatorname{dn} a;
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (4)$$

aus welchen Gleichungen sich ergiebt, dass die aufgezählten fünf Modularfunktionen doppelt periodisch sind, und dass der Umfang einer reellen Periode $4M$, der einer imaginären $= 4M'i$ sei.

§. 12.

Ist der Modulus grösser als 1, so kann er durch $\frac{1}{m} = m_1$ dargestellt werden, da $m < 1$. Die Modularfunktionen, die sich

auf diesen Modulus beziehen, mögen durch $\mathrm{sn}_1 v$, $\mathrm{cn}_1 v$ u. s. w. bezeichnet werden.

Ist nun $\mathrm{sn}_1 v = z$, so hat man

$$v = \int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-m_1{}^2 z^2)}} = \int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-\frac{z^2}{m^2})}}.$$

Setzt man nun $z = mz'$, so ergiebt sich

$$v = \int_0^{z'} \frac{m\partial z'}{\sqrt{(1-m^2 z'^2)(1-z'^2)}}, \quad \frac{v}{m} = \int_0^{z'} \frac{\partial z'}{\sqrt{(1-z'^2)(1-m^2 z'^2)}}$$

d. h.

$$z' = \mathrm{sn}\left(\frac{v}{m}\right), \text{ also } \mathrm{sn}_1 v = z = mz' = m\,\mathrm{sn}\left(\frac{v}{m}\right).$$

Hieraus folgt:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{sn}_1 v = m\,\mathrm{sn}\left(\frac{v}{m}\right), \quad \mathrm{cn}_1 v = \mathrm{dn}\left(\frac{v}{m}\right),\\
&\mathrm{tn}_1 v = m\frac{\mathrm{sn}\left(\frac{v}{m}\right)}{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{m}\right)}, \quad \mathrm{ctn}_1 v = \frac{\mathrm{dn}\left(\frac{v}{m}\right)}{m\,\mathrm{sn}\left(\frac{v}{m}\right)},\\
&\mathrm{dn}_1 v = \mathrm{cn}\left(\frac{v}{m}\right).
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (1$$

Es sind noch zwei weitere Modularfunktionen eingeführt worden; da sie aber erst bei den Integralformeln nöthig sind, so schieben wir ihre Theorie dorthin.

§. 13.

Zum Schlusse dieser Abhandlung soll hier eine Anwendung der Formeln des §. 10. gegeben werden. Diese Anwendung trifft die Integralformel

$$y = \int \frac{\partial z}{\sqrt{A + Bz^2 + Cz^4}}.$$

Hierbei sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

I. A ist positiv $= a^2$, C ist dessgleichen positiv $= b^2$, $B = 2\alpha ab$, worin $\alpha^2 < 1$, übrigens α positiv oder negativ.

Man hat also

$$y = \frac{1}{a}\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{1 + \frac{2b\alpha}{a}z^2 + \frac{b^2}{a^2}z^4}} \quad \ldots\ldots (1$$

Wir wollen diese Formel identifiziren mit (6) des §. 10., so ist.

$\frac{b^2}{a^2}z^4 = x^4$, $\frac{b}{a}\alpha z^2 = (m'^2 - m^2)x^2$, woraus $x = z\sqrt{\frac{b}{a}}$, $m = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$.

Demnach

$$y = \frac{1}{a}\int_0^x \frac{\sqrt{\frac{a}{b}}\,\partial x}{\sqrt{1+2(m'^2-m^2)x^2+x^4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1+2(m'^2-m^2)x^2+x^4}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\cdot\frac{v}{2}.$$

Man hat also

$$\left.\begin{aligned} y &= \frac{v}{2\sqrt{ab}}, \\ x &= \sqrt{\frac{1-\operatorname{cn} v}{1+\operatorname{cn} v}} = z\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \operatorname{cn} v = \frac{a-bz^2}{a+bz^2}, \\ m &= \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (2)$$

Durch diese Gleichungen ist nun die Aufgabe gelöst. Man sucht in dem Systeme, dessen Modulus $= \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$, das Argument v, dessen Modularkosinus $= \frac{a-bz^2}{a+bz^2}$, so ist $\frac{v}{2\sqrt{ab}}$ das verlangte Integral.

Da in VI. des §. 10. x geht von 0 bis ∞, so geht z von 0 bis ∞. Für $z=0$ ist vorausgesetzt $y=0$, für $z=\infty$ ist $v=2M$, also $y=\frac{M}{\sqrt{ab}}$. Die Formel (1) giebt also

$$\int_0^\infty \frac{\partial z}{\sqrt{a^2+2ba\alpha z^2+b^2z^4}} = \frac{M}{\sqrt{ab}} \quad \ldots\ldots (3)$$

wenn $\alpha^2<1$. M ist der Modularquadrant für den Modulus $\sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}$.

Da

$$\int_e^z \frac{\partial z}{\sqrt{a^2+2ab\alpha z^2+b^2z^4}}$$

$$= \int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{a^2+2ab\alpha z^2+b^2z^4}} - \int_0^e \frac{\partial z}{\sqrt{a^2+2ab\alpha z^2+b^2z^4}},$$

so ist dieser Fall leicht auf den Vorhergehenden zu bringen.

II. Es ist A positiv $=a^2$, C positiv $=b^2$, B positiv $=2ab\alpha$ und $\alpha > 1$. Alsdann hat man

$$y=\frac{1}{a}\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{1+\frac{2b\alpha}{a}z^2+\frac{b^2}{a^2}z^4}}.$$

Identifizirt man mit III. des §. 10., so hat man

$$\frac{b^2}{a^2}z^4=m'^2x^4,\quad \frac{2b\alpha}{a}z^2=(m'^2+1)x^2,$$

woraus

$$m'=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1},\quad z=\sqrt{\left(\frac{am'}{b}\right)}.x.$$

Demnach

$$y=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{1+(m'^2+1)x^2+m'^2x^4}}=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.v.$$

Daher hat man zur Bestimmung von y das folgende System:

$$y=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.v,$$

$$\text{tn}\,v=z.\sqrt{\left(\frac{b}{am'}\right)},$$

$$m'=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1},\quad m=\sqrt{1-m'^2}.$$

Da in III. des §. 10. x geht von 0 bis ∞, so geht z von 0 bis ∞ für $z=0$ ist vorausgesetzt $y=0$, für $z=\infty$ ist $y=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.M$; daher

$$\int_0^\infty \frac{\partial z}{\sqrt{a^2+2ab\alpha z^2+b^2z^4}}=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.M,$$

wenn a, b, α positiv und $\alpha>1$. M ist der Modularquadrant de Systems, dessen Modulus $=\sqrt{1-m'^2}$, $m'=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$. Di übrige Behandlung ist die gleiche, wie in I.

III. Es ist A positiv $=a^2$, C positiv $=b^2$, B negativ $=-2ab$ und $\alpha>1$, Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

III. 1. $\frac{b}{a}z^2<1$.

$$y=\frac{1}{a}\int_0^z \frac{\partial z}{\sqrt{1-\frac{2b\alpha}{a}z^2+\frac{b^2}{a^2}z^4}}.$$

Identifizirt man mit §. 10. I., so hat man $\frac{b^2}{a^2}z^4=m^2x^4$, $\frac{2b\alpha}{a}z^2=m^2+$ woraus $x=\sqrt{\left(\frac{b}{am}\right)}.z$, $m=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$. Daher

$$y=\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)}\cdot\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-(m^2+1)x^2+m^2x^4}}=\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)}\cdot v.$$

Demnach

$$y=v\cdot\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)},$$

$$\operatorname{sn} v=\sqrt{\left(\frac{b}{am}\right)}\cdot z,$$

$$m=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}.$$

Da x geht von 0 bis 1, so geht z von 0 bis $\sqrt{\frac{am}{b}}$, y von 0 bis $M\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)}$.

III. 2. $\frac{b}{a}z^2>1$. Man identifizire mit VII. des §. 10., es ist, da dort $mv=\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-\left(\frac{m^2+1}{m^2}\right)x^2+\frac{x^4}{m^2}}}$,

$$\frac{b^2}{a^2}z^4=\frac{x^4}{m^2},\quad \frac{2b\alpha}{a}z^2=\frac{m^2+1}{m^2}x^2;$$

woraus

$$x=\sqrt{\left(\frac{mb}{a}\right)}\cdot z,\ m=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1},$$

$$y=\sqrt{\left(\frac{1}{amb}\right)}\cdot\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{1-\frac{m^2+1}{m^2}x^2+\frac{x^4}{m^2}}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{amb}\right)}\cdot mv=\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)}\cdot v.$$

Für VII. des §. 10. geht x von 1 bis ∞, also z von $\sqrt{\left(\frac{a}{mb}\right)}$ bis ∞. Demnach, wenn

$$y=\int_{\sqrt{\frac{a}{mb}}}^{z}\frac{\partial z}{\sqrt{a^2-2ba\alpha z^2+b^2z^4}},\ \alpha>1;$$

so ist

$$y=\sqrt{\left(\frac{m}{ab}\right)}\cdot v,$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn}(M-v)}=\frac{\operatorname{dn} v}{\operatorname{cn} v}=\sqrt{\left(\frac{mb}{a}\right)}\cdot z,$$

$$m=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}.$$

Für $z=\infty$ ist $v=M$, also:

$$\int_{\sqrt{\left(\frac{\alpha}{(\alpha-\sqrt{\alpha^2-1})b}\right)}}^{\infty}\frac{\partial z}{\sqrt{a^2-2ab\alpha z^2+b^2z^4}}=\sqrt{\left(\frac{\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}}{ab}\right)}.M,$$

worin M der Modularquadrant zum Modulus $\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}$ ist.

IV. Es ist A positiv $=a^2$, C negativ $=b^2$, $B=2ab\alpha$, wo α ganz beliebig ist.

Man kann setzen

$$y=\frac{1}{a}\int_0^z\frac{\partial z}{\sqrt{1+\frac{2b\alpha}{a}z^2-\frac{b^2}{a^2}z^4}}.$$

Verglichen mit VIII. des §. 10., wo

$$m'v=\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1+\left(\frac{m^2-m'^2}{m'^2}\right)x^2-\frac{m^2}{m'^2}x^4}},$$

giebt

$$\frac{b^2}{a^2}z^4=\frac{m^2}{m'^2}x^4,\quad \frac{2b\alpha}{a}z^2=\frac{m^2-m'^2}{m'^2}x^2,$$

woraus

$$z=\sqrt{\left(\frac{am}{bm'}\right)}.x,\quad m=\sqrt{\frac{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}},\quad m'=\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}}.$$

Also:

$$y=\sqrt{\left(\frac{m}{abm'}\right)}.\int_0^x\frac{\partial x}{\sqrt{1+\frac{m^2-m'^2}{m'^2}x^2+\frac{m^2}{m'^2}x^4}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{m}{abm'}\right)}.m'v=\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.v.$$

Also

$$y=\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.v,$$

$$\operatorname{cn}(M-v)=m'\frac{\operatorname{sn}v}{\operatorname{dn}v}=\sqrt{\left(\frac{bm'}{am}\right)}.z,$$

$$m=\sqrt{\frac{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}},\quad m'=\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}}.$$

Für VIII. des §. 10. geht x von 0 bis 1, also geht hier z von 0 bis $\sqrt{\left(\frac{am}{bm'}\right)}$.

Für $z=0$ ist $y=0$, für $z=\sqrt{\left(\frac{am}{bm'}\right)}$ ist $y=\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.M$.

V. Es sei A negativ $=-a^2$, C positiv $=b^2$, $B=2ab\alpha$, wenn α beliebig.

$$y=\frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{\sqrt{-1+\frac{2b\alpha}{a}z^2+\frac{b^2}{a^2}z^4}}.$$

Aus IX. des §. 10. folgt

$$mv=\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{-1+\frac{m^2-m'^2}{m^2}x^2+\frac{m'^2}{m^2}x^4}}.$$

Identifizirt man, wie oben, so findet sich $x=\sqrt{\left(\frac{bm}{am'}\right)}.z$,

$m=\sqrt{\frac{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}}$, demnach

$$y=\sqrt{\frac{m'}{abm}}\int_1^x\frac{\partial x}{\sqrt{-1+\frac{m^2-m'^2}{m^2}x^2+\frac{m'^2}{m^2}x^4}}=\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.v.$$

Also

$$y=\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.v,$$

$$\frac{1}{\operatorname{cn} v}=\sqrt{\left(\frac{bm}{am'}\right)}.z,$$

$$m=\sqrt{\frac{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}},\quad m'=\sqrt{\frac{1-\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}}}{2}}.$$

Da x geht von 1 bis ∞, so geht z von $\sqrt{\left(\frac{am'}{bm}\right)}$ bis ∞; y ist 0 für $z=\sqrt{\left(\frac{am'}{bm}\right)}$, ist $\sqrt{\left(\frac{mm'}{ab}\right)}.M$ für $z=\infty$.

VI. Es sei A negativ $=-a^2$, C negativ $=-b^2$, B positiv $=2ab\alpha$, worin $\alpha>1$ sein muss.

$$y=\frac{1}{a}\int\frac{\partial z}{\sqrt{-1+\frac{2b\alpha}{a}z^2-\frac{b^2}{a^2}z^4}}.$$

Aus X. des §. 10. folgt

$$m'v = \int_{m'}^{x} \frac{\partial x}{\sqrt{-1+\left(\frac{m'^2+1}{m'^2}\right)x^2-\frac{x^4}{m'^2}}}$$

Identifizirt man und verfährt wie früher, so erhält man leicht das folgende System:

$$y=\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.v,$$

$$\mathrm{dn}(M-v)=\frac{m'}{\mathrm{dn}\,v}=\sqrt{\left(\frac{bm'}{a}\right)}.z,$$

$$m'=\alpha-\sqrt{\alpha^2-1}.$$

Da x geht von m' bis 1, so geht z von $\sqrt{\frac{am'}{b}}$ bis $\sqrt{\frac{a}{bm'}}$; y ist Null für $z=\sqrt{\frac{am'}{b}}$ und gleich $\sqrt{\left(\frac{m'}{ab}\right)}.M$ für $z=\sqrt{\frac{a}{bm'}}$. Ausserhalb dieser Gränzen kann z nicht treten, wenn die Wurzelgrösse reell bleiben soll. Diese Fälle sind bei der Betrachtung des Integrals

$$\int\frac{\partial z}{\sqrt{A+Bz^2+Cz^4}}$$

aufzuzählen; sie erschöpfen übrigens alle möglichen Fälle.

In einer folgenden Abhandlung wollen wir einige Integralformeln, in denen Modularfunktionen vorkommen, behandeln, so wie eine Erweiterung der Resultate des letzten Paragraphen dieses Aufsatzes geben. Wir wiederholen hier nochmals, dass es durchaus nicht unsere Absicht ist, Neues aufzustellen, vielmehr wollen wir — und das ist, wenn wir nicht irren, eine Haupttendenz des Archivs — zu näherer und leichterer Kenntniss dieses wichtigen Zweiges der Analysis beitragen. Es wurde desshalb unbedenklich Fremdes benützt, zumal dasselbe in grossen Werken aufbewahrt ist, die durchzugehen nicht Jeder Zeit und Lust hat.

XLI.

Ueber die Summirung verschiedener unendlicher Reihen.

Von dem
Herrn Dr. J. Ph. Wolfers,
astronomischen Rechner an der Königlichen Sternwarte zu Berlin.

Wir wollen hier die Summen verschiedener unendlicher Reihen u bestimmen suchen, welche meistentheils in den Lehrbüchern er Differential- und Integralrechnung hergeleitet zu werden pflegen. nseres Wissens wird dort umgekehrt die Summirung nicht geeigt, da dieselbe aber mehrfache Gelegenheit zur Anwendung er höhern Analysis darbietet, so scheint ihre Betrachtung nicht hne Nutzen zu sein.

§. 1. Wir suchen die Summe der unendlichen Reihe

$$\text{I)}\quad 1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\text{ etc.},$$

elche wir, wie stets in diesem Aufsatze, mit s bezeichnen wolln. Durch Differentiation erhalten wir

$$\frac{ds}{dx}=1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}\text{ etc.}=s,$$

lso $\frac{ds}{s}=dx$, und, wenn wir integriren, $\log s=x$, oder

$$\text{I)}\quad s=e^x.$$

ine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil für $x=0$ $s=1$ wird. etzt man $x=1$, so wird

$$s=e=1+1+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}\text{ etc.}=2{,}7182818,$$

o e die Basis der hyperbolischen Logarithmen ist.

§. 2. Es wird gesucht die Summe der unendlichen Re

$$\text{II)}\quad x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}+\text{etc.}=s.$$

Wir erhalten

$$\frac{ds}{dx}=1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}+\text{etc.},$$

$$\frac{dds}{dx^2}=x+\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\text{etc.}=s;$$

also $dds-sdx^2=0$.

Haben wir allgemein die Differentialgleichung zweiter Or

$$adx^2+bsdx^2+cdsdx+hdds=0,$$

deren Integral wir suchen, so setze man

$$s=\alpha+\beta e^{mx},$$

wo α, β und m zu bestimmen sind. Da nun

$$ds=\beta me^{mx}dx \text{ und } dds=\beta m^2e^{mx}dx^2,$$

so erhalten wir, wenn wir diese Werthe in die gegebene Glei substituiren:

$$(a+b\alpha)dx^2+\beta(b+cm+hm^2)e^{mx}dx^2=0,$$

und dieser letztern Gleichung geschieht Genüge, wenn man

$$a+b\alpha=0 \text{ oder } \alpha=-\frac{a}{b}$$

und

$$b+cm+hm^2=0 \text{ oder } m=\frac{-c\pm\sqrt{c^2-4bh}}{2h}=\begin{cases}m'\\m''\end{cases}$$

setzt. Wir erhalten demnach zwei Werthe von m, ferner b der Werth von β unbestimmt, und da eine zweimalige Integr nothwendig zwei unbestimmte Constanten einführen muss; so len wir dieselben durch β' und β'' bezeichnen, und erhalten s Integral

$$s=-\frac{a}{b}+\beta'e^{m'x}+\beta''e^{m''x}.$$

Im vorliegenden Falle ist $a=0$, $b=-1$, $c=0$ und $h=1$, $\frac{a}{b}=0$, $m'=1$ und $m''=-1$; wir haben daher

$$s=\beta'e^x+\beta''e^{-x}.$$

Zur Bestimmung der unbestimmten constanten Grössen β' und β'' haben wir, für $x=0$,

$$s=0=\beta'+\beta'',$$
$$\frac{ds}{dx}=1=\beta'-\beta'';$$

also $\beta'=\frac{1}{2}$ und $\beta''=-\frac{1}{2}$, mithin

$$\text{II)}\quad s=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x})=\frac{e^{2x}-1}{2e^x}.$$

§. 3. Wir suchen die Summe der unendlichen Reihe

$$\text{III)}\quad 1+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}\text{ etc.}=s.$$

Dieselbe stimmt offenbar mit der Reihe überein, welche wir in §. 2. für $\frac{ds}{dx}$ gefunden haben, und da nun nach II) das dortige

$$s=\tfrac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\text{ also }\frac{ds}{dx}=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x});$$

so erhalten wir sogleich in unserm Falle

$$\text{III)}\quad s=\tfrac{1}{2}(e^x+e^{-x})=\frac{e^{2x}+1}{2e^x}.$$

Zusatz 1. Man hätte den eben gefundenen Werth der Summe auch erhalten, wenn man, wie in §. 2., zweimal differentiirt und übrigens das dortige Verfahren beobachtet hätte.

Zusatz 2. Addiren wir die beiden Werthe von s in II) und III), so wird ihre Summe $=e^x$, wie in I). Diess ersieht man auch sogleich, wenn man die Formen der Reihen II) und III) mit der von I) vergleicht.

Zusatz 3. Subtrahirt man die Reihe II) von der III), und eben so die Summe der erstern von der Summe der zweiten; so erhält man

$$\text{IV)}\quad 1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}=\text{etc.}=e^{-x}=\frac{1}{e^x}.$$

Aus der Vergleichung von I) und IV) ersieht man also, dass

$$\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\text{etc.}}=1-x+\frac{x^2}{1.2}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}$$

Zusatz 4. Setzt man in II) und III) $x=1$, so erhält man

$$\text{II)}\quad s'=\tfrac{1}{2}\,\frac{e^2-1}{e}=\tfrac{1}{2}\,\frac{(e+1)(e-1)}{e}=1{,}1752005\ldots,$$

$$\text{III)}\quad s'' = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^2+1}{e} = 1{,}5430807\ldots$$

Ihre Summe wird daher $=2{,}718281\ldots$, und wenn man II) von III) subtrahirt, nach IV):

$$1-1+\frac{1}{1.2}-\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{1.2.3.4}-\text{etc.}=0{,}367880\ldots$$

§. 4. Wir suchen die Summe der unendlichen Reihe

$$\text{V)}\quad x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}=s.$$

Wir erhalten

$$\frac{ds}{dx}=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1.2.3.4.5.6}+\text{etc.},$$

$$\frac{dds}{dx^2}=-x+\frac{x^3}{1.2.3}-\frac{x^5}{1.2.3.4.5}\text{ etc.}=-s;$$

also $dds+sdx^2=0.$

Nach §. 2. haben wir hier $b=1$, $a=0$, $c=0$ und $h=1$, also $m'=\sqrt{-1}$, $m''=-\sqrt{-1}$, und so

$$s=\beta' e^{x\sqrt{-1}}+\beta'' e^{-x\sqrt{-1}}.$$

Für $x=0$ wird aber

$$s=0=\beta'+\beta'' \text{ und } \frac{ds}{dx}=1=\beta'\sqrt{-1}-\beta''\sqrt{-1},$$

also

$$\beta'=\frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ und } \beta''=-\frac{1}{2\sqrt{-1}};$$

mithin

$$\text{V)}\quad s=\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin x.$$

§. 5. Gegeben ist die Reihe

$$\text{VI)}\quad 1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\text{etc.},$$

deren Summe s wir suchen sollen. Dieselbe ist offenbar der Reihe gleich, welche wir in §. 4. für das dortige $\frac{ds}{dx}$ gefunden haben, und da letzteres $=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\cos x$; so erhalten wir unmittelbar

$$\text{VI)}\quad s=\frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2}=\cos x.$$

Denselben Werth hätten wir unmittelbar nach der Methode des §. 4. erhalten können.

§. 6. Wir suchen die Summe der Reihe

$$\text{VII)}\quad x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}\text{ etc.}=s.$$

Wir erhalten

$$\frac{ds}{dx}=1+x^2+x^4+x^6\text{ etc.}=\frac{1}{1-x^2},$$

also

$$ds=\frac{dx}{1-x^2}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dx}{1+x}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{dx}{1-x},$$

und so

$$\text{VII)}\quad s=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Da für $x=0$ $s=0$ und $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=0$ wird, so ist keine Constante hinzuzufügen.

Setzen wir $x=1$, so erhalten wir $\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\log\left(\frac{2}{0}\right)=\log\infty=\infty$, und daher

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}\text{ etc.}=\infty.$$

§. 7. Wir sollen summiren die Reihe

$$\text{VIII)}\quad x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}\text{ etc.}$$

Es wird $\frac{ds}{dx}=1-x^2+x^4-x^6+\text{etc.}=\frac{1}{1+x^2}$,

$$s=\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x,$$

und da für $x=0$ sowohl die Reihe $=0$, als auch $\operatorname{arctg}x=0$, so ist keine Constante hinzuzufügen, und wir haben daher

$$\text{VIII)}\quad s=\operatorname{arctg}x.$$

Setzen wir $x=1$, so wird $\operatorname{arctg}x=\tfrac{1}{4}\pi$, und daher

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}\text{ etc.}=\tfrac{1}{4}\pi.$$

§. 8. Wir können aus der Reihe des §. 6. eben so, wie aus der in §. 1., zwei bilden und dieselben besonders summiren.

Es sei zunächst zu suchen die Summe der Reihe

$$\text{IX)}\quad x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}\text{ etc.}=s.$$

Wir erhalten

$$\frac{ds}{dx}=1+x^4+x^8+\text{etc.}=\frac{1}{1-x^4}=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-x^2},$$

mithin

$$\text{IX)}\quad s=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Sollen wir ferner suchen

$$\text{X)}\quad \frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\frac{x^{11}}{11}\text{ etc.}=s,$$

so wird

$$\frac{ds}{dx}=x^2+x^6+x^{10}\text{ etc.}=\frac{x^2}{1-x^4}=\frac{1-(1-x^2)}{1-x^4}$$

$$=\frac{1}{1-x^4}-\frac{1}{1+x^2},$$

mithin

$$s=\int\frac{dx}{1-x^4}-\int\frac{dx}{1+x^2}=\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x+\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\operatorname{arctg}x;$$

also

$$\text{X)}\quad s=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-\tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}x.$$

Zusatz. Wenn wir einmal X) zu IX) addiren, hierauf erst von letzterer subtrahiren, so ergeben sich sogleich die in VII) u VIII) aufgestellten Reihen nebst ihren Werthen wieder.

§. 9. Es ist zu summiren die Reihe

$$\text{XI)}\quad 1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}\text{ etc.}=s.$$

Da

$$\frac{ds}{dx}=x+x^3+x^5\text{ etc.}=\frac{x}{1-x^2},$$

so wird

$$s=\int\frac{xdx}{1-x^2}=-\tfrac{1}{2}\log(1-x^2)+\text{Const.}$$

Für $x=0$ wird die Reihe $s=1$ und $\log(1-x^2)=0$, mithin

$$\text{Const.}=1,$$

und so

$$\text{XI)}\quad s = 1 - \tfrac{1}{2}\log(1-x^2).$$

zen wir $x=1$, so wird $\log(1-x^2)=\log 0 = -\infty$, und daher

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{6}\text{ etc.} = \infty.$$

§. 10. Wir suchen die Summe der Reihe

$$\text{XII)}\quad 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}\text{ etc.} = s.$$

wird $\frac{ds}{dx} = -x + x^3 - x^5 + \text{etc.} = -\frac{x}{1+x^2}$, also

$$s = -\int\frac{xdx}{1+x^2} = -\tfrac{1}{2}\log(1+x^2) + \text{Const.}$$

r, wie im vorigen Paragraphen, Const. $=1$, also vollständig

$$\text{XII)}\quad s = 1 - \tfrac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Logarithmus ist ein hyperbolischer, und da

$$\tfrac{1}{2}\log\text{hyp}\,2 = 0{,}3465735\ldots.,$$

wird für $x=1$

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{6}\text{ etc.} = 0{,}6534264\ldots.$$

§. 11. Es sei zu summiren die Reihe

$$\text{XIII)}\quad x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\text{ etc.} = s.$$

$$\frac{ds}{dx} = 1 + x + x^2 + x^3 + \text{etc.} = \frac{1}{1-x},$$

wird $s = \int\frac{dx}{1-x} = -\log(1-x) + \text{Const.}$, oder, weil für $x=0$,
) und $\log(1-x)=0$: Const. $=0$ und so

$$\text{XIII)}\quad s = -\log(1-x).$$

Zusatz 1. Setzen wir $x=1$, so wird $\log(1-x) = -\infty$, und
er

$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\text{ etc.} = \infty.$$

Zusatz 2. Setzen wir etwa $x=0{,}01$, so wird

$$\begin{aligned}\log(1-x) = \log 0{,}99 &= \log\text{hyp}\,99 - \log\text{hyp}\,100\\ &= 4{,}5951198 - 4{,}6051701,\end{aligned}$$

hin

$$\frac{1}{100}+\frac{1}{20000}+\frac{1}{3000000}+\frac{1}{400000000}\text{ etc.} = 0{,}0100503\ldots.$$

Zusatz 3. Für $x=\frac{1}{2}$ wird $\log(1-x)=\log(\frac{1}{2})=-$ lo und daher

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{32}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{24}+\frac{1}{64}+\frac{1}{160}+\text{etc.}=0,6931471\ldots$$

§. 12. Wir sollen die Summe der unendlichen Reihe

$$\text{XIV)}\quad x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ \text{etc.}=s$$

bestimmen. Es wird

$$\frac{ds}{dx}=1-x+x^2-x^3\ \text{etc.}=\frac{1}{1+x},$$

also

$$\text{XIV)}\quad s=\log(1+x).$$

Eine Constante ist offenbar nicht hinzuzufügen. Wir erhalt für $x=1$

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}\ \text{etc.}=\log\text{hyp}\,2=0,6931471.$$

§. 13. Zu summiren ist die Reihe

$$\text{XV)}\quad 1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6+\text{etc.}=s.$$

Wir erhalten hieraus durch Differentiation

$$\frac{ds}{dx}=x+\frac{1.3}{2}x^3+\frac{1.3.5}{2.4}x^5+\text{etc.}$$

hierauf, indem wir mit x dividiren und dann integriren:

$$\int\frac{ds}{xdx}=x+\frac{1}{2}x^3+\frac{1.3}{2.4}x^5+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^7\ \text{etc.}$$

oder

$$\int\frac{ds}{xdx}=xs.$$

Differentiirt man diese Gleichung, so erhält man $\frac{ds}{x}=xc$ oder

$$\frac{ds}{s}=\frac{xdx}{1-x^2}\ \text{und}\ \log s=-\tfrac{1}{2}\log(1-x^2),$$

also

$$s^2=\frac{1}{1-x^2}\ \text{und}\ \text{XV)}\ s=\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}.$$

ine Constante ist nicht hinzuzufügen, weil aus beiden Gleichungen XV) für $x=0$ $s=1$ folgt.

Setzen wir $x=1$, so erhalten wir

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\text{ etc.}=\infty.$$

§. 14. Wir sollen summiren

$$\text{XVI)}\quad \frac{x}{1}+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1.3}{2.4.5}x^5+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7\text{ etc.}=s.$$

s wird sogleich $\frac{ds}{dx}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\text{ etc.}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (XV), so

$$s=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+\text{Const.},$$

ler, weil für $x=0$ auch $s=0$ und $\arcsin x=0$:

$$\text{XVI)}\quad s=\arcsin x.$$

ür $x=1$ wird $\arcsin x=\frac{1}{2}\pi$, also

$$\tfrac{1}{2}\pi=1+\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\text{ etc.}$$

§. 15. Sollen wir summiren die Reihe

$$\text{XVII)}\quad 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4-\frac{1.3.5}{2.4.6}x^6\text{ etc.}=s,$$

können wir, durch Vergleichung dieser Reihe mit XV), aus eser unsere jetzt vorliegende herleiten, indem wir $-x^2$ statt x^2 substituiren; wir erhalten daher durch dieselbe Substitution ch sogleich die gesuchte Summe, nämlich

$$\text{XVII)}\quad s=\sqrt{\frac{1}{1+x^2}}.$$

ür $x=1$ erhalten wir

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1.3}{2.4}-\frac{1.3.5}{2.4.6}\text{ etc.}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}=0,7071067\ldots$$

§. 16. Wir suchen die Summe der Reihe

$$\text{XVIII)}\quad \frac{x}{1}-\frac{1.x^3}{2.3}+\frac{1.3x^5}{2.4.5}-\frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7}\text{ etc.}=s,$$

wird $\frac{ds}{dx}=1-\frac{1.x^2}{2}+\frac{1.3x^4}{2.4}-\frac{1.3.5x^6}{2.4.6}\text{ etc.}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (XVII),

$$s=\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\log(x+\sqrt{1+x^2})+\text{Const.}$$

Für $x=0$ wird $s=0$, also Const.$=0$, und so

$$\text{XVIII)}\quad s=\log(x+\sqrt{1+x^2}).$$

Setzt man $x=1$, so wird

$$1-\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\text{ etc.}=\log(1+\sqrt{2}).$$

Da nun $\log\text{br}(1+\sqrt{2})=0{,}3827757$, so wird

$$\log\text{hyp}(1+\sqrt{2})=2{,}30258509\times 0{,}3827757$$

und so

$$1-\frac{1}{2.3}+\frac{1.3}{2.4.5}-\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\text{ etc.}=0{,}8813736.$$

§. 17. Wir suchen die Summe der unendlichen Reihe

$$\text{XIX)}\quad \frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}\text{ etc.}=s.$$

Multipliciren wir dieselbe mit x und differentiiren hierauf, so halten wir

$$\frac{d.(xs)}{ds}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\text{ etc.}=-\log(1-x),\quad \text{(XII}$$

$$xs=-\int dx\log(1-x)=-x\log(1-x)-\int\frac{xdx}{1-x}$$

$$=-x\log(1-x)+\int\frac{1-x-1}{1-x}dx$$

$$=-x\log(1-x)+x+\log(1-x)$$

$$=(1-x)\log(1-x)+x+\text{Const.}$$

Für $x=0$ wird $s=0$ und der gefundene Ausdruck $=0$, d Const.$=0$ und so

$$\text{XIX)}\quad s=\frac{(1-x)\log(1-x)}{x}+1.$$

Für $x=1$ wird

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\text{etc.}=1,$$

indem allgemein

$$\frac{(1-x)\log(1-x)}{x}=\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\text{ etc.}\right)$$

und für $x=1$

$$=0(-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\text{etc.})=0.$$

§. 18. Sollen wir die Reihe

$$\text{XX)}\quad \frac{x}{1.2}-\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}-\frac{x^4}{4.5}\text{etc.}=s$$

summiren, so erhalten wir, wie im vorigen Paragraphen:

$$\frac{d.(xs)}{dx}=\log(1+x), \qquad \text{(XIV)}$$

$$xs=\int\log(1+x)\,dx=x\log(1+x)-\int\frac{x\,dx}{1+x},$$

oder ähnlich wie dort

$$\text{XX)}\quad s=\frac{(1+x)\log(1+x)}{x}-1.$$

Für $x=1$ ergibt sich

$$\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\text{etc.}=2\log\text{hyp}\,2-1=0{,}3862943\ldots$$

§. 19. Wir brechen für jetzt die Summirung der unendlichen Reihen ab, bemerken aber zum Schluss, dass die einzelnen hier aufgestellten Reihen, deren Summen wir aufgesucht haben, nur specielle Fälle derjenigen sind, deren Summe auf die Integration einer bestimmten Function oder Gleichung zurückzuführen Euler in den Abhandlungen der Petersburger Akademie gelehrt hat. Die Integrale, welche dort aufgestellt werden, lassen sich allgemein nicht ausführen, und daher verfiel ich auf den Gedanken, in dem vorstehenden Aufsatze eine Anzahl specieller Reihen aufzustellen und zu summiren. Um aber auch hier eine Andeutung des Verfahrens zu geben, welches Euler dort aufstellt, wollen wir die allgemeine Reihe betrachten:

$$1)\quad s=\frac{x}{(a+b)(c+e)}+\frac{x^2}{(2a+b)(2c+e)}+\ldots\frac{x^n}{(na+b)(nc+e)},$$

deren Gesetz klar vor Augen liegt und welche zunächst endlich sein mag. Man soll ihre Summe $\varDelta$ bestimmen. Multiplicirt man dieselbe mit px^{ϖ} und differentiirt das Product, wobei nur x als veränderlich angesehen wird, so erhalten wir

$$2)\quad \frac{d.(px^{\varpi}s)}{dx}=\frac{p(\varpi+1)x^{\varpi}}{(a+b)(c+e)}+\frac{p(\varpi+2)x^{\varpi+1}}{(2a+b)(2c+e)}+\ldots\frac{p(\varpi+n)x^{\varpi+n-1}}{(na+b)(nc+e)}.$$

Um die noch unbestimmten Grössen p und ϖ zweckmässig zu bestimmen, setzen wir, und zwar unabhängig von dem Werthe von n:

$$p(\overline{\omega}+n)=na+b, \text{ also } p=a \text{ und } \overline{\omega}=\frac{b}{p}=\frac{b}{a},$$

und erhalten so

$$3)\quad \frac{ad\,(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx}=\frac{x^{\frac{b}{a}}}{c+e}+\frac{x^{\frac{b}{a}+1}}{2c+e}+\dots+\frac{x^{\frac{b}{a}+n-1}}{nc+e}.$$

Diese Gleichung multipliciren wir auf's neue mit mx^{μ} und differentiiren das Product, alsdann erhalten wir

$$4)\quad am.\frac{d.(x^{\mu}.\frac{d(x^{\frac{b}{a}}s)}{dx})}{dx}=\frac{m(\frac{b}{a}+\mu)x^{\frac{b}{a}+\mu-1}}{c+e}+\frac{m(\frac{b}{a}+\mu+1)x^{\frac{b}{a}+\mu}}{2c+e}+\dots$$
$$+\frac{m(\frac{b}{a}+n+\mu-1)}{nc+e}x^{\frac{b}{a}+n+\mu-2}.$$

Um m und μ zweckmässig zu bestimmen, setzen wir, und zwar unabhängig von dem Werthe von n,

$$m(\frac{b}{a}+n+\mu-1)=nc+e, \text{ also } m=c \text{ und } \mu=1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c},$$

und erhalten so

$$5)\quad \frac{acd.\{x^{1-\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}d.(x^{\frac{b}{a}}s)\}}{dx^2}=x^{\frac{e}{c}}+x^{\frac{e}{c}+1}+\dots x^{\frac{e}{c}+n-1}=x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right).$$

Integrirt man nun zweimal, so erhält man

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\int x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}-1}dx\int x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)dx,$$

oder, wenn man partiell nach der Weise $\int ydx=yx-\int xdy$ integrirt,

$$s=\frac{1}{acx^{\frac{b}{a}}}\left\{\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}}{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}}{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}x^{\frac{e}{c}}\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)dx\right\},$$

$$6)\quad s=\frac{x^{\frac{b}{a}-\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1-x^n}{1-x}\right)}{(bc-ae)x^{\frac{b}{a}}}.$$

Ist $n=\infty$ und wird, damit die Reihe nothwendig convergire, $x<1$ vorausgesetzt, so wird $x^n=0$ und so die Summe der, als unendlich vorausgesetzten, Reihe

$$7)\quad s=\frac{x^{\frac{b}{a}+\frac{e}{c}}\int x^{\frac{e}{c}}dx\left(\frac{1}{1-x}\right)-\int x^{\frac{b}{a}}dx\left(\frac{1}{1-x}\right)}{(bc-ae)\,x^{\frac{b}{a}}}.$$

Setzt man in 1) und 7) $a=1,\ b=0,\ c=1,\ e=1$; so erhält man

$$s=\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\frac{x^4}{4.5}\text{ etc. in infinitum}$$

$$=\frac{\int\frac{xdx}{1-x}}{-x}+\int\frac{dx}{1-x}=1+\frac{\log(1-x)}{x}-\log(1-x)$$

$$=1+\frac{(1-x)\log(1-x)}{x},$$

wie in §. 17.

Wie man zu verfahren hat, wenn die einzelnen Potenzen von x in der vorausgesetzten Reihe bestimmte, gesetzmässig fortgehende Nenner haben, ersieht man aus dem eben aufgeführten Falle. Wir wollen nun noch kurz andeuten, wie man zu verfahren hat, wenn die einzelnen Potenzen Factoren haben, welche nach einem bestimmten Gesetze fortgehen. Sucht man die Summe der Reihe

$$1)\quad s=(a+b)(c+e)x^{\alpha}+(2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta}\ldots(na+b)(nc+e)x^{\alpha+(n-1)\beta},$$

so multiplicire man dieselbe mit $px^{\varpi}dx$ und erhält:

$$2)\quad px^{\varpi}sdx=p(a+b)(c+e)x^{\alpha+\varpi}dx$$
$$+p(2a+b)(2c+e)x^{\alpha+\beta+\varpi}\ldots p(na+b)(nc+e)x^{\alpha+(n-1)\beta+\varpi}.$$

Zur Bestimmung von p und ϖ setze man, unabhängig von n,

$$\alpha+(n-1)\beta+\varpi=p(cn+e)-1),$$

also

$$p=\frac{\beta}{c}\text{ und }\varpi=\frac{\beta e+\beta c-\alpha c-c}{c};$$

und wenn man diese Werthe substituirt, hierauf aber integrirt, so erhält man

$$3)\quad \frac{\beta}{c}\int x^{\frac{\beta e+\beta c-\alpha c-c}{c}}sdx=(a+b)x^{\alpha+\varpi+1}+\ldots(na+b)x^{\alpha+(n-1)\beta+\varpi+1},$$

wo wir der Kürze wegen ϖ auf der rechten Seite haben stehen lassen. Multiplicirt man diese Gleichung wieder mit

$$m x^{\mu} dx,$$

setzt hierauf, unabhängig von n:

$$anm+bm=\alpha+n\beta-\beta+\varpi+\mu+2,$$

also

$$m=\frac{\beta}{a},\ \mu=\frac{\beta b-\alpha a+\beta a-\varpi a-2a}{a}=\frac{\beta bc-ac-\beta ae}{ac};$$

so erhält man, nach Substitution dieser Werthe und ausgeführter Integration,

$$4)\ \frac{\beta^2}{ac}\int x^\mu dx\int x^\varpi s dx$$

$$=x^{\alpha+\varpi+\mu+2}+x^{\alpha+\varpi+\mu+2+\beta}\ldots.+x^{\alpha+\varpi+\mu+2+(n-1)\beta}=x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}\cdot\frac{1-x^{n\beta}}{1-x^\beta}.$$

Ist $n=\infty$ und $x<1$, also die Reihe unendlich, so wird

$$x^{n\beta}=0$$

und so

$$5)\ \frac{\beta^2}{ac}\int x^\mu dx\int x^\varpi s dx=\frac{x^{\frac{\beta(a+b)}{a}}}{1-x^\beta}.$$

Wenn man diese Gleichung nun zweimal differentiirt, wird man aus ihr s erhalten.

XLII.

Vermischte kleinere geometrische Bemerkungen.

Von
Herrn Dr. Wilhelm Matzka,
Professor der Mathematik zu Tarnow in Galizien.

I. Reihe zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Kreisabschnittes aus seiner Sehne und Sagitte.

Der Feldmesser sieht sich bei der Berechnung der Flächeninhalte krummlinig begrenzter Grundstücke öfters in der Lage, Bogen ihres Umfanges nahe für Kreisbogen ansehen zu dürfen; wonach er dann für die, von den angehörigen Sehnen abgeschnit-

tenen Kreisabschnitte aus ihrer leicht auszumessenden Sehne und Sagitte, als aus Grundlinie und Höhe, die Flächeninhalte berechnen kann. Zu diesem Zweck lässt sich eine oft rasch convergente Reihe aufstellen, die ich in einem Lehrvortrage über praktische Geometrie durch weitwendige Integralrechnung abgeleitet finde, wofür ich die folgende kürzere Herleitung setzen möchte.

Sei (Taf. VIII. Fig. 5.) in dem Kreisabschnitte $ABCA$ die halbe Sehne $=k$, die Sagitte oder der Pfeil $DC=p$. Für den zunächst zu suchenden Halbmesser $OA=OC=r$ gibt das Dreieck ADO die Gleichung $r^2=(r-p)^2+k^2$, und daher den Halbmesser $r=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{p}+p\right)$.

Setzen wir zur Hilfe der Winkel $AOC=\varphi$, so ist im rechtwinklichen Dreiecke ACD der Winkel $CAD=\frac{1}{2}\varphi$, daher

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi=\frac{p}{k}.$$

Nun ist

$$\text{Kreisabschn. } ABCA=\text{Kreisaussch. } OACBO-\text{Dreieck } ABO,$$

dazu

$$OACBO=\tfrac{1}{2}OA\,.\,\operatorname{arc}ACB=\tfrac{1}{2}r\,.\,r\frac{2\varphi}{\Gamma}=r^2\frac{\varphi}{\Gamma},$$

wenn Γ den Gehren, d. i. denjenigen Winkel bezeichnet, dessen bestimmender Kreisbogen seinem Halbmesser gleicht.

Die vorige Gleichung gibt aber $\frac{1}{2}\frac{\varphi}{\Gamma}=\operatorname{angtang}\frac{p}{k}$, daher ist

$$OACBO=2r^2\,.\operatorname{angtang}\frac{p}{k}.$$

Ferner ist des Dreieckes ABO Höhe $DO=r-p=\frac{1}{2}\left(\frac{k^2}{p}-p\right)$, daher sein Flächeninhalt $=\frac{1}{2}AB.DO=\frac{1}{2}k\left(\frac{k^2}{p}-p\right)$.

Hieraus folgt des Kreisabschnittes $ABCA$ Flächeninhalt:

$$f=\tfrac{1}{2}k^2\left[\left(\frac{k}{p}+\frac{p}{k}\right)\operatorname{angtang}\frac{p}{k}-\left(\frac{k}{p}-\frac{p}{k}\right)\right],$$

und man sieht sich dadurch aufgefordert, zur Abkürzung das Verhältniss $\frac{p}{k}$ einfach durch t zu bezeichnen, wonach man erhält

$$2\frac{f}{k^2}=\left(\frac{1}{t^2}+2+t^2\right)\operatorname{angtang}t-\frac{1}{t}+t.$$

Setzt man noch für einen Augenblick

$$\left(\frac{1}{t^2}+1\right)\operatorname{angtang}t-\frac{1}{t}=A,$$

$$(1+t^2)\,\text{angtang}\,t+t=B,$$

und hierin $\text{angtang}\,t=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9\ldots.$, so wird

$$A=\frac{1}{t}-\frac{1}{3}t+\frac{1}{5}t^3-\frac{1}{7}t^5+\frac{1}{9}t^7\ldots.$$

$$-\frac{1}{t}+t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\ldots.$$

$$=2\left(\frac{t}{3}-\frac{t^3}{3.5}+\frac{t^5}{5.7}-\frac{t^7}{7.9}\ldots.\right),$$

$$B=t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\ldots.$$

$$+t+t^3-\frac{1}{3}t^5-\frac{1}{5}t^7\ldots.$$

$$=2\left(t+\frac{t^3}{1.3}-\frac{t^5}{3.5}+\frac{t^7}{5.7}\ldots.\right);$$

daher

$$\frac{f}{k^2}=\frac{A+B}{2}=4\left(\frac{t}{3}+\frac{t^3}{1.3.5}-\frac{t^5}{3.5.7}+\frac{t^7}{5.7.9}\ldots.\right),$$

und endlich

$$f=(2k^2)\left[\frac{1}{3}\left(\frac{p}{k}\right)+\frac{1}{1.3.5}\left(\frac{p}{k}\right)^3-\frac{1}{3.5.7}\left(\frac{p}{k}\right)^5+\frac{1}{5.7.9}\left(\frac{p}{k}\right)^7\ldots.\right]$$

Für die Rechnung wird man diese Reihe bequemer so gestalten:

$$f=\underset{\text{I}}{\frac{4kp}{3}}+\underset{\text{II}}{\frac{\text{I}}{5}\left(\frac{p}{k}\right)^2}-\underset{\text{III}}{\frac{1.\text{II}}{7}\left(\frac{p}{k}\right)^2}+\underset{\text{IV}}{\frac{3.\text{III}}{9}\left(\frac{p}{k}\right)^2}-\underset{\text{V}}{\frac{5.\text{IV}}{11}\left(\frac{p}{k}\right)^2}\ldots.$$

Die Reihe wird rasch convergiren, wenn des Kreisabschnittes Grundlinie k in Vergleich gegen seine Höhe p hinreichend gross ist, was in dem erwähnten Falle der Anwendung immer statt findet.

II. Ueber die Möglichkeit, einer Pyramidenstumpfe ein Prisma ein- oder umzuschreiben.

Um den Ausdruck des Körperinhaltes einer Pyramide abzuleiten oder die Gleichheit zweier Pyramiden von gleichen Grundebenen und Höhen nachzuweisen, muss man selbe durch Ebenen parallel zur Grundebene in Pyramidenstumpfe (abgekürzte Pyramiden) zerschneiden, und jedem derselben ein Prisma sowohl ein- als umschreiben. Dass letzteres nicht immer thunlich

sei, habe ich noch in keinem Lehrbuche der Stereometrie bemerkt gefunden; wesswegen ich hier auf dieses Uebersehen aufmerksam machen will.

I. *Das Ein- und Umschreiben von Prismen bei Pyramidenstumpfen ist sicher, aber auch nur dann möglich*, wenn die Grundebene der Pyramide ein so gestaltetes Vieleck ist, dass sich in seinem Innern oder Umfange wenigstens Ein Punkt so annehmen lässt, dass sämmtliche aus ihm zu den Vielecksspitzen gehenden Radienvectoren weder ganz, noch auch blos zum Theil ausser das Vieleck fallen. Da wird jedesmal die durch einen solchen Punkt und durch die Spitze der Pyramide gehende Gerade die *Richtlinie* der ein- und umzuschreibenden Prismen, d. i. diejenige gerade Linie sein, zu der die Seiten der Prismen parallel werden müssen; und *der* Punkt mag hier kurz der *Richtpunkt* dieser Richtlinie heissen.

Weil alle zur Grundebene der Pyramide parallelen Schnitte ihr ähnlich sind, so muss auch der Einschnittspunkt der Richtlinie in jeden solchen Schnitt der in diesem Schnitte befindliche Richtpunkt und Stellvertreter des in der Grundebene selbst vorhandenen Richtpunktes der Richtlinie sein. Dadurch ist uns der *Vortheil* geboten, anstatt der ganzen Pyramide nur irgend einen ihrer Stumpfe betrachten zu können.

Seien demnach (Taf. VIII. Fig. 6.) Q und Q' die Richtpunkte in der unteren und oberen Grundebene eines Pyramidenstumpfs, O die Spitze der ganzen Pyramide, A und A' einander entsprechende, in einerlei Seitenkante $OA'A$ gelegene Spitzen dieser Grundebenen, OA und $O'A'$ die Strahlen aus Q, Q' an A, A', welche

1. *nirgends ausser die Grundebene fallen sollen.* Führt man nun zur Richtlinie $OQ'Q$ parallel die prismatischen Seitenkanten $A'a'$ und Aa; so fällt a' *in* und a *ausser* die Grundebene, also $A'a'$ *in* und Aa *ausser* den Pyramidenstumpf; wofern man jenes In auch noch im Umfange der Grundebene und in der Umfläche des Stumpfes gelten lässt.

Denn wegen des Parallelismus der Grundebenen des Stumpfes sind auch ihre Durchschnittslinien OA, $O'A'$ mit der Ebene (OA, OQ) unter sich parallel, folglich ist $QA:Q'A'=OQ:OQ'$; daher wegen $OQ > OQ'$ auch $QA > Q'A'$. Weil ferner $Aa \parallel QQ' \parallel A'a'$ ist, muss $Q'A'=Qa'$ und $QA=Q'a$ sein, daher ist $QA > Qa'$ und $Q'a > Q'A'$. Mithin liegt a jederzeit ausserhalb, a' dagegen niemals ausserhalb, sondern so wie der Strahl QA in, d. h. entweder innerhalb oder im Umfange, der Grundebene.

Da ein Gleiches auch an allen Eckpunkten der Grundebenen gilt, so muss das über der $\begin{smallmatrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{smallmatrix}$ Grundebene des Pyramidenstumpfes aufgerichtete Prisma diesem Stumpfe $\begin{smallmatrix}\text{ein-}\\ \text{um-}\end{smallmatrix}$geschrieben, folglich *sicher* $\begin{smallmatrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{smallmatrix}$ als er sein.

2. *Liegt der Strahl QA ganz ausser der Grundebene*, so liegt (in Taf. VIII. Fig. 6.) a' gewiss auch *ausser-*

halb derselben, und der Richtpunkt *Q* liegt (Taf. VIII. Fig. 7.) in einer Grundseite *FG*, an deren einem Eckpunkte *F* nothwendig ein eingehender Winkel sich befindet, dessen Inneres so wie bei *F'* in der Zeichnung (Taf. VIII. Fig. 7.) durch Schraffirung angedeutet sein möge. Wird nun die prismatische Seitenkante *Ff* || *QO* geführt, so muss (wenigstens im Allgemeinen) der Punkt *f* ins Innere der oberen Grundebene fallen.

3. Befindet sich der Strahl *OA zum Theil* ausser der Grundebene, so liegt (in Taf. VIII. Fig. 6.) der Punkt *a'* wenigstens im Allgemeinen auch ausserhalb derselben, und dieser Strahl schneidet (Taf. VIII. Fig. 8.) eine Grundseite *FG*, an deren einem Eckpunkte *F* nothwendig ein eingehender Winkel sich befindet. Zieht man die prismatische Seite *Ff* || *QO*, so muss wenigstens für gewöhnlich der Punkt *f* ins Innere der oberen Grundebene zu liegen kommen.

Aus beiden letzteren Untersuchungen erhellet demnach, dass, sobald auch nur ein einziger Strahl aus einem angenommenen Richtpunkte an irgend einen Eckpunkt der Grundebene ganz oder zum Theil ausser dieselbe fällt, weder das über der oberen Grundebene des Pyramidenstumpfes errichtete Prisma ganz in ihn, noch das über seiner unteren aufgestellte Prisma ganz ausser ihn falle, folglich auch nicht mit Sicherheit angegeben werden könne, dass das erstere Prisma kleiner und das letztere grösser als der Pyramidenstumpf sei; und gerade auf diese Sicherheit kommt hier Alles an.

II. Was nun die Gestalt der Grundebene anbelangt, bei welcher geeignete Richtpunkte möglich sind, oder bei der das Ein- und Umschreiben von Prismen in und um die Pyramidenstumpfe ausführbar ist; so hängt selbe — wie aus dem Vorigen einleuchtet — von der Menge, Lage und Grösse ihrer eingehenden Winkel ab.

1. Hat insbesondere die Grundebene gar keinen eingehenden, also lauter ausgehende Winkel, wie vornehmlich das Dreieck, so liegt in der Oeffnung jedes Umfangswinkels eines solchen Vieleckes das ganze Vieleck selbst; mithin ist jeder innere und Umfangspunkt dieses Vieleckes zu einem Richtpunkte tauglich, nemlich so gelegen, dass keiner der aus ihm an die Vielecksspitzen führenden Strahlen den Umfang des Vieleckes überschreitet.

2. Kommt in der Grundebene ein einziger eingehender Winkel vor und verlängert man die ihn bildenden Seiten in das Innere des Vieleckes, bis sie abermals dessen Umfang treffen; so machen diese Verlängerungen einen hohlen Winkel, in welchem ein Vieleck von lauter ausgehenden Winkeln liegt, dessen jeder innere und Umfangspunkt zu einem Richtpunkte sich eignet.

3. Kommen in der Grundebene mehrere eingehende Winkel vor, so wird man die eingehenden Seiten jedes solchen Winkels in das Innere des Vieleckes und bis zu dessen Umfang verlängern. Findet man dann ein — wenn auch noch so kleines — Vieleck, das in dem hohlen Winkel jedes Paares von Verlängerungen der Schenkel eines eingehenden Winkel zugleich liegt, so ist jeder innere und Umfangspunkt desselben zu einem Richt-

punkte geeignet. Gibt es aber kein solches Vieleck, so gibt es auch keinen tauglichen Richtpunkt, oder jenes Ein- und Umschreiben von Prismen ist bei einer so gestalteten Grundebene der Pyramide unausführbar.

III. Eine Grundebene ohne einen geeigneten Richtpunkt lässt sich durch Diagonalen aus den Scheiteln der eingehenden Winkel oder durch andere Geraden leicht in Vielecke zertheilen, deren jedes einzeln einen tauglichen Richtpunkt hat; insbesondere in Vielecke mit lauter ausgehenden Winkeln, vornehmlich durchaus in Dreiecke. Dann werden die durch diese Theilungslinien und durch die Spitze der Pyramide gelegten Ebenen die Pyramide sowohl, als auch jeden Stumpf derselben in lauter solche zerschneiden, dass ihnen einzeln, zu eigenthümlichen Richtlinien parallel, Prismen ein- und umgeschrieben werden können; und man erhält dann anstatt eines einzigen ein- oder umgeschriebenen Prisma's ein System (oder einen Complex) ein- oder umgeschriebener Prismen, von denen das eingeschriebene zusammengefasst gewiss kleiner, das umgeschriebene System aber gewiss grösser als der betreffende Pyramidenstumpf ist. Durch solchen Vorgang wird sofort der allseitige Bestand der Eingangs erwähnten Lehren vollständig gerechtfertiget werden.

Zum Schlusse möge noch bemerkt werden, dass in jenen Lehrbüchern der Stereometrie, deren Zweck eine solche umständliche Erörterung des in Rede stehenden Gegenstandes verwehrt, wenigstens die so eben angeführte vorläufige Zertheilung der Grundebene und der Pyramide vorgenommen werden sollte, auf dass der Allgemeingiltigkeit der aufzustellenden Lehrsätze kein Eintrag geschehe.

III. Ueber die Berechnung der Mantelfläche jeglichen Cylinders.

Bemerkung zu dem Aufsatze im 10. Bde., 2. H., Nr. XXI., S. 222. des Archivs.

Es dürfte wohl manchem Geometer gleich mir befremdlich vorkommen, warum man in allen Lehrbüchern der Stereometrie zwar die Berechnung der Mantel- oder Umfläche des schiefen Prisma nach folgendem Satze lehrt:

„Die Mantelfläche eines schiefen (eigentlich eines jeden) Prisma ist gleich dem Producte aus der Seitenkante in den Umfang des (auf dieser Kante senkrechten) Querschnittes;"

und gleichwohl diese Berechnungsweise nicht auch auf den Cylinder überträgt, und sohin (wie ich dies alljährlich zu thun pflege) den Lehrsatz aufstellt:

„Die Mantelfläche jedes (senkrechten oder schiefen) Cylinders — mag seine Grundebene von einer krummen oder gemischten Linie begrenzt sein — gleicht dem Producte aus seiner Seite (oder Axe) in den Umfang des (auf der Seite oder Axe senkrechten) Querschnittes."

Lässt sich doch leicht begreifen, dass der Cylinder die Grenze ist, der sich ein ihm eingeschriebenes Prisma ohne Ende nähert, wenn die Anzahl der ihnen beiden gemeinschaftlichen Seiten unendlich wächst und der Abstand der benachbarten solchen Seiten unendlich abnimmt; und dass, während die Seite stets ihre Länge behält, die Grundebene und der Querschnitt des Prisma der Grundebene und dem Querschnitte des Cylinders ohne Ende sich nähern, mithin in den Rechnungen die veränderlichen Stücke des Prisma durch ihre unerreichbaren Grenzstücke des Cylinders ersetzt werden dürfen.

Diese Unterlassung darf man keineswegs damit rechtfertigen wollen, dass man den Umfang des Querschnittes eines Cylinders nur selten aus gewissen Abmessungen desselben nach einfachen Rechnungsvorschriften berechnen könne; ist ja so etwas auch fast nie bei einem Prisma möglich. Allein bei diesem meint man könne des Querschnittes Umfang leicht gezeichnet und jede einzelne Seite desselben mit Zirkel und Maassstab scharf gemessen werden, was sich jedoch nicht auch am Cylinder mit diesen Werkzeugen vollbringen lässt. Aber selbst wenn man von dem Interesse der rein wissenschaftlichen Betrachtung dieses Satzes absehen und die Wissenschaft nur zur Dienerin des praktischen Nutzens machen wollte, würde man noch kein Recht haben, ihn zu beseitigen. Denn gerade dem Praktiker bleibt es noch mehr als dem neueren Theoretiker freigestellt, von der Einschränkung der alten Geometer, Alles nur mit Lineal und Zirkel construiren zu sollen, abzugehen, daher zur Messung des Umfangs des Querschnittes eines Cylinders nach Maass der gewünschten Genauigkeit einen dünneren oder dickeren biegsamen Faden oder Drath, einen Streifen Papier oder Messing u. dgl., den man rings um den Cylinder nach dem Umfange seines Querschnittes auflegt, oder andere Mittel zu benützen. Man wende hiegegen nicht ein, derlei Messung sei wenig verlässlich; denn Gleiches hat man ja nicht minder bei einem Prisma von vielen, schmalen und gegen einander sehr geneigten Seitenebenen zu besorgen.

Indess scheint mir der Grund solcher Auslassung hauptsächlich darin zu liegen, dass die Lehrbücher der Elementar-Mathematik noch immer zu sehr am alten Herkommen hangen, ihren Lehrstoff nicht den Bedürfnissen der höheren und angewandten Mathematik anpassend erweitern, insbesondere weder in der allgemeinen Grössenwissenschaft die Lehre von der Veränderlichkeit der Grössen und ihrem Streben zu gewissen Grenzen, noch in der Stereometrie die Lehre von den Flächen, abgesehen von den Körpern, also schon vor diesen, ohne Rücksicht ob sie Körper begrenzen oder nicht, nach ihren Eigenschaften, Schnitten u. dgl. abhandeln. In meinen Lehrvorträgen habe ich diese Fehler zu vermeiden gestrebt, und namentlich die Flächen von den Körpern gesondert behandelt, ungefähr nach dem Muster der analytischen und descriptiven Geometrie (zu denen doch die elementare vorbereiten soll), jedoch stets und streng in rein geometrischer oder synthetischer Weise. Zur Andeutung meines Vorgangs möge hier Folgendes genügen. Ich unterscheide nebst den ebenen noch gebrochene, krumme und gemischte, ferner offene und geschlossene Flächen. Von den gebrochenen Flächen hebe ich hervor:

1. die prismatischen (insbesondere parallelepipedischen), aus lauter Streifen (von Parallelenpaaren, den Seiten zweiseitig begrenzt) zusammengesetzt, also gleich diesem ins Unendliche ausgedehnt, theils offen, theils geschlossen, wie z. B. die ins Unendliche erweiterte Umfläche eines Prisma; 2. die pyramidischen, aus lauter Scheitel-Winkelblättern zusammengestellt, beiderseits ins Unendliche ausgedehnt, ebenfalls entweder offen oder geschlossen; 3. die polyedrischen (eckigen). Von den krummen Flächen betrachte ich: 1. die Kugelflächen, 2. die Cylinderflächen, 3. die Kegelflächen, 4. die Umdrehungsflächen, 5. die s. g. Flächen zweiter Ordnung, vornehmlich das dreiaxige Ellipsoid.

In einer solchen Lehre ersieht man leicht die Giltigkeit der folgenden Erweiterung obigen Lehrsatzes:

Sind auf was immer für einer $\begin{matrix}\text{prismatischen}\\\text{cylindrischen}\end{matrix}$ Fläche zwei (gleichviel ob ebene oder unebene) jedenfalls krumme gebrochene oder krumme Linien zu einander parallel gezogen, so ist der Flächeninhalt der von ihnen und den beiden Schlussseiten eingegrenzten Figur gleich dem Producte aus der Seite in die Länge des (darauf senkrechten) Querschnittes der Figur, welcher hier natürlich nur eine Durchschnittslinie, nicht aber eine geschlossene Durchschnittsfigur ist.

XLIII.

Einfacheres Verfahren, die Reihen der Cosinus und Sinus der auf einander folgenden Vielfachen eines Winkels zu summiren.

Von dem

Herrn Schulrath J. H. T. Müller,

Director des Realgymnasiums zu Wiesbaden.

Die beiden Reihen

$$u = 1 + \cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos n\varphi,$$
$$v = \sin\varphi + \sin 2\varphi + \sin 3\varphi + \ldots + \sin n\varphi$$

werden bekanntlich jede einzeln dadurch summirt, dass man die Gleichungen mit $2\cos\varphi$ multiplicirt, um die Producte von den beiden Formen:

$$2\cos\lambda\cos\mu,\quad 2\sin\lambda\cos\mu$$

beziehungsweise in die zwei Summen

$$\cos(\lambda+\mu)+\cos(\lambda-\mu),\quad \sin(\lambda+\mu)+\sin(\lambda-\mu)$$

verwandeln zu können und so jedesmal zwei nur in ihren Anfangs- und Endgliedern von einander verschiedene Reihen zu erhalten, die sich dann, nach Einführung von u und v, dadurch vereinfachen lassen, dass man $1-\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ durch Functionen der halben Winkel ausdrückt und die Aggregate von der Form $\sin\lambda\pm\sin\mu$ etc. in Producte verwandelt.

Nach der hier zu zeigenden Methode dagegen erscheint die obige Aufgabe als ein besonderer Fall folgender allgemeineren:

Die Summe der natürlichen Potenzen des reducirten Ausdrucks

$$\cos\varphi+i\sin\varphi$$

von der nullten an bis zur $n$ten, d. i.

$$\Sigma(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\mathfrak{a}},$$

für $\mathfrak{a}=0$ bis $\mathfrak{a}=n$, zu finden.

Da

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^0+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^1+\ldots+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$$
$$=\frac{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{n+1}}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}$$

und die Potenzirung eines reducirten Ausdrucks sich in eine Multiplication des Winkels mit dem Exponenten verwandelt, so hat man, wegen $1-\cos\varphi=2\sin\frac{1}{2}\varphi^2$ und $\sin\varphi=2\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi$,

$$\Sigma(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\mathfrak{a}}=\frac{1-\cos(n+1)\varphi-i\sin(n+1)\varphi}{1-\cos\varphi-i\sin\varphi}$$
$$=\frac{2\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi^2-2i\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi\cos\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{2\sin\frac{1}{2}\varphi^2-2i\sin\frac{1}{2}\varphi\cos\frac{1}{2}\varphi}$$
$$=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi-i\cos\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi-i\cos\frac{1}{2}\varphi}.$$

Multiplicirt man jetzt Zähler und Nenner des zweiten Factors mit $\sin\frac{1}{2}\varphi+i\cos\frac{1}{2}\varphi$, so erhält man nach gehöriger Entwickelung und Vereinfachung im Zähler und nach Beseitigung des Nenners

$$\text{I.}\quad \Sigma(\cos\varphi+i\sin\varphi)^{\mathfrak{a}}=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}(\cos\tfrac{1}{2}n\varphi+i\sin\tfrac{1}{2}n\varphi).$$

Es ist aber auch

$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^0+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^1+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2+\ldots.+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$
$=\cos 0+i\sin 0+\cos\varphi+i\sin\varphi+\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi+\ldots.+\cos n\varphi+i\sin n\varphi,$

olglich

$$\text{II.}\quad \Sigma(\cos\varphi+i\sin\varphi)^a=(1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots.+\cos n\varphi)$$
$$+i(\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots.+\sin n\varphi),$$

olglich

$$\text{II.}\quad \Sigma(\cos a\varphi)+i\Sigma(\sin a\varphi)=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\cos\tfrac{1}{2}n\varphi+i\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}\sin\tfrac{1}{2}n\varphi.$$

Da nun die reellen und imaginären Theile für sich einander gleich sein müssen, so ist

$$\text{IV.}\quad 1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots.+\cos n\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.\cos\tfrac{1}{2}n\varphi;$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\ldots.+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{1}{2}(n+1)\varphi}{\sin\frac{1}{2}\varphi}.\sin\tfrac{1}{2}n\varphi.$$

Diese, so viel ich weiss, bisher noch nicht angewendete Herleitungsweise scheint mir nicht bloss kürzer, sondern auch directer als die oben angedeutete gewöhnliche zu sein. Vielleicht findet in dieser neuen Gestalt die Summirung jener so wichtigen Reihen Eingang in die Elemente der Goniometrie.

XLIV.

Erörterung einer Spielerei durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Von dem

Herrn Doctor E. W. Grebe,

Gymnasiallehrer zu Cassel.

Es ist eine nicht ungewöhnliche, auch als Orakel benutzte Spielerei, dass man einige Grashalme oder ähnliche Gegenstände, die wir mit ab, cd, ef u. s. w. bezeichnen wollen, in der Mitte umbiegt, ferner nachdem dieselben so verdeckt sind, dass man den Lauf derselben nicht verfolgen kann, die freien Enden a, b, c, d, e, f u. s. w. zu zweien verknüpft, und endlich nachsieht,

ob durch diese Operation eine geschlossene Kette, ein entstanden ist. Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, d Sache ganz dieselbe bleibt, wenn man die Grashalme in ter Anzahl nimmt, und dieselben dann auf beiden Seiten ve Die Wahrscheinlichkeit der Entstehung eines Kranzes bei Spielerei kann durch eine so einfache Formel ausgedrückt dass dieser Umstand es entschuldigen wird, wenn wir die hier kurz erörtetn.

Nehmen wir nur einen Halm, so entsteht jedenfalls ein da nur die eine Verknüpfung ab möglich ist; die Wahrsch keit ist $=\frac{1}{1}$. Bei zwei Halmen liefern die Verknüpfungen und ad, bc einen Kranz, während die Verknüpfung ab, cd gibt; die Wahrscheinlichkeit des Kranzes ist $=\frac{2}{3}=\frac{1.2}{1.3}$. I Halmen belehrt uns eine Aufzählung der hier möglichen f Verknüpfungen bald, dass acht derselben einen Kranz dass also die Wahrscheinlichkeit eines solchen $=\frac{8}{15}=\frac{1.2}{1.3}$ Wir werden hierdurch zu der Vermuthung geleitet, dass bei men die Wahrscheinlichkeit des Kranzes $=\frac{1.2.4.6....(2n-4).}{1.3.5.7....(2n-3).}$ sein werde, und die allgemeine Betrachtung bestätigt die muthung vollkommen.

Wir wenden uns zuerst zu dem Nenner des hingestellt drucks, und beweisen, dass die Zahl aller möglichen Verknü weisen zu Paaren bei $2n$ Elementen $=1.3.5.7....(2n-3).$(sei. Denken wir uns diese verschiedenen möglichen Verknü weisen sämmtlich hingeschrieben, und zwar in alphabetisch ordnung, so ist klar, dass dieselben alle mit dem Elen beginnen und auf natürliche Weise in $(2n-1)$ Gruppen ze je nachdem das Element, welches mit a das erste Paar ein anderes ist. Diese $(2n-1)$ Gruppen enthalten alle glei Verknüpfungsweisen, nämlich so viele als für die ausse ersten Paar noch übrigen $(2n-2)$ Elemente möglich sin Zahl von Verknüpfungsweisen der $2n$ Elemente ist al $(2n-1)$fache der Zahl der Verknüpfungsweisen von $(2n-$ menten, diese aber aus ähnlichen Gründen das $(2n-3)$fac Zahl der Verknüpfungen von $(2n-4)$ Elementen; und so e sich durch wiederholtes Schliessen die Factoren des zu be den Products, wenn auch in umgekehrter Ordnung.

Dass ferner der obige Zähler $1.2.4.6....(2n-4)(2n-$ Zahl der dem Kranze günstigen Verknüpfungsweisen richti stelle, beweisen wir auf folgende Art. Es war vorhin die von $(2n-1)$ Gruppen. Die erste dieser Gruppen hat in ihren Verknüpfungsweisen ab zum ersten Elementenpaar zweite ac, die dritte ad u. s. w. Die erste mit dem Elem paar ab beginnende Gruppe vermag keinen Kranz zu liefern durch die Verknüpfung ab der erste Halm in sich abgeschl mithin von der Verbindung der übrigen Halme ausgeschl Die übrigen $(2n-2)$ Gruppen aber liefern, unter ein

rglichen, immer eine gleich grosse Anzahl von Kränzen, weil e Beziehung des Elementes *a* zu jedem ausser *b* vorhandenen ndern Elemente offenbar eine ganz gleichartige ist. Wir dürfen her nur die Zahl von Kränzen in irgend einer dieser Gruppen sdrücken und diese Zahl mit $(2n-2)$ multipliciren. Wählen wir e Gruppe, in welcher das erste Elementenpaar durchweg *ac* utet, und in welcher mithin das zweite Elementenpaar durcheg mit *b* beginnt, so ergibt sich, dass diese Gruppe ebensoviele ränze liefern muss, als wenn das erste Elementenpaar *ac* gar cht vorhanden wäre, das zweite aber statt mit *b* vielmehr mit *c* egänne. Indem nämlich *c* mit *a* verknüpft ist und *a* mit *b* zummenhängt, ist *cab* nur als eine Verlängerung von *c* zu beachten. Jede der vorhandenen $(2n-2)$ Gruppen liefert also so ele Kränze, als $(n-1)$ Halme für sich zu liefern vermögen. us ähnlichen Gründen liefern aber diese wieder $(2n-4)$mal so ele Kränze, als $(n-2)$ Halme liefern würden. Schliesst man so eiter, so erhält man den zu beweisenden Zähler auf dieselbe rt, wie früher den Nenner.

Bei Benutzung des Wahrscheinlichkeitsquotienten $\frac{1.2.4.6.8....}{1.3.5.7.9....}$ at sich hiernach die Zahl der aus Zähler und Nenner anzuwenenden ersten Factoren genau nach der Zahl der Halme zu richn. Die Unregelmässigkeit, dass im Zähler 1 als der Zugführer er geraden Zahlen erscheint, entspricht genau der Unregelmässigkeit in der Sache, dass bei einem Halm die Verknüpfung *ab* inen Kranz liefert, bei jeder andern Zahl von Halmen aber nicht. ie Wahrscheinlichkeit des Kranzes wird, wenn die Zahl der alme wächst, fortwährend geringer, verschwindet aber erst im nendlichen. Wir rathen daher den schönen Leserinnen dieses rchivs, welche sich unseres Orakels bedienen wollen, die Zahl er anzuwendenden Halme jedesmal mit ihren Lebensjahren in ebereinstimmung zu bringen.

Zum Schluss mag der obige Quotient noch mit der bekannen Formel

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2.2.4.4.6.6.8.8....}{1.3.3.5.5.7.7.9....}$$

glichen werden. Nehmen wir an, es seien in dieser letzteren rmel so viele Factoren benutzt, dass die Gleichung nahe richist, und der letzte Factor des Nenners sei $(2n-1)$, so würde e Wahrscheinlichkeit unseres Kranzes bei *n* Halmen auch näherungsweise durch $\sqrt{\frac{\pi}{2(2n-1)}}$ ausgedrückt werden können, wodurch ch zugleich die obige Behauptung, dass unser Wahrscheinlicheitsquotient bei unzählig vielen Halmen verschwindend klein erde, rechtfertigt.

XLV.

Bemerkung zu dem Beweise des un No. XXXIV. in Theil IV. S. 330. hi gestellten geometrischen Lehrsatz

Von

Herrn Franz Knopf in Cassel.

In dem Beweise des genannten Lehrsatzes ist behauptet, jeder der drei Werthe, welche für x aus der Gleichung (1) vorgehn, die Bedingungen desselben erfüllet. Es wird aber β nur für den Werth $x=0$, und die beiden Werthe $x'=-(a$ und $x''=-\frac{(a+b)(a+2b)}{b}$ müssen als die Bedingungen des L satzes nicht erfüllend verworfen werden.

Substituirt man nämlich in die Gleichungen

$$\gamma^2=\frac{ac(a+b+c)(a+c-b)}{(a+c)^2} \text{ und } \beta^2=\frac{ab(a+b+c)(a-c+b)}{(a+b)^2},$$

für $c-b$ den Ausdruck $-(a+b)$, oder für c den Ausdruck - so ergiebt sich $\gamma^2=\frac{a^2b^2}{0}$ und $\beta^2=\frac{ab^2(2a+b)}{(a+b)^2}$, also können $c=-a$ keine zwei Linien β und γ existiren, welche gleich wär

Substituirt man ferner für $c-b$ den Ausdruck $-\frac{(a+b)(a+2}{b}$ oder für c den Ausdruck $-\frac{(a+b)^2+ab}{b}$, so ergiebt sich:

$$\gamma^2=-\frac{[a(a+b)^2+a^2b].(a^2+2ab)(a^2+2ab+2b^2)}{b(a+b)^4}$$

und

$$\beta^2=-\frac{ab(a^2+2ab)[ab+(a+b)(a+2b)]}{b^2(a+b)^2};$$

r $c=-\frac{(a+b)^2+ab}{b}$ werden γ und β imaginär. Daher

wird und mithin alle Glieder verschwinden, in welchen μ von Null verschieden ist. Es bleibt daher nur übrig

$$2\int_0^\pi (2\cos\tfrac{1}{2}z)^\mu \cos\tfrac{1}{2}\mu z \cos nz\,dz = \mu_n \int_0^\pi \cos(n-n)z\,dz = \mu_n \pi.$$

Schreiben wir den Werth von μ_n hin und multipliziren darauf beiderseits mit $\frac{1.2.3....n}{\pi}$, wobei $1.2....n$ kurz mit n' bezeichnet werden möge, so wird

$$\frac{2.n'}{\pi}\int_0^\pi (2\cos\tfrac{1}{2}z)^\mu \cos\tfrac{1}{2}\mu z \cos nz\,dz$$
$$= \mu(\mu-1)(\mu-2)....(\mu-n+1).$$

Links setzen wir um mehrerer Bequemlichkeit willen $z = 2x$, wodurch $dz = 2dx$ wird, und die auf x bezüglichen Integrationsgränzen in $x = \frac{0}{2}$ und $x = \frac{\pi}{2}$ übergehen. Rechts entwickeln wir die Fakultät nach der Formel 2) und erhalten so

$$\frac{4}{\pi}n'\int_0^{\frac{1}{2}\pi} (2\cos x)^\mu \cos\mu x \cos 2nx\,dx$$
$$= (-1)^n[-\overset{n}{A}_1\mu + \overset{n}{A}_2\mu^2 - \overset{n}{A}_3\mu^3 + ... + (-1)^n \overset{n}{A}_n\mu^n].$$

Um nun hieraus irgend einen der Koeffizienten $\overset{n}{A}$ etwa $\overset{n}{A}_k$ zu bestimmen, differenziren wir beiderseits $k$mal in Bezug auf μ und nehmen dann $\mu = 0$. Setzen wir zur Abkürzung

$$3)\quad (2\cos x)^\mu \cos\mu x = f(\mu),$$

also

$$\frac{4}{\pi}n'\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f(\mu)\cos 2nx\,dx$$
$$= (-1)^n[-\overset{n}{A}_1\mu + ... + (-1)^k \overset{n}{A}_k\mu^k + ... + (-1)^n \overset{n}{A}_n\mu^n],$$

so giebt die $k$malige Differenziation dieser Gleichung

$$\frac{4}{\pi}n'\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f^{(k)}(\mu)\cos 2nx\,dx$$
$$= (-1)^n[(-1)^k 1.2...k\overset{n}{A}_k + (-1)^{k+1}2.3...(k+1)\overset{n}{A}_{k+1}\mu + ...],$$

und folglich für $\mu = 0$

$$\frac{4}{\pi}n'\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f^{(k)}(0)\cos 2nx\,dx$$
$$= (-1)^{n+k}1.2.3....k\overset{n}{A}_k = (-1)^{n+k}k'\overset{n}{A}_k,$$

oder endlich

$$4)\quad \overset{n}{A}_k=(-1)^{n+k}\frac{4}{\pi}\frac{n'}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} f^{(k)}(0)\cos 2nx\,dx.$$

Um nun die noch rückständige Differenziation auszuführen, stellen wir $f(\mu)$ in die Form

$$f(\mu)=e^{\mu l(2\cos x)}\cos\mu x$$

und setzen zur Abkürzung $l(2\cos x)=y$, also

$$f(\mu)=e^{y\mu}\cos x\mu,$$

oder wenn man den Cosinus durch imaginäre Exponenzialgrössen ausdrückt:

$$f(\mu)=\tfrac{1}{2}[e^{(y+xi)\mu}+e^{(y-xi)\mu}],$$

wobei $i=\sqrt{-1}$ ist. Hier giebt nun $k$malige Differenziation in Bezug auf μ

$$f^{(k)}(\mu)=\tfrac{1}{2}[(y+xi)^k e^{(y+xi)\mu}+(y-xi)^k e^{(y-xi)\mu}],$$

und daraus folgt für $\mu=0$

$$f^{(k)}(0)=\tfrac{1}{2}[(y+xi)^k+(y-xi)^k].$$

Man kann diesen Ausdruck bekanntlich in einen anderen umsetzen, der keine imaginäre Zahl enthält, nämlich

$$(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}k}\cos\left(k\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{y}\right),$$

und dann wird

$$5)\quad \overset{n}{A}_k=(-1)^{n+k}\frac{4}{\pi}\frac{n'}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}(y^2+x^2)^{\frac{1}{2}k}\cos\left(k\,\mathrm{Arctan}\frac{x}{y}\right)\cos 2nx\,dx;$$

aber dieser Ausdruck ist etwas unbehülflich. Zu einem eleganteren Resultate gelangt man dadurch, dass man statt $f^{(k)}(0)$ die Reihe

$$k_0 y^k-k_2 y^{k-2}x^2+k_4 y^{k-4}x^4-\ldots.$$

substituirt, wodurch

$$\overset{n}{A}_k=(-1)^{n+k}\frac{4}{\pi}\frac{n'}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[k_0 y^k-k_2 y^{k-2}x^2+\ldots]\cos 2nx\,dx$$

erhalten wird. Setzt man das Integral

$$(-1)^{n+k}\frac{4}{\pi}\frac{n'}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} y^p x^q\cos 2nx\,dx,$$

$$(-1)^{n+k}\frac{4}{\pi}\frac{n'}{k'}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}[l(2\cos x)]^p x^q \cos 2nx dx = \varphi(p,q),$$

so erscheint die symmetrischere Formel

$$6)\quad \overset{n}{A}_k = k_0\varphi(k,0) - k_2\varphi(k-2,2) + k_4\varphi(k-4,4) - \ldots$$

Nimmt man die Koeffizienten A in umgekehrter Reihenfolge, so ergeben sich diejenigen Zahlen, welche Herr **Schläfli** mit C bezeichnet. Aus der Gleichung 1) folgt nämlich für $\mu = \frac{1}{\lambda}$ und durch Multiplikation mit λ^n:

$$(1+0\lambda)(1+1\lambda)(1+2\lambda)\ldots(1+\overline{n-1}\lambda)$$
$$= \overset{n}{A}_1\lambda^{n-1} + \overset{n}{A}_2\lambda^{n-2} + \ldots + \overset{n}{A}_{n-1}\lambda + \overset{n}{A}_n,$$

und wenn man diess mit der Formel

$$(1+0\lambda)(1+1\lambda)(1+2\lambda)\ldots(1+\overline{n-1}\lambda)$$
$$= \overset{n}{C}_0 + \overset{n}{C}_1\lambda + \overset{n}{C}_2\lambda^2 + \ldots + \overset{n}{C}_{n-1}\lambda^{n-1}$$

vergleicht, so wird

$$\overset{n}{C}_0 = \overset{n}{A}_n,\ \overset{n}{C}_1 = \overset{n}{A}_{n-1},\ \overset{n}{C}_2 = \overset{n}{A}_{n-2},\ldots$$

überhaupt

$$\overset{n}{C}_i = \overset{n}{A}_{n-i},$$

wobei i eine positive ganze Zahl bedeutet. Es versteht sich übrigens von selbst, dass man noch andere und bessere Ausdrucksweisen für $\overset{n}{A}_k$ finden kann, wenn es glückt, eine der Fakultäten $\mu(\mu+1)\ldots(\mu+n-1)$ oder $\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n-1)$ in ein anderes und geschmeidigeres Integral als das hier benutzte zu verwandeln. Es kam mir bei den gegebenen Entwickelungen nur darauf an, zu zeigen, dass die in Vorschlag gebrachte Methode nicht an den Schwierigkeiten leidet, welche der unmittelbaren Bestimmung von $\overset{n}{A}_k$ oder $\overset{n}{C}_i$ entgegenstehen, wenn man von der Rekursionsformel seinen Auslauf nehmen will, und dass sie daher wohl verdiente, weiter angewendet zu werden.

XLVII.

Bestimmung der Arbeit, die nöthig ist, um Luft in einem Behälter zu verdünnen.

Von dem
Herrn Doctor J. Dienger,
Lehrer an der höheren Bürgerschule zu Sinsheim bei Heidelberg.

Man habe ein Gefäss von a Kubikmeter Inhalt, in welchem Luft von der Spannung $\mu \left(\overline{\gtrless} 1\right)$ Atmosphären sei, und man will nun diese Luft vermittelst einer Luftpumpe, die einen Stiefel von b Kubikmeter Inhalt hat, so verdünnen, dass die Spannung derselben nur noch v Atmosphären betrage. Welches ist der dazu nöthige Aufwand von Arbeit?

Dabei setzen wir voraus, dass die Hahnen der Luftpumpe, vermöge der mechanischen Einrichtung des Instrumentes, sich von selbst öffnen und schliessen, so dass dazu nicht der Druck der Luft nothwendig ist. Die etwa zu diesem Oeffnen und Schliessen nothwendige Arbeit vernachlässigen wir. Zugleich wollen wir bemerken, dass wenn es im Folgenden heisst, es seien in einem Behälter g Kubikmeter Luft enthalten, damit gesagt sein soll, die in dem fraglichen Gefässe enthaltene Luft würde unter dem Drucke von Einer Atmosphäre g Kubikmeter (Kbkmtr) Raum einnehmen.

Zu Anfang befinden sich in dem Behälter $a\mu$ Kbkmtr Luft; hebt sich nun der Kolben das erste Mal, so dehnt sich diese Luft von dem Raum a in den $a+b$ aus, ihre Spannung ist also noch $\frac{a}{a+b}\mu$ Atm. Senkt sich also der Kolben, so gehen fort $\frac{ab}{a+b}\mu$ Kbmtr Luft, bleiben folglich:

$$a\mu + \frac{ab}{a+b}\mu = \frac{a^2}{a+b}\mu \text{ Kbmtr von der Spannung } \frac{a}{a+b}\mu \text{ Atm.}$$

Rechnet man so weiter, so ergiebt sich, dass wenn der Kolben sich $n$mal gehoben und gesenkt hat, noch vorhanden sind:

$$1. \quad \frac{a^{n+1}}{(a+b)^n}\mu \text{ Kbkmtr von der Spannung } \left(\frac{a}{a+b}\right)^n \mu \text{ Atm.}$$

Soll also die Spannung ν durch n Kolbenstösse erreicht sein, so muss

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^n \mu = \nu \qquad (1)$$

sein, wodurch n bestimmt wird.

Wenden wir uns nun zur Bestimmung der nöthigen Arbeit.

Zu Anfang des $n$ten Kolbenhubs war die Spannung der Luft $\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \mu$ Atm.; ist nun der Kolben bis zur Höhe x aufgestiegen, f sein Flächeninhalt in Quadratmeter, so ist die Spannung der Luft noch $\left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \mu . \frac{a}{a+fx}$. Drückt nun die Luft mit einem Gewicht von σ Kilogramm auf 1□ Meter bei der Spannung von 1 Atm., so findet man, wenn die Reibung des Kolbens an den Stiefelwänden durch ein Gewicht von r Kilogr. überwunden werden kann, für die Kraft, die zur Bewegung des Kolbens nöthig ist:

$$f\sigma + r - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \mu . \frac{af\sigma}{a+fx}.$$

Bewegt sich der Kolben nun durch den Raum ∂x, so kann diese Kraft als konstant angesehen werden; ihre Arbeit ist alsdann:

$$\left(f\sigma + r - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \frac{\mu a f\sigma}{a+fx}\right)\partial x.$$

Heisst h die ganze Höhe des Hubs, so ist die Arbeit eines Hubs:

$$\int_0^h \left(f\sigma + r - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \frac{\mu a f\sigma}{a+fx}\right)\partial x$$

$$= fh\sigma + rh - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \mu a\sigma \log\left(\frac{a+fh}{a}\right).$$

Beachtet man, dass $fh = b$, und dass bei einem Niedergang die Arbeit bloss rh ist, so findet man die zum $n$ten Auf- und Niedergang nöthige Arbeit A_n des Kolbens:

$$A_n = b\sigma + 2rh - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{n-1} \mu a\sigma \log\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Demnach ist die gesammte Arbeit A während n Kolbenstössen:

$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n,$$

d. i.

$$A = nb\sigma + 2nrh - \frac{a\mu\sigma}{b} \log\left(1 + \frac{b}{a}\right) . \frac{(a+b)^n - a^n}{(a+b)^{n-1}}, \qquad (2)$$

worin n durch die Gleichung (1) bestimmt ist.

Gesetzt, es solle dieses Auspumpen durch eine Dampfmaschine von m Pferdekräften in t Sekunden vollzogen werden. Eine Pferdekraft für die Sekunde werde zu p kilogr. mtrs ($p=58,823$) gerechnet, so ist

$$mpt=A, \tag{3}$$

wodurch m gefunden wird.

Der Ausdruck von A nimmt, wenn man die Gleichung (1) beachtet, auch die Form an:

$$\left.\begin{aligned} A &= nb\sigma + 2nrh - \frac{a\mu\sigma(a+b)}{b}\log\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1-\frac{\nu}{\mu}\right) \\ &= nb\sigma + 2nrh - \frac{a\sigma(a+b)}{b}\log\left(1+\frac{b}{a}\right).(\mu-\nu). \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

Man sehe darüber: „Mémoire sur l'application de l'air atmosphérique comme force motrice sur les chemins de fer" §. 16. in Crelle's Journal Bd. 32. S. 24 ff., wo die Resultate jedoch anders sind, indem die dortigen Gleichungen (3) und (4) nicht genau richtig sind. Macht man in unserer Formel (2') $\log(1+\frac{b}{a})=\frac{b}{a}$, $\frac{a+b}{b}=\frac{a}{b}$, so gelangt man zu den Resultaten der angeführten Abhandlung, was darauf hinauskommt, b gegen a zu vernachlässigen.

σ ist nach Crelle 9418, nach Andern (Archiv IX. S. 342. nach Müller's Physik) $=10330$.

Bis hierher haben wir eine Luftpumpe mit einem einzigen Stiefel betrachtet; wir wollen nun annehmen, dieselbe besitze deren zwei, in deren einem der Kolben sich hebt, während der andere niedersteigt. Derjenige Kolben, der zu Anfang der Operation aufsteigt, soll der erste genannt werden. Durch Betrachtungen, die den so eben angestellten ganz ähnlich sind, wird man leicht das folgende Täfelchen entwerfen können. Die beiden Stiefel werden vollkommen gleich angenommen und es mögen von jedem die Bezeichnungen, die oben von dem einen gebraucht wurden, gelten.

Nach dem		Sind noch da Kbkmtr.	Spannung derselb. in Atm.
1sten Aufgang des 1sten Kolbens		$a\mu$	$\frac{a\mu}{a+b}$
1sten Niedergang	„	$\frac{a^2\mu}{a+b}$	$\left(\frac{a}{a+b}\right)^2\mu$
2ten Aufgang	„	$\frac{a^3\mu}{(a+b)^2}$	$\left(\frac{a}{a+b}\right)^3\mu$
2ten Niedergang	„	$\frac{a^4\mu}{(a+b)^3}$	$\left(\frac{a}{a+b}\right)^4\mu$

3ten Aufgang „ . . . $\frac{a^5\mu}{(a+b)^4} \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^5 \mu.$

3ten Niedergang „ . . . $\frac{a^6\mu}{(a+b)^5} \cdot \cdot \cdot \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^6 \mu.$

⋮

*n*ten Aufgang „ . . $\frac{a^{2n-1}\mu}{(a+b)^{2n-2}} \cdot \cdot \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n-1} \mu.$

*n*ten Niedergang „ . . $\frac{a^{2n}\mu}{(a+b)^{2n-1}} \cdot \cdot \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n} \mu.$

Soll also während n Auf- und Niedergängen des ersten Kolbens die verlangte Verdünnung hervorgebracht sein, so muss

$$\left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n} \mu = \nu \qquad (4)$$

sein, welche Gleichung aus (1) entsteht, wenn man $2n$ statt n setzt, was auch nicht anders zu erwarten stand. Die Gleichung (4) giebt nun n.

Berechnen wir nun die nöthige Arbeit. Während des $n$ten Aufgangs des ersten Kolbens ist dieselbe, wie man leicht sieht:

$$\int_0^h (f\sigma + r - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n-2} \frac{af\sigma\mu}{a+fx}) \partial x$$
$$= b\sigma + rh - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n-2} a\sigma\mu \log(1+\frac{b}{a});$$

die zu gleicher Zeit nöthige Arbeit zum Niedergang des zweiten Kolbens ist rh. Geht nun der erste Kolben wieder nieder, so ist die dazu nöthige Arbeit rh, die aber zu gleicher Zeit verwendete für den Aufgang des zweiten Kolbens:

$$\int_0^h (f\sigma + r - \frac{a^{2n-1}}{(a+b)^{2n-1}}\mu \cdot \frac{af\sigma}{a+fx}) \partial x$$
$$= b\sigma + rh - \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n-1} a\mu\sigma \log(1+\frac{b}{a}).$$

Somit ist die gesammte Arbeit während des $n$ten Auf- und Niederganges des ersten Kolbens:

$$2b\sigma + 4rh - a\sigma\mu \log(1+\frac{b}{a}) \cdot \left(\frac{a}{a+b}\right)^{2n-2} (1 + \frac{a}{a+b})$$
$$= 2b\sigma + 4rh - \frac{a^{2n-1}\sigma\mu(2a+b)}{(a+b)^{2n-1}} \log(1+\frac{b}{a}).$$

Setzt man hierin $n = 1, 2, \ldots n$ und summirt, so findet sich für die ganze Arbeit B während der n ersten Auf- und Niedergänge des ersten Kolbens:

Sei, um ein Beispiel zu wählen, $r=0$, $\mu=1$, $\nu=\frac{1}{2}$, $a=1$
$b=2$, $t=4000$, so findet man, dass die Maschine haben mu

$$(18836.\frac{0,3010300}{0,0008677}-4709000.0,0008677.\frac{1002^{\frac{3010300}{8677}}-1000^{\frac{3010}{8677}}}{1002^{\frac{3010300}{8677}}-1}$$

$$:235292,$$

gleich 19 Pferdekräften ungefähr.

XLVIII.

Miscellen.

Drei neue Theoreme von Cauchy über die regulären lyeder, ausgezogen aus den Comptes rendus hebdoma res des séances de l'Académie des sciences. Tome X No. 20. (15. Mai 1848.) p. 518.

1er **Théorème.** Les centres des diverses faces d'un polyèdre lier quelconque sont les sommets d'un autre polyèdre régulier. D'ail deux polyèdres réguliers, dont l'un a pour sommets les centres des de l'autre, sont nécessairement ou deux tétraèdres, ou un hexaèd un octaèdre, ou un dodécaèdre et un icosaèdre.

2e **Théorème.** Dans tout polyèdre régulier, la droite menée centre à un sommet est perpendiculaire aux plans de divers polyg réguliers auxquels appartiennent tous les sommets situés hors de c droite.

Si le polyèdre donné est un tétraèdre, un seul sommet sera s sur la droite dont il s'agit, les trois autres appartiendront à un tria équilatéral dont le plan sera perpendiculaire à la droite.

Si le polyèdre donné est un hexaèdre, ou un octaèdre, ou un do caèdre, ou un icosaèdre, deux sommets seront les extremités d'un m diamètre mené par le centre du polyèdre. Les autres sommets ap tiendront à deux triangles équilatéraux, ou à un seul carré, ou à triangles équilatéraux et à deux hexagones réguliers, ou enfin à pentagones réguliers, dont les plans seront perpendiculaires au dia dont il s'agit.

En partant de ces remarques, on démontrera sans peine une rel curieuse qu'ont entre eux les trois polyèdres dans lesquels trois a aboutissent à chaque sommet, savoir, le tétraèdre, l'hexaèdre dodécaèdre réguliers. Cette relation est exprimée par le théorème sui

3e **Théorème.** Les sommets de l'hexaèdre ou du dodécaèdre lier sont en même temps les sommets de deux ou de cinq tétra réguliers.

Cauchy fügt noch hinzu:

Un déplacement déterminé d'un polyèdre régulier tournant auto son centre peut toujours être considéré comme le résultat de trois d cements successifs dont chacun serait produit par un mouvement d tation du polyèdre autour de l'un des rayons vecteurs menés du c aux sommets.





